МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра общей электротехники

Составитель
Т. М. Черникова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Методические указания к практическим занятиям

Рекомендованы учебно-методической комиссией направления
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
в качестве электронного учебного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты

Маслов И. П. – заведующий кафедрой общей электротехники председатель учебно-методической комиссии направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника;

Семыкина И. Ю. – профессор кафедры общей электротехники

Черникова Татьяна Макаровна.

Теоретические основы электротехники: методические указания к практическим занятиям [Электронный ресурс] для обучающихся направления подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника всех форм обучения / сост.: Т. М. Черникова; КузГТУ. – Кемерово, 2018.

В работе предлагается студентам самостоятельно рассмотреть и решить вопросы подготовки к практическим занятиям по электрическим цепям и электромагнитному полю. Даны краткие теоретические положения, облегчающие подготовку к занятиям, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, список необходимой литературы.

© КузГТУ, 2018
© Черникова Т. М.,
составление, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

Занятие 1. Анализ простых цепей постоянного тока. Законы Кирхгофа . . . …. 5

Занятие. 2. Методы расчета сложных электрических цепей постоянного тока 20

Занятие 3. Основные понятия цепей переменного тока. Аналитический метод расчета 37

Занятие 4. Расчет цепей переменного тока символическим методом. 52

Занятие 5 Контрольная работа по цепям переменного тока 66

Занятие 6. Анализ резонансных явлений. Расчет цепей со взаимной индукцией 67

Занятие 7. Анализ трехфазных цепей 76

Занятие 8. Расчет электрических цепей с несинусоидальным источником 90

Занятие 9. Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях постоянного тока. Классический и операторный методы 106

Занятие 10. Анализ переходных процессов в цепях переменного тока. Анализ переходного процесса с помощью интеграла Дюамеля 117

Занятие 11. Контрольная работа по переходным

процессам 135

Занятие 12. Анализ четырехполюсников 136

Занятие 13. Анализ нелинейных электрических
и магнитных цепей постоянного тока 152

Занятие 14. Расчет нелинейных цепей переменного тока .163

Занятие 15. Расчет электростатических полей 174

Занятие 16. Стационарные электрические и магнитные
поля. Переменное электромагнитное поле 183

Список рекомендуемой литературы 197

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Теоретические основы электротехники» состоит из лекционных, практических и лабораторных занятий. При наличии практических занятий предусмотрено решение задач с целью лучшего усвоения теоретических знаний и получения навыков расчета задач, с которыми будущие специалисты могут встретиться в своей практической деятельности.

Методические указания содержат краткие теоретические положения, охватывающие основные разделы теоретического курса: линейные и нелинейные цепи постоянного тока, линейные и нелинейные цепи переменного тока, трехфазные цепи, переходные процессы в линейных цепях с сосредоточенными параметрами, электромагнитное поле.

Методические указания рассчитаны на студентов, уже проработавших соответствующие разделы курса.

В ходе решения задач не следует изменять однажды принятые направления токов и наименования узлов, сопротивлений.

Занятие 1

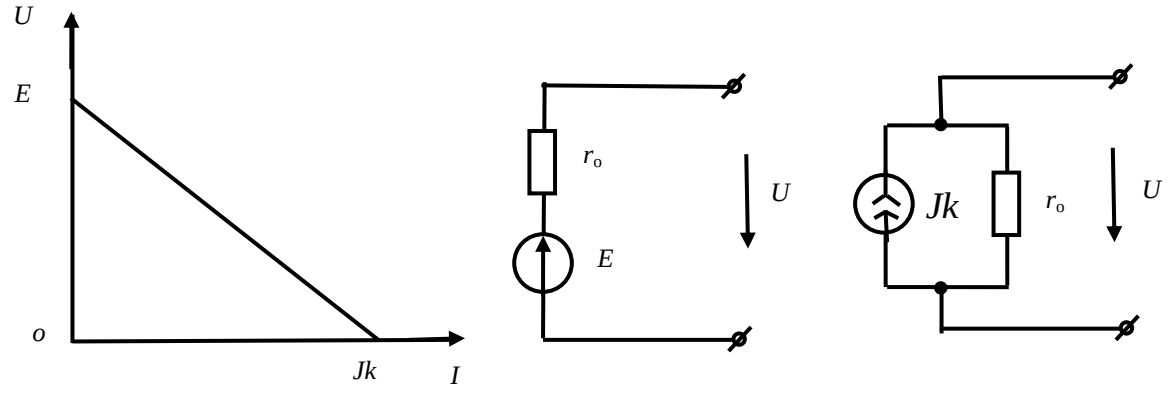
АНАЛИЗ ПРОСТЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Цель занятия: изучение и закрепление основных законов электрических цепей: закона Ома, законов Кирхгофа; применение их для расчета простейших цепей постоянного тока.

Основные положения и соотношения

1. Электрические цепи состоят их источников и потребителей электрической энергии. Потребитель электрической энергии характеризуется сопротивлением, которое является параметром цепи и обозначается буквой *R* (резистор).

2. Источник электрической энергии, характеризуемый внешней характеристикой $U=f$ (I) (рис. 1.1,а), может быть представлен в виде любой из двух эквивалентных схем: схемы из последовательного включения ЭДС и внутреннего (входного) сопротивления источника (рис. 1.1,б) и схемы из параллельно включенных источников тока и внутреннего (входного) сопротивления источника (рис. 1.1,б). Величина ЭДС *E* в схеме (рис. 1.1,б) численно равна напряжению на зажимах источника в режиме холостого хода (при отключенной нагрузке), а ток источника $J_к$ в схеме (рис. 1.1,в) численно равен току короткого замыкания источника.



а) б) в)

Рис. 1.1

3. Переход от схемы с источником ЭДС к схеме с источником тока и обратно осуществляется по формулам

$$J_k = \frac{E}{r_0}; \quad E = r_0 \cdot J_k .$$

4. При расчетах электрических цепей пользуются понятиями идеализированных источников: источников ЭДС и источников тока. У источника ЭДС внутреннее сопротивление $r_o = 0$, а у источника тока $r_o = \infty$. Напряжение на зажимах источника ЭДС не зависит от проходящего через источник тока и равно его ЭДС, а у источника тока ток не зависит от напряжения на зажимах источника.

5. Имеется три формы записи закона Ома.

Для замкнутой неразветвленной цепи

$$I = \frac{\Sigma \mathrm{E}}{\Sigma R},$$

где ΣE – алгебраическая сумма ЭДС; со знаком «+» в эту сумму входят те ЭДС, направления действия которых совпадают с выбранным положительным направлением тока и со знаком «–» – остальные ЭДС; ΣR – арифметическая сумма сопротивлений цепи (в том числе внутренних сопротивлений источников ЭДС).

Для отдельной ветви без источника ЭДС в сложной электрической цепи

$$\mathrm{I_{ab}} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_{ab}} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}},$$

где φ_a, φ_b – потенциалы узлов; U_{ab} – разность потенциалов или напряжение между узлами a и b; R_{ab} – арифметическая сумма сопротивлений в данной ветви (см. рис. 1.2).

Для ветви с источниками ЭДС

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_c + \Sigma E_{ac}}{\Sigma R_{ac}} = \frac{U_{ac} + \Sigma E_{ac}}{\Sigma R_{ac}},$$

где $U_{ac}=\varphi_a - \varphi_c$ – напряжение или разность потенциалов узлов, к которым подключена ветвь; ΣE_{ac} – алгебраическая сумма ЭДС в ветви «*ac*»; ΣR_{ac} – арифметическая сумма сопротивлений в ней.

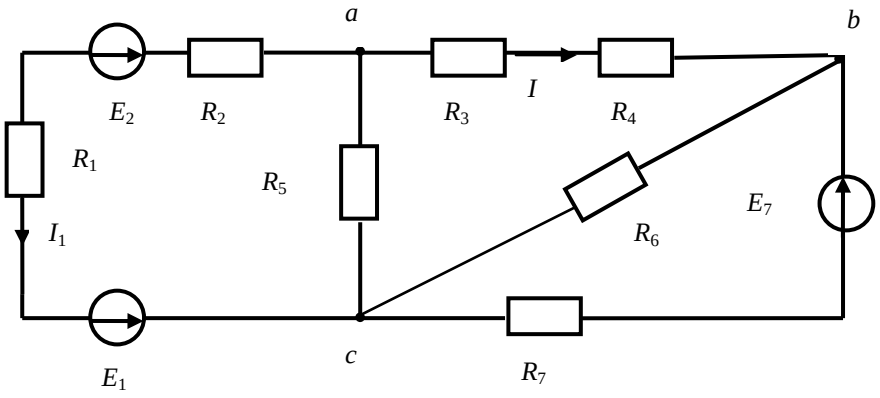


Рис. 1.2

Для ветви *ac* (см. рис. 1.2)

$$\Sigma E_{ac} = E_1 - E_2;$$
$$\Sigma R_{ac} = R_1 + R_2.$$

6. Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле электрической цепи, равна нулю:

$$\Sigma I = 0.$$

Токи, подходящие к узлу, берутся с одним знаком (обычно с плюсом), отходящие от узла – с другим знаком.

7. Второй закон Кирхгофа. В любом (замкнутом) контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения (на сопротивлениях) равна алгебраической сумме ЭДС:

$$\Sigma IR = \Sigma E.$$

8. Определение эквивалентных сопротивлений в пассивных

цепях:

а) при параллельном соединении *n* сопротивлений эквивалентное сопротивление определяется по формуле

$$\frac{1}{R_э} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.$$

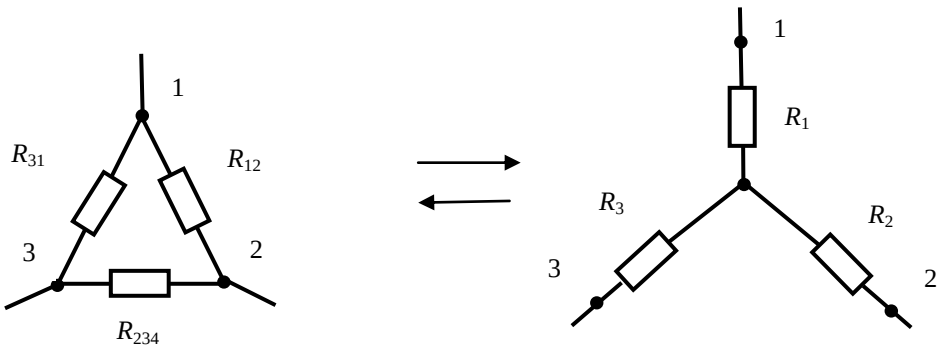
В частом случае параллельного соединения двух сопротивлений

$$R_э = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

При параллельном соединении трех сопротивлений

$$R_э = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3};$$

б) преобразование треугольника сопротивлений (рис. 1.3,а) в эквивалентную звезду и наоборот (рис. 1.3,б) производится по формулам



а) б)

Рис. 1.3

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}\right\} \Delta\rightarrow\mathrm{Y} \qquad \left.\begin{aligned} R_{12} &= R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2+R_3+\frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{31} &= R_3+R_1+\frac{R_3R_1}{R_2} \end{aligned}\right\} \mathrm{Y}\rightarrow\Delta$$

9. При определении токов в разветвленных цепях (рис. 1.4) полезно пользоваться формулой разброса токов в параллельных ветвях

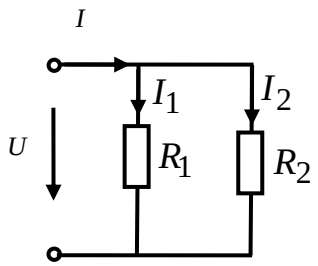


Рис. 1.4

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot I; \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\cdot I$$

Контрольные вопросы

1. В чем отличие источника тока от источника напряжения?
2. Сформулируйте закон Ома.
3. Сформулируйте законы Кирхгофа.
4. Чему равно эквивалентное сопротивление при последовательном включении элементов?
5. Чему равно эквивалентное сопротивление при параллельном включении элементов?
6. Как заменить треугольник сопротивлений эквивалентной звездой и наоборот?

Задачи

Задача 1.1. В цепи рис. 1.5,а определить токи I_1, I_2, I_3 при условии, что $J_{к1}$= 3 А, $J_{к3}$= 4 А, R_1 = 10 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 30 Ом.

Решение. Идеальный источник тока $J_{к1}$ с параллельно включенным сопротивлением R_1 заменяем эквивалентным источником ЭДС с последовательно включенным этим сопротивлением R_1.

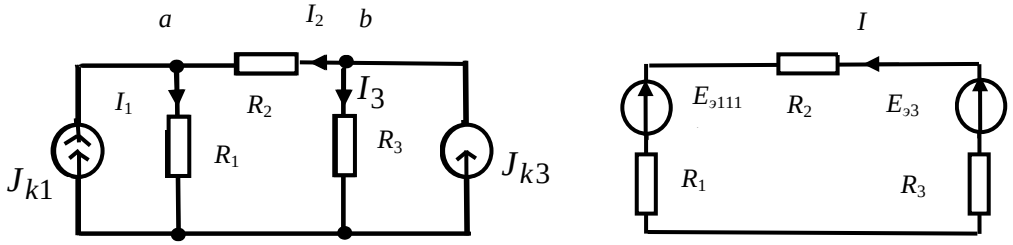
$$E_{Э1}= R_1 J_{к1}=10\cdot 3=30 \text{ В}.$$

Аналогично

$$E_{Э3}= R_3 J_{к3}=30\cdot 4=120 \text{ В}.$$

Получили эквивалентную схему (рис. 1.5, б), ток в которой определяем по закону Ома

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{E_{Э3} - E_{Э1}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120 - 30}{10 + 20 + 30} = 1{,}5 \text{ А}.$$



а) б)

Рис. 1.5

Ток I_2 в исходной схеме равен току I в эквивалентной схеме: $I_2 = I$ = 1,5 А.

Ток I_1 определим с помощью уравнения, составленного по первому закону Кирхгофа для узла «*a*»:

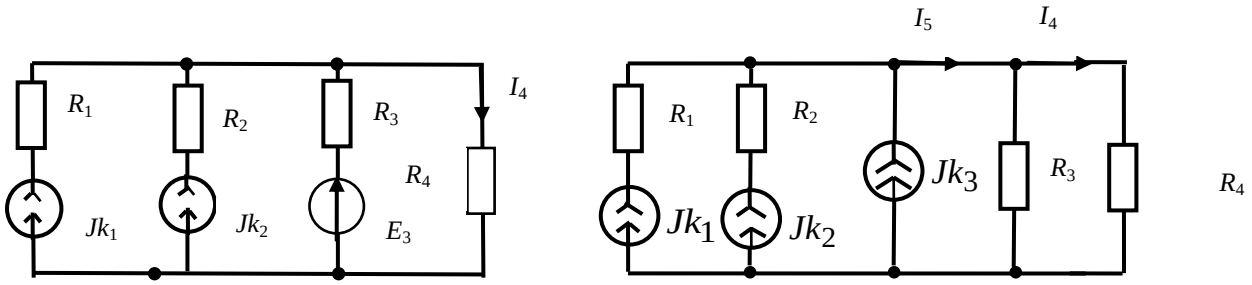
$$I_1=J_{к1}+I_2.$$

Откуда I_1 = 3 + 1,5 = 4,5 А. Составив уравнение по первому закону Кирхгофа для узла «*b*» $I_3+I_2=J_{к3}$, получим I_3 = 2,5 А.

Задача 1.2. Определить ток в сопротивлении R_4, включенном параллельно трем источникам: $J_{к1}=I$ А; $J_{к2}=2$ А; $E_3=2$ В; (рис. 1.6,а). Сопротивления схемы: $R_1=3$ Ом; $R_2=7$ Ом; $R_3=2$ Ом; $R_4=4$Ом.

Решение. Преобразуем источник ЭДС E_3 с последовательно включенным сопротивлением R_3 в эквивалентный источник тока $J_{к3}$ с параллельно включенным сопротивлением R_3 (см. рис. 1.6,б).

$$J_{k3}=\frac{E_3}{R_3}=\frac{2}{2}=1\text{A}$$



а) б)

Рис. 1.6

Найдем ток I_5: $I_5=J_{к1}+J_{к2}+J_{к3}=1+4+1=6$ А.

По формуле разброса токов в параллельных ветвях получим

$$I_4=I_5\cdot\frac{R_3}{R_3+R_4}=6\cdot\frac{2}{2+4}=2\text{A}.$$

Задача 1.3. Определить показания амперметра в схеме рис.1.7, где

$J_{к1}=2$ А; $E_3=4$ В; $R_1=R_2=R_3=1$ Ом.

Ответ: 3 А.

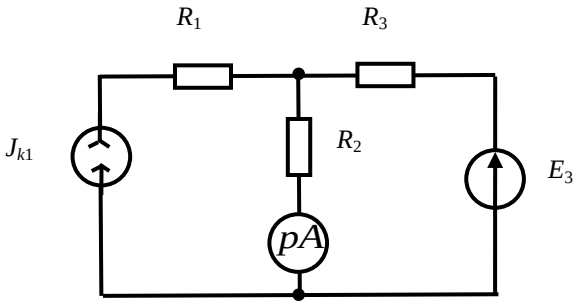


Рис. 1.7

Задача 1.4. В цепи рис. 1.8 амперметр показывает ток 5 А. Используя законы Ома и Кирхгофа, определить токи в других ветвях. Для внешнего контура цепи построить потенциальную диаграмму.

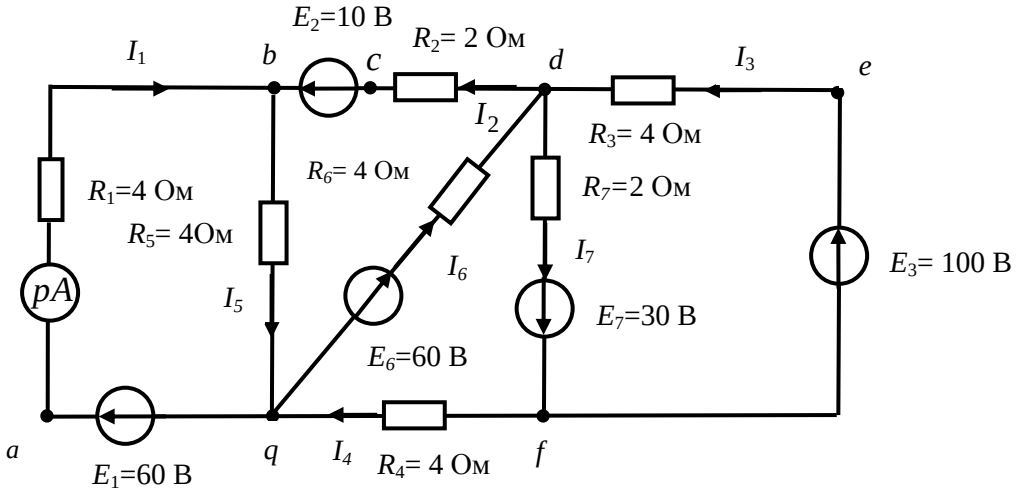


Рис. 1.8

Решение. Так как при всех известных параметрах цепи известен один из токов (I_1 = 5 А), отпадает необходимость в совместном решении уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа для независимых узлов и контуров. Из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура *abqa*

$$R_1 I_1 + R_5 I_5 = E_1,$$

находим $$I_5 = \frac{E_1 - R_1 I_1}{R_5} = \frac{60 - 4 \times 5}{4} = 10 \text{ А}.$$

Составив уравнение по первому закону Кирхгофа для узла *b*

$$I_1 + I_2 - I_5 = 0,$$

найдем

$$I_2 = I_5 - I_1 = 10 - 5 = 5 \text{ А}.$$

Выбирая и в дальнейшем узлы и контуры так, чтобы в каждое следующее уравнение входил один неизвестный ток, записываем: для контура *bdqb*:

$$R_5 I_5 + R_6 I_6 + R_2 I_2 = E_2 + E_6,$$

откуда $$I_6 = 10 \text{ А}.$$

Для узла *q*:

$$I_4 + I_5 - I_1 - I_6 = 0,$$

откуда $$I_4 = I_1 + I_6 - I_5 = 5 + 10 - 10 = 5 \text{ А}.$$

Для контура *qdfq*:

$$R_6 I_6 + R_7 I_7 + R_4 I_4 = E_6 + E_7,$$

откуда $$I_7 = 25 \text{ А}.$$

Для узла *f*: $$I_7 - I_4 - I_3 = 0,$$

откуда $$I_3 = I_7 - I_4 = 25 - 5 = 20 \text{ А}.$$

Для построения потенциальной диаграммы для внешнего контура необходимо определить потенциалы его узловых и промежуточных точек относительно какой-либо одной точки, потен-

циал которой принимается равным нулю. Пусть $\varphi_a = 0$, тогда

$$\varphi_b = \varphi_a\, 0 - R_1 I_1 = 0 - 4 \cdot 5 = -20 \text{ В};$$
$$\varphi_c = \varphi_b - E_2 = -20 - 10 = -30 \text{ В};$$
$$\varphi_d = \varphi_c + R_2 I_2 = -30 + 2 \cdot 5 = -20 \text{В};$$
$$\varphi_e = \varphi_d + R_3 I_3 = -20 + 4 \cdot 20 = 60 \text{ В};$$
$$\varphi_f = \varphi_e - E_3 = 60 - 100 = -40 \text{ В};$$
$$\varphi_q = \varphi_f - R_4 I_4 = -40 - 4 \cdot 5 = -60 \text{ В};$$
$$\varphi_a = \varphi_q + E_1 = -60 + 60 = 0.$$

Потенциальная диаграмма изображена на рис. 1.9.

По оси X откладываются сопротивления участков контура, по оси Y – потенциал точек контура.

Она показывает распределение потенциала вдоль контура.

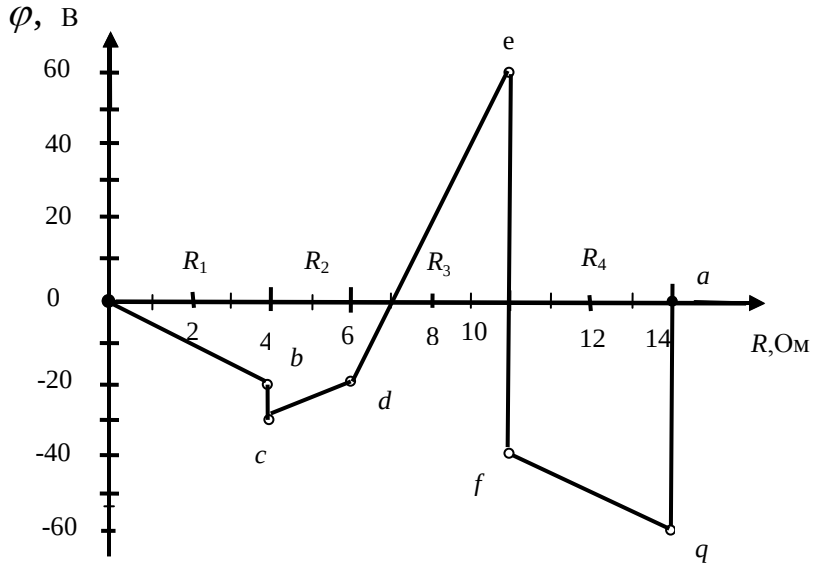


Рис. 1.9

На потенциальной диаграмме вертикальные линии соответствуют ЭДС, т. к. внутреннее сопротивление $r_0 = 0$ у идеальных источников ЭДС.

Задача 1.5. По законам Кирхгофа определить токи в ветвях цепи на рис. 1.10, если E_1 = 52 В; E_2 = 48 В; R_1 = 4 Ом; R_2 = 8 Ом; R_3 = 10 Ом. Проверить баланс мощностей.

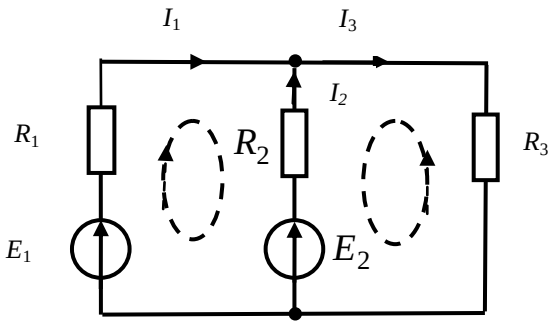


Рис. 1.10

Решение. Выбрав положительные направления токов в ветвях и направления обхода в двух независимых контурах так, как показано на рис. 1.10, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases}$$

Определение токов ведем способом определителей

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = -R_2 R_3 - R_1 R_2 - R_1 R_3 = -152$$

Δ – главный определитель системы; он состоит из коэффициентов при неизвестных токах.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1 - E_2 & -R_2 & 0 \\ E_2 & R_2 & R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -8 & 0 \\ 48 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -456,$$

Δ_1 – определитель, полученный путем замены в главном определителе первого столбца столбцом свободных членов;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E_1 - E_2 & 0 \\ 0 & E_2 & R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 48 & 10 \end{vmatrix} = -152,$$

Δ_2 – определитель, полученный путем замены в главном определителе второго столбца столбцом свободных членов.

Искомые токи в ветвях

$$I_1 = \frac{-456}{-152} = 3\,\text{A}\,,\ I_2 = \frac{-152}{-152} = 1\,\text{A}\,,$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 4\ \text{A}.$$

Контролем правильности расчета цепи может являться проверка сходимости баланса мощностей.

При проверке баланса мощностей следует иметь в виду, что источники ЭДС отдают энергию, если истинное направление тока в них совпадает с направлением действия ЭДС ($E \cdot I > 0$), если же истинное направление тока и ЭДС противоположны, то данный источник является потребителем ($E \cdot I < 0$). Все сопротивления цепи (в том числе внутренние сопротивления источников энергии) независимо от направления тока в них являются потребителями энергии.

Для данной цепи:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = I^2_1 R_1 + I^2_2 R_2 + I^2_3 R_3$$

или $$52 \cdot 3 + 48 \cdot 1 = 9 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 16 \cdot 10.$$

Получили тождество 204 = 204.

Задача 1.6. Для цепи рис. 1.11 проверить баланс мощностей. В цепи:

$$J_{k1}=J_{k3}=1 \text{ А}; \; E_3=E_6=1 \text{ В}; \; R_1=R_2=R_3=R_4=1 \text{ Ом}.$$

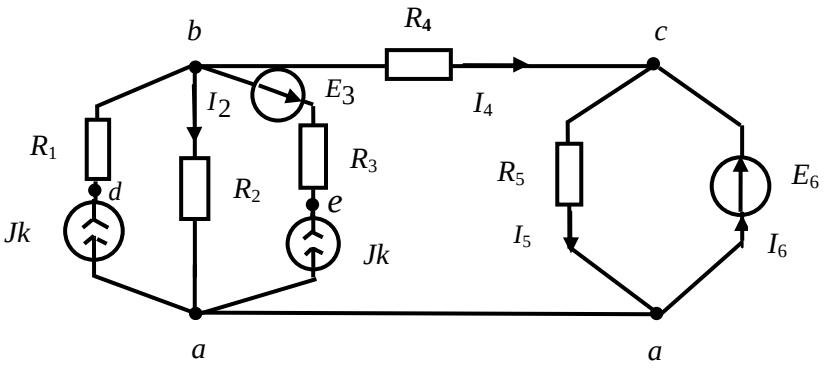


Рис. 1.11

При проверке баланса мощностей надо знать токи в ветвях цепи. Определим их по методу уравнений Кирхгофа. Для определения четырех неизвестных токов (I_2, I_4, I_5, I_6) необходимо составить 4 уравнения: два уравнения по первому закону Кирхгофа для любых двух узлов и два уравнения по второму закону Кирхгофа для любых двух независимых контуров, не содержащих источников тока (напряжение на их зажимах неизвестно). Получаем систему уравнений.

$$\begin{gathered} -J_{к1} + I_2 - J_{к3} + I_5 - I_6 = 0; \\ J_{k1} - I_2 + J_{к3} - I_4 = 0; \\ R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_4 I_4 = 0; \\ R_5 I_5 = E_6, \end{gathered}$$

из которой ясно, для каких узлов и каких контуров записаны уравнения.

Решая совместно приведенные уравнения, получаем:

$$I_2 = 1{,}5 \text{ А}; \; I_4 = 0{,}5 \text{ А}; \; I_5 = 1 \text{ А}; \; I_6 = 0{,}5 \text{ А}.$$

При определении мощности источника тока необходимо знать напряжение на его зажимах. Определим напряжение U_{da} на зажимах источника тока $J_{к1}$:

$$\varphi_d = \varphi_a + R_2 I_2 + R_1 J_{к1},$$

откуда $U_{da} = \varphi_d - \varphi_a = R_2 I_2 + R_1 J_{к1} = 2{,}5$ В.

Аналогично находим

$$U_{ea} = \varphi_e - \varphi_a = R_2 I_2 + E_3 + R_3 J_{к3} = 3{,}5 \text{ В}.$$

Теперь составляем уравнение баланса мощностей:

$$E_6 I_6 - E_3 J_{к3} + U_{da} J_{к1} + U_{ea} J_{к3} = J^2_{к1} R_1 + I^2_2 R_2 + J^2_{к3} R_3 + I^2_4 R_4 + I^2_5 R^5,$$

которое дает тождество 5,5 = 5,5.

Следует отметить, что мощность источника E_3 отрицательна: данный источник потребляет энергию. Следует также обратить внимание на расчет мощностей источников тока.

Задача 1.7. Определить потенциал точки «*a*» в цепи, изображенной на рис. 1.12, $E_1 = 4$ В; $E_2 = 6$ В; $J_к = 3$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2$ Ом. Ответ: –4 В.

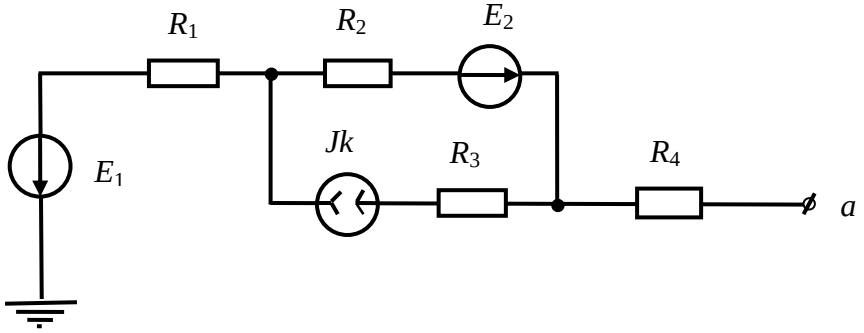


Рис. 1.12

Задача 1.8. Определить напряжение на зажимах электрической машины, работающей в режиме генератора при токе 25 А. ЭДС машины 115 В, внутреннее сопротивление $r_0 = 0{,}2$ Ом.

Ответ: 110 В.

Задача 1.9. Электрическая машина предыдущей задачи работает в двигательном режиме, потребляя ток 25 А. Определить

напряжение на ее зажимах.

Ответ: 120 В.

Задача 1.10. Определить показания вольтметра в цепи (рис. 1.13), если $J_к = 3$ А; $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 1$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $R_4 = 8$ Ом.

Ответ: 6 В.

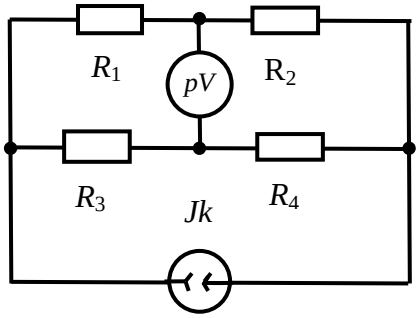


Рис. 1.13

Задача 1.11. В цепи (рис. 1.14) вольтметр показывает 8 В. Определить подведенное к цепи напряжение, если $R_1 = R_2 = R_5 = 8$ Ом; $R_3 = 12$ Ом; $R_4 = 7$ Ом.

Ответ: 116 В.

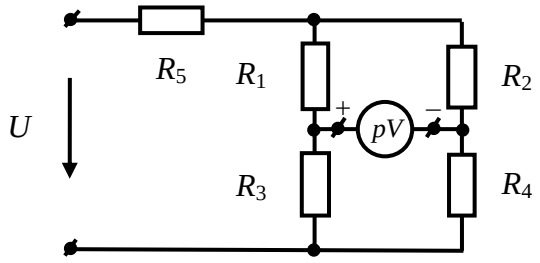


Рис. 1.14

Задача 1.12. Методом уравнений Кирхгофа определить токи в цепи, изображенной на рис. 1.5а.

Задача 1.13. Решить задачу 1.2 методом уравнений Кирхгофа.

Задача 1.14. Решить задачу 1.3 методом уравнений Кирхгофа.

Литература: [1, §2.5 – 2.11; 2, §1.9, 1.13; 8, §2.7 – 2.11]

Занятие 2

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Цель занятия: изучение и закрепление основных методов расчета сложных цепей постоянного тока: метода контурных токов, метода узловых потенциалов, метода эквивалентного генератора.

Основные определения и соотношения

Метод контурных токов. В данном методе в качестве неизвестных выступают так называемые контурные токи, одинаковые для всех участков контура. Истинные токи (токи в ветвях) определяются алгебраическим сложением контурных токов. Необходимое количество уравнений для определения токов в цепи равно

$$N_{конт} = m - (n - 1),$$

где m – число ветвей; n – число узлов схемы.

При решении задач рекомендуется записывать уравнения в канонической (стандартной) форме.

Задача 2.1. Методом контурных токов найти токи в цепи (рис. 2.1), где $E_1 = 52$ В; $E_2 = 48$ В; $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 8$ Ом; $R_3 = 10$ Ом.

Решение. В данной цепи два независимых контура. Каноническая система уравнений для определения двух неизвестных контурных токов имеет вид:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22} \end{cases}$$

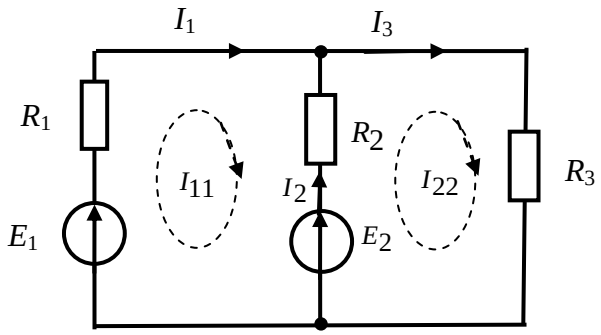


Рис. 2.1

Если выбрать независимые контуры так, как показано на рис. 2.1, то $R_{11} = R_1 + R_2 = 4 + 8 = 12$ Ом – полное сопротивление первого контура: это сумма всех сопротивлений, по которым протекает контурный ток I_{11};

$R_{22} = R_2 + R_3 = 8 + 10 = 18$ Ом – полное сопротивление второго контура;

$R_{12} = R_{21} = -R_2 = -8$ Ом – смежное сопротивление 1 и 2 контуров, которое положительно, если контурные токи I_{11} и I_{22} протекают по нему в одном направлении; в противном случае оно отрицательно.

$E_{11} = E_1 - E_2 = 52 - 48 = 4$ В – контурная ЭДС 1-го контура; это алгебраическая сумма ЭДС, входящих в 1 контур;

$E_{22} = E_2 = 48$ В – контурная ЭДС второго контура.

Со знаком «+» берется ЭДС, совпадающая по направлению с током контура, для которого составляется уравнение.

После подстановки числовых значений имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 12 \cdot I_{11} - 8 \cdot I_{22} = 4 \\ -8 \cdot I_{11} - 18 \cdot I_{22} = 48, \end{cases}$$

решая которую получаем:

$$I_{11}=3 \text{ А}; \quad I_{22}=4 \text{ А}.$$

Истинные токи в ветвях:

$$I_1 = I_{11} = 3 \text{ А}; I_3 = I_{22} = 4 \text{ А}; I_2 = I_{22} - I_{11} = 1 \text{ А}.$$

Задача 2.2. Решить задачу 1.1 методом контурных токов.

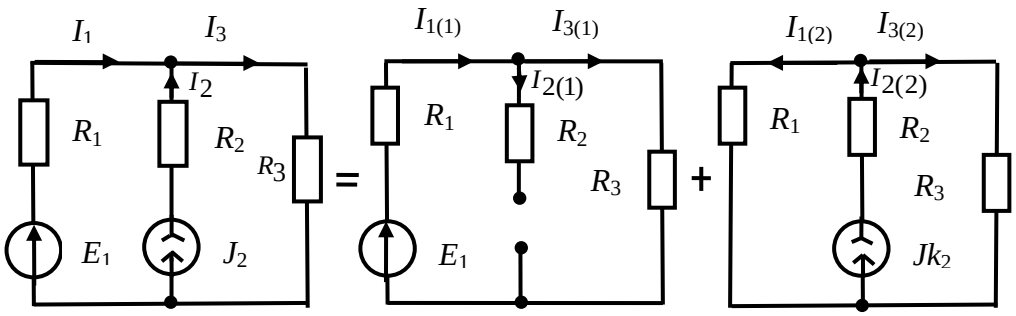
Задача 2.3. Решить задачу 1.2 методом контурных токов.

Задача 2.4. Решить задачу 1.3 методом контурных токов.

Метод наложения. Метод наложения заключается в том, что действительный, истинный ток в любой ветви цепи равен алгебраической сумме частных токов, вызываемых в данной ветви действием каждого из источников в отдельности. При расчете токов в цепи от действия какого-либо одного источника остальные источники должны быть исключены, но их внутренние сопротивления оставлены. Поскольку метод наложения применим лишь для линейных цепей, то этим методом нельзя определять мощность как сумму мощностей от частичных токов, так как мощность является квадратичной функцией тока.

Задача 2.5. Методом наложения определить токи в ветвях цепи (рис. 2.2, а), где E_1 = 16 В; $I_{к2}$ = 2 А; $R_1 = R_2 = R_3$ = 2 Ом.

Решение. Истинные токи в цепи (рис. 2.2,а) найдем как алгебраическую сумму токов в цепях рис. 2.2,б, 2.2в.



а) б) в)

Рис.2.2

Для цепи (рис. 2.2,б), где действуют только ЭДС E_1, а источник $J_{к2}$ отключен (вторая ветвь оказалась разомкнутой, так как внутреннее сопротивление источника тока бесконечно велико),

находим

$$I_{1(1)} = I_{3(1)} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{16}{4} = 4\text{A};$$

$$I_{2(1)} = 0.$$

Для цепи (рис. 2.2, в), где действует только источник тока J_{k2}, а источник ЭДС E_1 исключен (на месте источника ЭДС оказался короткозамкнутый участок, так как внутреннее сопротивление источника ЭДС равно нулю) находим по формуле разброса токов в параллельных ветвях:

$$I_{1(2)} = I_{2(2)} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 2\frac{2}{2+2} = 1\text{ A};$$

$$I_{3(2)} = I_{2(2)} - I_{1(2)} = 1\text{ A}.$$

Истинные токи в ветвях цепи находим как алгебраическую сумму частичных токов:

$$I_1 = I_{1(1)} - I_{1(2)} = 4 - 1 = 3\text{ A};\ I_2 = -I_{2(1)} + I_{2(2)} = 0 + 2 = 2\text{ A};$$

$$I_3 = I_{3(1)} + I_{3(2)} = 4 + 1 = 5\text{ A}.$$

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении R_3

$$P_3 = I^2_3 R_3 = 5^2 \cdot 2 = 50\text{ Вт},$$

но

$$P_3 \neq P_{3(1)} + P_{3(2)} = I^2_{3(1)} R_3 + I^2_{3(2)} R_3 = 4^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2 = 34\text{ Вт}.$$

Задача 2.6. Методом наложения определить ток I_1 в цепи (рис. 2.1), где $E_1 = 2$ В; $E_2 = 6$ В; $R_1 = R_2 = 1$ Ом; $R_3 = 2$ Ом.

Ответ: 1,2 А.

Задача 2.7. Методом наложения определить показание амперметра в цепи (рис. 2.3), где $E_1 = E_2 = 4$ В; $J_{к3} = 2$ А; $R_1 = R_3 = R_4 = 1$ Ом.

Ответ: 10 А.

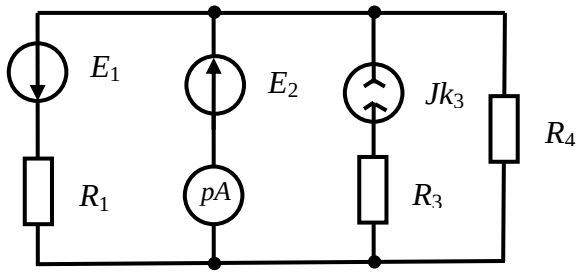


Рис. 2.3

Линейные соотношения в электрических цепях. Если в линейной электрической цепи изменяется ЭДС или сопротивление в какой-либо ветви, то две любые величины (ток и напряжения) двух любых ветвей связаны друг с другом линейными соотношениями вида $y = a + bx$.

Задача 2.8. В цепи (рис. 2.4) определить показание амперметра A_1 при некотором значении сопротивления R_3 на основании опытов, результаты которых приведены в таблице.

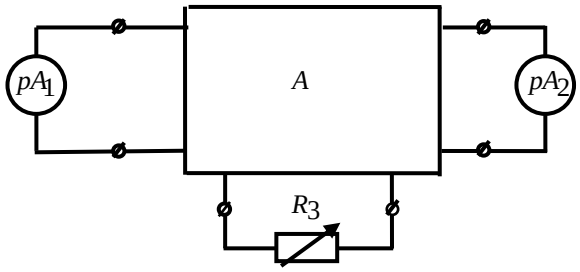


Рис. 2.4

R_3	$R_3' = \infty$	R_3''	R_3'''
I_1	1	2	?
I_2	5	4	2

Решение. На основании результатов опытов, приведенных в таблице, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1' = a + bI_2' \\ I_1'' = a + bI_2'' \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 = a + 5b \\ 2 = a + 4b, \end{cases}$$

решая которую определим коэффициенты: a = 6 А, b = –1 при $R_3 = R_3'''$ получаем

$$I_1 = 6 - I_2 = 6 - 2 = 4 \text{ А}.$$

Задача 2.9. В цепи предыдущей задачи при некотором значении R_3 и при E_3=0 амперметры показали: первый 2 А; второй 4 А. При включении в третью ветвь источника ЭДС E_3 оба амперметра стали показывать 3 А. Если изменить полярность источника, то первый амперметр покажет I А. Каково показание второго амперметра?

Ответ: 5 А.

Метод узловых потенциалов. В данном методе на первом этапе расчета в качестве неизвестных выступают потенциалы узловых точек схемы – узловые потенциалы. Необходимое количество уравнений для их определения равно

$$N_{\text{узл}} = n - 1,$$

где n – количество узлов в цепи.

При решении задач рекомендуется записывать уравнения в канонической форме.

После определения потенциалов узлов токи в ветвях рассчитываются по закону Ома.

Задача 2.10. В цепи (рис. 2.5) определить токи в ветвях методом узловых потенциалов.

Дано: E_1 = 12 В; $E_2 = E_3$ = 3 В; E_5 = 2В; E_4 = 30 В; $J_к$ = 2 А; $R_1 = R_4 = R_5 = R_6$ = 2 Ом; $R_2 = R_3 = 1$Ом.

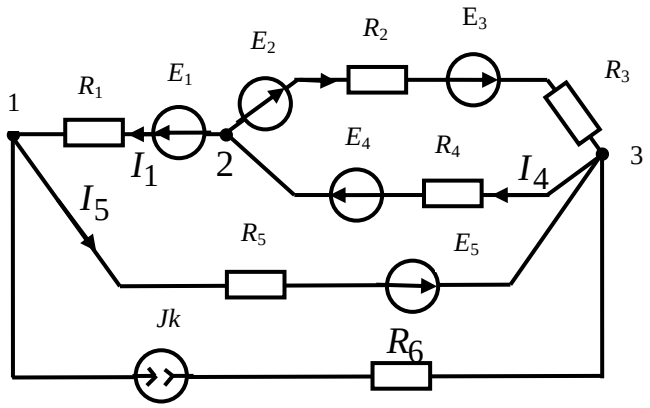


Рис. 2.5

Решение. В цепи три узла. Приняв потенциалы одного из узлов равным нулю ($\varphi_3 = 0$), составим каноническую систему уравнений для определения потенциалов двух остальных узлов:

$$\begin{cases} g_{11}\varphi_1 + g_{12}\varphi_2 = I_1^{(y)} \\ g_{21}\varphi_1 + g_{22}\varphi_2 = I_2^{(y)} \end{cases}$$

В этих уравнениях

$$g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_0 + R_6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty + 2} = 0{,}5 + 0{,}5 + 0 = 1\ \text{Ом}$$

– сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся в первом узле;

$$g_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4} = 1{,}5 \quad 1/\text{Ом}$$

– сумма проводимостей всех ветвей, сходящихся во втором узле;

$$g_{12} = g_{21} = -\frac{1}{R_1} = -0{,}5 \quad 1/\text{Ом}$$

– взятая со знаком «–» сумма проводимостей ветвей, соединяющих 1 и 2 узлы:

$$I_1^{(y)} = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_5}{R_5} - J_k = \frac{12}{2} - \frac{2}{2} - 2 = 3\text{A}$$

расчетный узловой ток первого узла;

$$I_2^{(y)} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2 + E_3}{R_2 + R_3} + \frac{E_4}{R_4} = -\frac{12}{2} - \frac{6}{2} + \frac{30}{2} = 6\text{A}$$

расчетный узловой ток второго узла.

После подстановки числовых значений имеет систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1 - 0{,}5\varphi_2 = 3 \\ -0{,}5\varphi_1 - 1{,}5\varphi_2 = 6\,. \end{cases}$$

Откуда φ_1=6 В; φ_2=6 В.

Токи в ветвях находим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{6 - 6 + 12}{2} = 6\text{A}$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_2 + E_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 - 0 + 3 + 3}{1 + 1} = 6\text{A}$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_4}{R_4} = \frac{0 - 6 + 30}{2} = 12\text{ A}$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_5}{R_5} = \frac{6 - 0 + 2}{2} = 4\text{ A}$$

Для проверки правильности составления системы уравнений и ее решения, запишем уравнение по второму закону Кирхгофа

$$R_1 I_1 + R_5 I_5 - (R_2 + R_3) I_2 = E_1 + E_5 - E_2 - E_3$$

или $2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 12 + 2 - 3 - 3$ и получаем тождество $8 = 8$.

Задача 2.11. Методом узловых потенциалов определить токи в ветвях цепи (рис. 2.6), если $E_1 = E_5 = 4$ В; $J_к = 2$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ Ом.

Ответ: $I_1 = 0$; $I_3 = 1$ А; $I_4 = 3$ А; $I_5 = 1$ А.

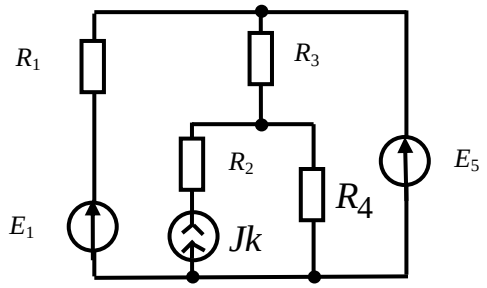


Рис. 2.6

Задача 2.12. Методом узловых потенциалов определить токи в ветвях цепи (рис. 2.7), если $E_6 = 48$ В; $J_к = 4$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $R_3 = 4$ Ом; $R_4 = 6$ Ом; $R_5 = 12$ Ом.

Ответ: $I_2 = 2{,}67$А; $I_3 = 6$ А; $I_4 = 6{,}67$ А; $I_5 = 2A$; $I_6 = 8{,}67A$.

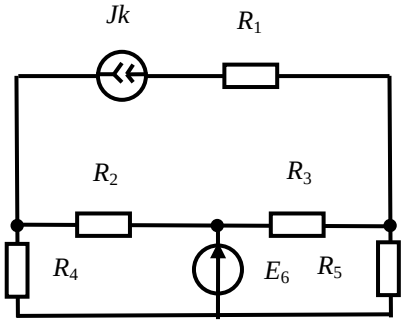


Рис. 2.7

Задача 2.13. Решить задачу 1.1 методом узловых потенциалов.

Задача 2.14. Методом узловых потенциалов определить токи в цепи (рис. 2.8), если $E_1 = 8$ В; $E_3 = 12$ В; $R_1 = R_4 = 1$ Ом; $R_2 = R_5 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом.

Ответ: 3,9 А; 0,22 А; 2,49 А; 4,1 А; 2,27 А.

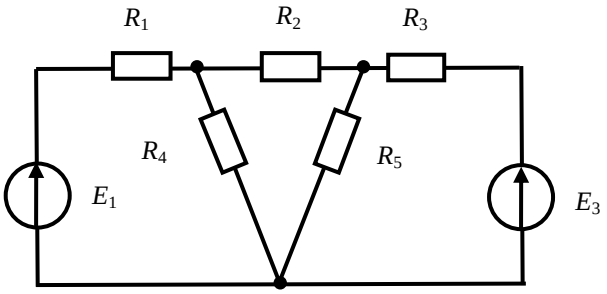


Рис. 2.8

Метод двух узлов. Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов, когда цепь содержит только два узла – «1» и «2».

Искомым на первом этапе является напряжение между узлами 1 и 2 цепи

$$U_{12} = \frac{I_1^{(y)}}{g_{11}} = \frac{\Sigma \mathrm{E_i g_i} + \Sigma \mathrm{J_k}}{\Sigma \mathrm{g_i}},$$

где Σg – сумма проводимостей всех ветвей цепи; ΣEg – алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей на проводимости этих ветвей ($Eg > 0$, если E направлена к узлу 1; $Eg < 0$, если E направлена к узлу 2); $\Sigma J_к$ – алгебраическая сумма токов источников тока ($J_к > 0$, если $J_к$ направлен к узлу 1; $J_к < 0$, если J_k направлен к узлу 2).

Токи в ветвях определяются при найденном узловом напряжении по закону Ома.

Задача 2.15. Методом двух узлов определить токи в цепи (рис. 2.9), если $E_1 = E_2 = 4$ В; $J_к = 6$ А; $R_1 = R_4 = 2$ Ом; $R_2 = R_3 = 1$ Ом;

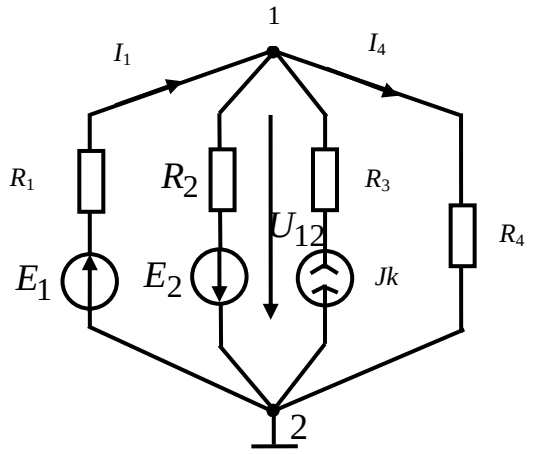


Рис. 2.9

Решение. Узел 2 заземляем. Узловое напряжение

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 - 0 = \varphi_1$$

$$U_{12} = \varphi_1 = \frac{I_1^{(y)}}{g_{11}} = \frac{\Sigma E_i g_i + \Sigma J_k}{\Sigma g_i} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_2}{R_2} + J_k}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}} = 2\,\text{В};$$

токи в ветвях

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R_1} = \frac{4-2}{2} = 1\text{А};$$

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{12}}{R_2} = \frac{4+2}{1} = 6\text{А};$$

$$I_4 = \frac{U_{12}}{R_4} = \frac{2}{2} = 1A.$$

Задача 2.16.

Методом двух узлов определить токи в цепи (рис. 2.10), если $E_1 = E_2 = E_4 = 4$ В; $J_{к5} = 1$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 1$ Ом.

Ответ: 0,8 А, 4 А, 11 А.

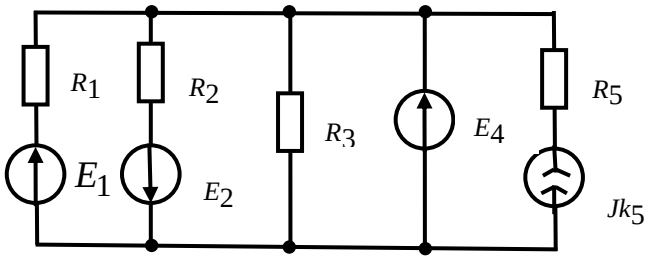


Рис. 2.10

Задача 2.17. Решить задачу 2.1 методом двух узлов.

Задача 2.18. Решить задачу 2.5 методом двух узлов.

Задача 2.18. Решить задачу 2.7 методом двух узлов.

Метод эквивалентного генератора. Данный метод целесообразно применять при расчете тока в одной из ветвей цепи. Относительно этой ветви, которая подключается к цепи, например, в точках «*a*» и «*b*», всю оставшуюся часть цепи можно представить как некоторый эквивалентный генератор с ЭДС $E_э$, и внутренним сопротивлением $R_{оэ}$. ЭДС эквивалентного генератора равна напряжению между точками «a» и «b» в режиме холостого хода (при отключенной ветви) $E_э = U_{abxx}$, а внутреннее сопротивление эквивалентного генератора равно входному сопротивлению оставшейся цепи между зажимами «*a*» и «*b*» при исключенных источниках (*E* и *I*), но оставленных их внутренних сопротивлениях.

$$R_{оэ} = R_{bxab}$$

Искомый ток ветви определяется по закону Ома.

$$I = \frac{E_э}{R_{оэ} + R} = \frac{U_{abxx}}{R_{bxab} + R},$$

если в данной ветви нет источника ЭДС

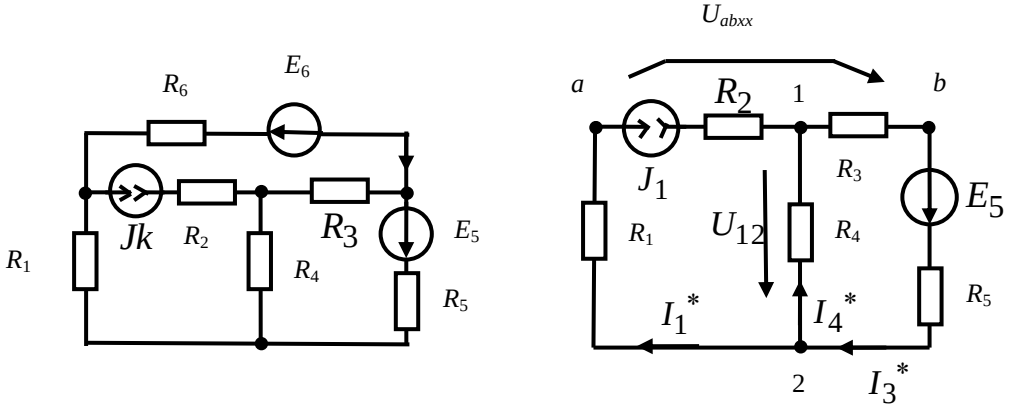
$$I = \frac{E_э \pm E}{R_{оэ} + R} = \frac{U_{abxx} \pm E}{R_{bxab} + R},$$

и

если в данной ветви имеется источник ЭДС E, направление действия которого совпадает («+») или не совпадает («–») с направлением тока от зажима «*a*» к зажиму «*b*».

Задача 2.19. Методом эквивалентного генератора определить ток I_6 в цепи (рис. 2.11а), если E_5 = 72 В; E_6 = 12 В; $I_к$ = 3 А; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$ = 6 Ом; R_6 = 2 Ом.

Решение. Исключим из цепи ветвь E_6, R_6. В оставшейся цепи необходимо (рис. 2.11,б) определить напряжение U_{abxx} между точками «*a*» и «*b*». Для этого нужно предварительно найти токи в этой цепи. Применим метод двух узлов (рис. 2.11,б).



а) б)

Рис. 2.11

$$U_{12} = \frac{I_1^{(y)}}{g_{11}} = \frac{\Sigma E g + \Sigma J_k}{\Sigma g} = \frac{\dfrac{-E_5}{R_3 + R_5} + J_k}{\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_3 + R_5}} = \frac{-\dfrac{72}{6+6} + 3}{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6+6}} =$$

$$= \frac{-6+3}{\dfrac{1}{4}} = -12\,\text{В};$$

$$I_3^* = \frac{U_{12} + E_5}{R_3 + R_5} = \frac{-12 + 75}{6+6} = 5\ \text{А};$$

$$I_4^* = \frac{U_{21}}{R_4} = \frac{-U_{12}}{R_4} = \frac{-(-12)}{6} = 2\text{A}.$$

$$\varphi_a = \varphi_b + E_5 - I_3 R_5 - J_к R_1,$$

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab\,xx} = E_5 - I_5 R_5 - J_к R_1 = 72 - 5\cdot 6 - 3\cdot 6 = 24 \text{ В} = \text{Е}_э.$$

Входное сопротивление пассивной цепи между зажимами «*a*» и «*b*» находим по схеме, представленной на рис. 2.12:

$$R_{\text{bxab}} = R_1 + \frac{R_5(R_4 + R_3)}{R_5 + R_4 + R_3} = 6 + \frac{6\cdot(6+6)}{6+6+6} =$$
$$= 6 + 4 = 10 \text{ Ом} = R_{оэ}.$$

По отношению к ветви E_6, R_6 вся остальная часть цепи «ведет себя» как эквивалентный генератор (рис. 2.13), параметры которого $E_э = U_{abxx} = 24$ В; $R_{оэ} = R_{bxab} = 10$ Ом.

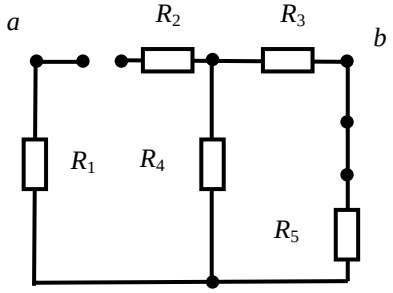


Рис. 2.12

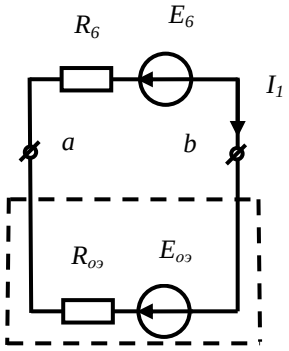


Рис. 2.13

Искомый ток $I_6 = \dfrac{E_э - E_6}{R_{оэ} + R_6} = \dfrac{24-12}{10+2} = 1\text{A}$.

Задача 2.20. Методом эквивалентного генератора определить ток I_6 в цепи (рис. 2.14), если $E_4 = 36$ В; $E_6 = 22$ В; $Jk = 9$ А; $R_1 = 8$ Ом; $R_2 = 6$ Ом; $R_3 = 4$ Ом; $R_4 = 2$ Ом; $R_5 = 1$ Ом; $R_6 = 3$ Ом.

Ответ: 10 А.

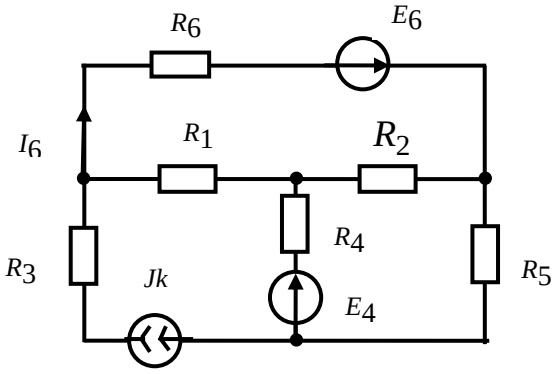


Рис. 2.14

Задача 2.21. Методом эквивалентного генератора определить ток в шестой ветви (рис. 2.15), если $E_3 = 72$ В; $Jk = 9$ А; $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = R_5 = 2$ Ом; $R_3 = R_6 = 1$ Ом

Ответ: 14 А.

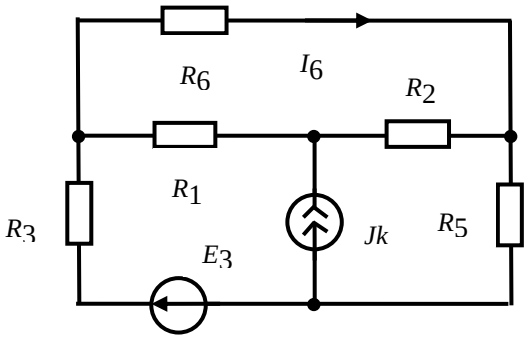


Рис. 2.15

Задача 2.22. Методом эквивалентного генератора определить ток I_6 в цепи (рис. 2.16), если $E_4 = 50$ В; $E_5 = 100$ В; $E_6 = 6{,}67$ В;

$R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом; $R_4 = R_5 = 5$ Ом; $R_6 = 4$ Ом.

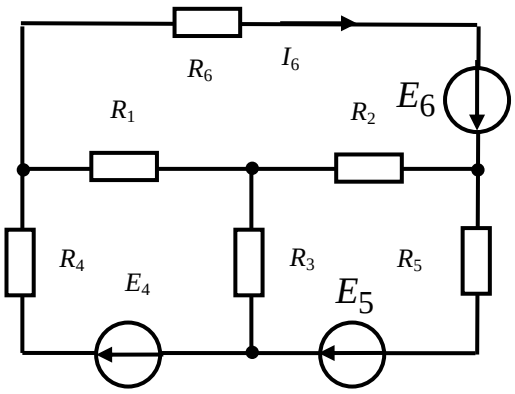


Рис. 2.16

Решение. Исключим из цепи шестую ветвь. Для определения напряжения $U_{ab\,xx}$ в цепи рис. 2.17 найдем токи методом контурных токов. Составим стандартную систему уравнений.

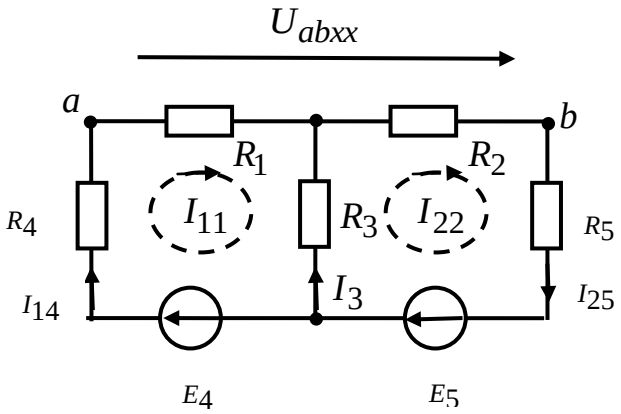


Рис. 2.17

$$\begin{cases} I_{11}\,R_{11} + I_{22}\,R_{12} = E_{11} \\ I_{11}\,R_{21} + I_{22}\,R_{12} = E_{22} \end{cases}$$

$R_{11} = R_1 + R_3 + R_4 = 25$ Ом;
$R_{22} = R_2 + R_5 + R_3 = 25$ Ом;
$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -10$ Ом;
$E_{11} = E_4 = 50$ В,
$E_{22} = E_5 = 100$ В.

Решив систему уравнений, получим: $I_{11} = 4{,}29$ А, $I_{22} = 5{,}72$ А.

Токи в ветвях: $I_{14} = I_{11} = 4{,}29$ А, $I_{25} = I_{22} = 5{,}72$ А,

$I_3 = I_{22} - I_{11} = 1{,}43$ А.

Напряжение холостого хода между точками «*a*» и «*b*»

$$U_{ab\,xx} = I_{14} R_1 + I_{25} R_2 = 4{,}29 \cdot 10 + 5{,}72 \cdot 10 = 100 \text{ В} = E_э.$$

Для определения входного сопротивления пассивного двухполюсника относительно зажимов «*a*» и «*b*» необходимо выполнить преобразование «треугольника» сопротивлений рис. 2.18 в эквивалентную «звезду» рис. 2.19.

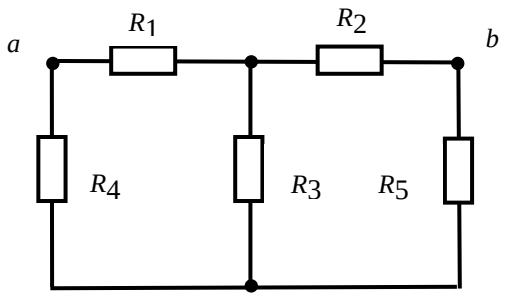


Рис. 2.18

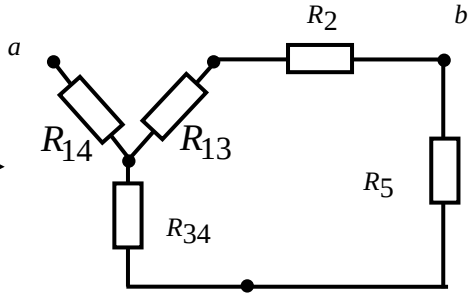


Рис. 2.19

$$R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4 + R_3} = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5 + 10} = 2 \text{ Ом}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_4 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{25} = 4 \text{ Ом}$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_4 + R_3} = \frac{10 \cdot 5}{25} = 2 \text{ Ом}$$

Искомый ток

$$I_6 = \frac{E_э + E_6}{R_{оэ} + R_6} = \frac{100 + 6.67}{6.67 + 4} = \frac{106.67}{10.67} \approx 10 \text{ А}$$

Задача 2.23. Методом эквивалентного генератора определить ток в ветви источника E_4 цепи задачи 2.16.

Задача 2.24. Методом эквивалентного генератора определить показание амперметра в цепи задачи 1.3.

Задача 2.25. Методом эквивалентного генератора опреде-

лить ток в сопротивлении R_3 цепи на рис. 2.8.

Задача 2.26. Методом эквивалентного генератора определить ток в сопротивлении R_1 цепи на рис. 2.11,а.

Ответ: $I_1 = 2\ A$.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод контурных токов?
2. В чем сущность метода узловых потенциалов?
3. В каких случаях целесообразно применять метод узловых потенциалов?
4. В чем заключается метод контурных токов?
5. В чем заключается метод наложения?
6. В каких случаях целесообразно применять метод эквивалентного генератора?

Литература: [1, § 2.13 – 2.22; 2, 7.1-7.9; 8, § 2.13 – 2.22].

Занятие 3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий цепей переменного тока, применение аналитического метода для расчета цепей переменного тока.

Основные положения и соотношения

1. Мгновенное значение величины, синусоидально изменяющейся с течением времени.

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi) = A_m \sin\left[\omega\left(t + \frac{\psi}{\omega}\right)\right], \qquad (3.1)$$

где A_m – максимальное значение, или амплитуда;

$\omega t + \psi$ – фаза (фазовый угол);

ψ – начальная фаза (начальный фазовый угол);

$\frac{\psi}{\omega}$ – начальный фазовый сдвиг;

ω – угловая частота.

Период T, угловая частота ω и частота f связаны соотношением

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \qquad f = \frac{1}{T}.$$

По уравнению (3.1) на рис. 3.1 построены синусоида и соответствующая векторная диаграмма (вектор A_m вращается с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки).

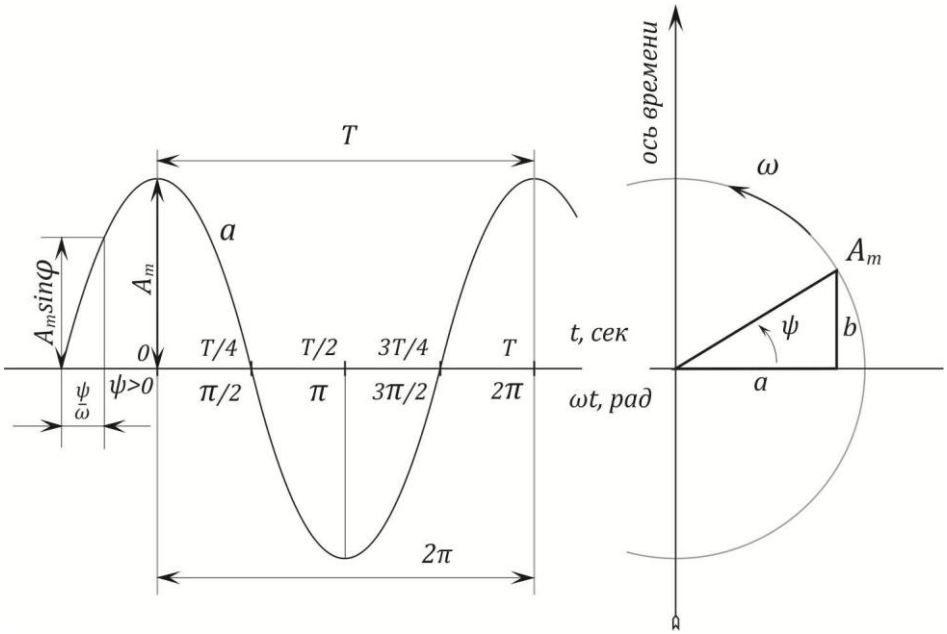


Рис. 3.1

2. Действующие значения синусоидально изменяющихся тока, э.д.с. и напряжения соответственно равны:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m, \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

3. Средние значения синусоидально изменяющегося тока, э.д.с. и напряжения за положительную полуволну:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637 I_m, \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}, \qquad U = \frac{2}{\pi} U_m.$$

Среднее значение синусоидально изменяющейся величины $a = A_m \sin(\omega t + \psi)$ за целый период равно нулю.

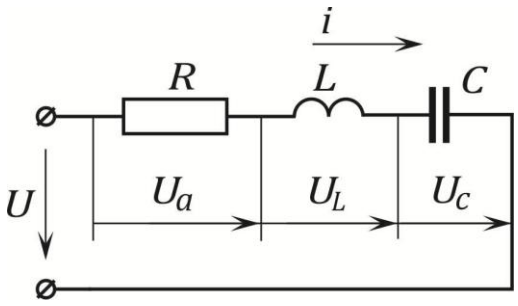


Рис. 3.2

4. **Второй закон Кирхгофа.** Уравнение второго закона Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и тока, проходящих в одноконтурной цепи, состоящей их последовательно соединенных активного сопротивления *R*, индуктивности *L* и емкости *C* (рис. 3.2), имеет вид

$$u = u_a + u_L + u_C \ ,$$

где $u_a = iR$ – падение напряжения на активном сопротивлении;

$u_L = L\frac{di}{dt}$ – падение напряжения на индуктивности, причем $u_L = -e_L$, где э.д.с. самоиндукции $e_L = -L\frac{di}{dt}$,

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u_L dt + i(0),$$

u_c – падение напряжения на емкости, причем

$$i = C\frac{du_c}{dt}, \qquad u_c = \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_C(0).$$

5. **Цепь из последовательно соединенных элементов.** Если цепь, состоящая из последовательно соединенных *R*, *L* и *C*, включена на синусоидально изменяющиеся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \qquad (3.2)$$

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad -90^o \le \varphi \le +90^o.$$

Соотношение (3.2) является уравнением закона Ома для амплитудных значений напряжения и тока. Закон Ома для действующих значений напряжения и тока имеет вид

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$\omega L = x_L$ – индуктивное сопротивление;
$\frac{1}{\omega C} = x_C$ – емкостное сопротивление;
$\omega L - \frac{1}{\omega C} = x = x_L - x_C$ – реактивное сопротивление;
$z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + x^2}$ – полное сопротивление;

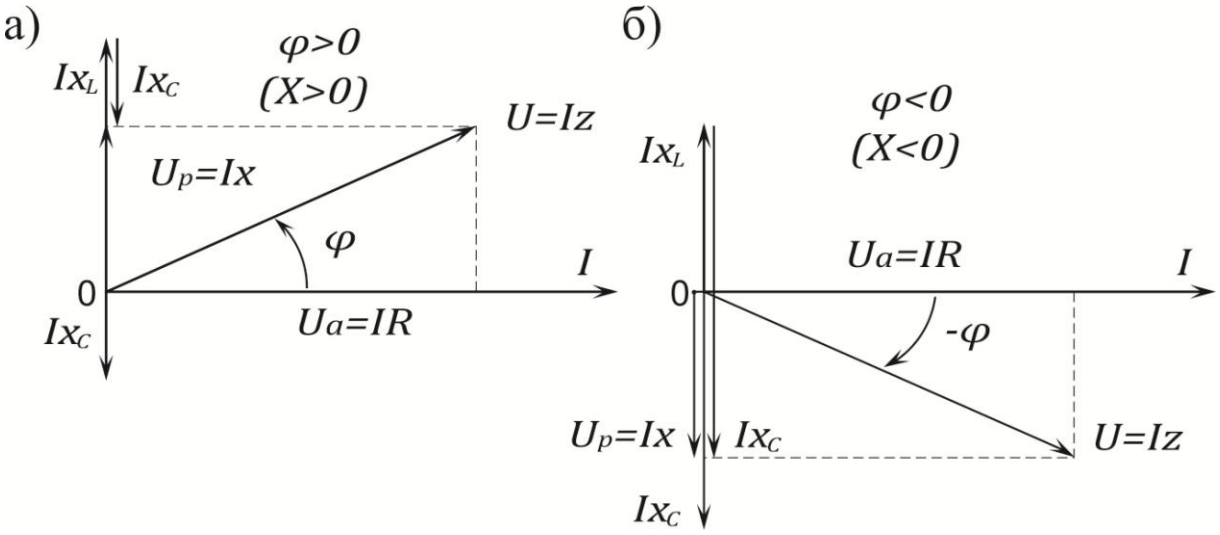


Рис. 3.3

6. **Треугольник напряжений.** Приложенное к цепи напряжение ***U*** может быть разложено на составлявшие (рис. 3.3, а и б): $U_a = IR$ – активную, совпадающую по фазе с током, и $U_p = Ix$ – реактивную; вектор U_p опережает вектор тока *I* на четверть периода, если в цепи преобладает индуктивное сопротивление $x = x_L - x_C > 0$ (рис. 3.3, а); U_p отстает от *I* на четверть периода, если в цепи преобладает емкостное сопротивление $x = x_L - x_C < 0$ (рис. 3.3, б);

$$U_a = IR = U\cos\varphi;$$

$$U_p = Ix = U\sin\varphi;$$

$$U = \sqrt{{U_a}^2 + {U_p}^2} = Iz.$$

7. **Соотношения, связывающие $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и $tg\varphi$ через сопротивления цепи.** Из треугольника сопротивлений (рис. 3.4, а и б) следуют соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{R}{z}, \qquad \sin\varphi = \frac{x}{z}, \qquad tg\varphi = \frac{x}{R}.$$

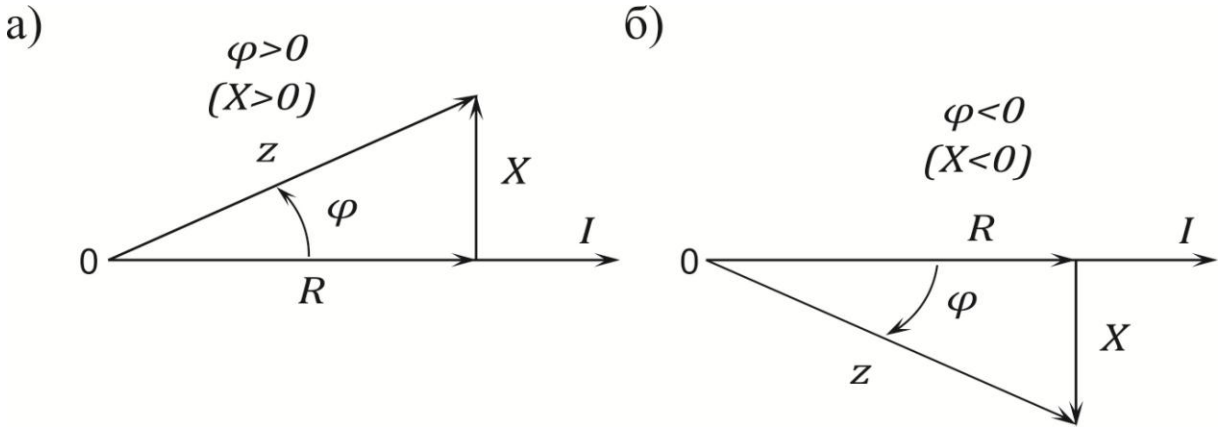


Рис. 3.4

8. **Треугольник токов.** Ток *I*, проходящий в цепи, может быть разложен на две составляющие (рис. 3.5): I_a – активную, совпадающую по фазе с приложенным напряжением, и I_p – реактивную;

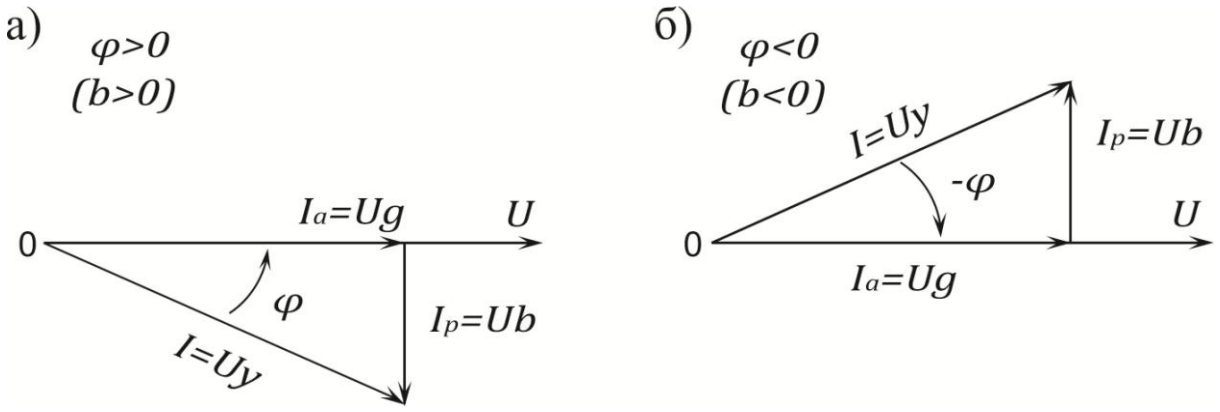


Рис. 3.5

I_p отстает от напряжения $\dot{U}$ на четверть периода, когда в цепи преобладает индуктивное сопротивление $x = x_L - x_C > 0$ (рис. 3.5, а) и опережает $\dot{U}$ на четверть периода при преобладании емкостного сопротивления $x = x_L - x_C < 0$ (рис. 3.5, б):

$$I_a = I\cos\varphi = Ug;$$

$$I_p = I\sin\varphi = Ub;$$

$$I = \sqrt{{I_a}^2 + {I_p}^2} = Uy$$

Цепь, состоящая из последовательно соединенных активного R и реактивного сопротивлений $x = x_L - x_C$ (см. рис. 3.2), может быть заменена эквивалентной схемой, состоящей из параллельно соединенной активной проводимости g и реактивной проводимости b (рис. 3.6, а). Реактивная проводимость может быть положительной величиной ($b > 0$), если цепь имеет индуктивный характер $b = -b_L = \frac{1}{\omega L_п}$ (рис. 3.6, б), и может быть отрицательной величиной ($b < 0$), если цепь имеет емкостный характер $b = -b_C = -\omega C_п$ (рис. 3.6, в).

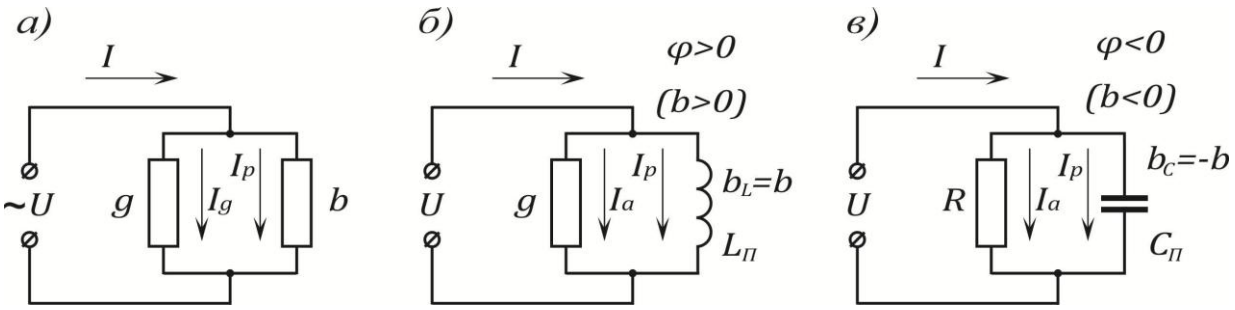


Рис. 3.6

9. **Треугольник проводимостей** (рис. 3.7, а и б) подобен треугольнику токов (см. рис. 3.5):

$$cos\varphi = \frac{g}{y}, \qquad sin\varphi = \frac{b}{y}, \qquad tg\varphi = \frac{b}{g}.$$

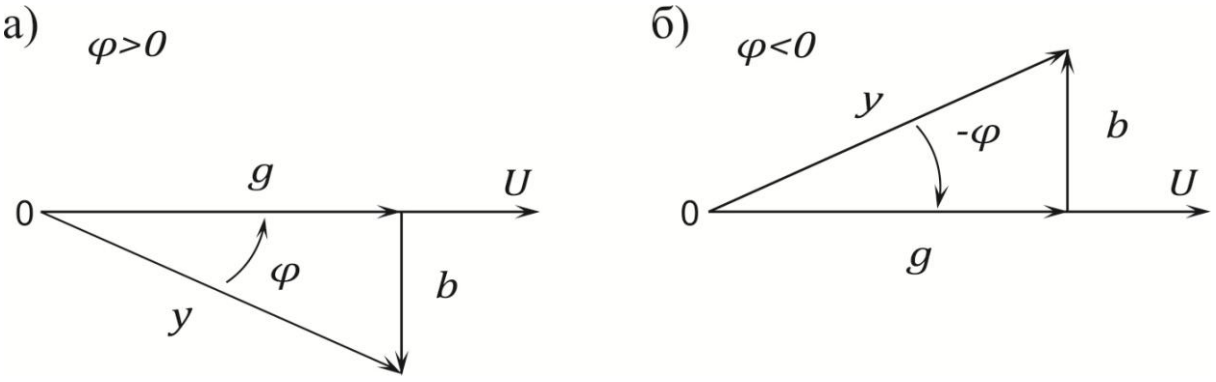


Рис. 3.7

10. **Переход от последовательной схемы** (см. рис. 3.2) **к эквивалентной параллельной схеме** (см. рис. 3.6) осуществляется по формулам:

$$\left.\begin{aligned} g = \frac{R}{R^2 + x^2} = \frac{R}{z^2}, \qquad b = \frac{x}{R^2 + x^2} = \frac{x}{z^2}; \\ y = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{z}. \end{aligned}\right\}$$

При переходе от параллельной схемы (см. рис. 3.6) **к эквивалентной последовательной** (см. рис. 3.2) ее параметры определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} R = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{y^2}, \qquad x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{y^2}; \\ z = \sqrt{R^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + b^2}} = \frac{1}{y}. \end{aligned}\right\}$$

11. **Мощности.** Активная, реактивная и полные мощности определяются по формулам:

$$P = I^2 R = UI\cos\varphi;$$

$$Q = I^2 x = UI\sin\varphi;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI = I^2 z = U^2 y.$$

Для всякой электрической цепи справедливы следующие балансы мощностей:

$$\left.\begin{aligned} \sum P_{\text{И}} = \sum P_{\text{П}}; \\ \sum Q_{\text{И}} = \sum Q_{\text{П}}. \end{aligned}\right\},$$

где $P_{\text{И}}$ и $Q_{\text{И}}$ – мощность источников,

$P_{\text{П}}$ и $Q_{\text{П}}$ – мощности потребителей.

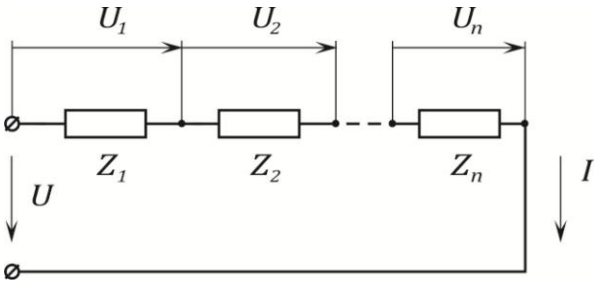


Рис. 3.8

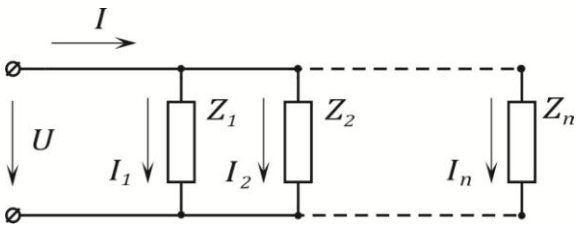


Рис. 3.9

12. **Последовательное соединение сопротивлений.** При последовательном соединении сопротивлений (рис. 3.8)

$$\left.\begin{aligned} U_a &= \sum_{k=1}^{n} U_{ka} = I \sum_{k=1}^{n} R_k ; \\ U_p &= \sum_{k=1}^{n} U_{kp} = I \sum_{k=1}^{n} x_k ; \\ U &= \sqrt{{U_a}^2 + {U_p}^2} = I \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} . \end{aligned}\right\}$$

Сдвиг между общим напряжением U и током I:

$$tg\varphi = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$$

13. **Параллельное соединение сопротивлений.** При параллельном соединении сопротивлений (рис. 3.9):

$$\left.\begin{aligned} I_a &= \sum_{k=1}^{n} I_{ka} = U \sum_{k=1}^{n} g_k ; \\ I_p &= \sum_{k=1}^{n} I_{kp} = U \sum_{k=1}^{n} b_k ; \\ I &= \sqrt{{I_a}^2 + {I_p}^2} = U \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2} . \end{aligned}\right\}$$

Сдвиг фаз между напряжением U и током I, проходящим в неразветвленной части цепи,

$$tg\varphi = \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} g_k}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие три величины определяют синусоидальную функцию времени?
2. Как связаны между собой f и T; f и ω; T и ω? Назовите единицы измерения этих величин.
3. Как связаны между собой амплитудные и действующие значения синусоидального тока?
4. Как рассчитывается индуктивное сопротивление?
5. Как рассчитывается емкостное сопротивление?
6. Как рассчитывается полное сопротивление?
7. Запишите закон Ома для амплитудных и действующих значений напряжения и тока.
8. Как определить угол сдвига фаз между напряжением и током?
9. Как произвести эквивалентную замену нескольких последовательно соединенных элементов и нескольких параллельно соединенных элементов.

10. Как определяются активная, реактивная и полная мощности?

Задачи

Задача 3.1. Последовательно с реостатом, имеющим только активное сопротивление $R_1 = 20$ Ом, включена катушка, параметры которой $R = 6{,}7$ Ом и $L = 42{,}7$ мГн (рис. 3.10,а). Определить ток, проходящий в цепи, разность фаз между напряжением и током, напряжения на реостате и катушке, а также сдвиг фаз между напряжением источника и напряжением на катушке, если $U = 220$ В. Частота переменного тока $f = 50$ Гц. Вычислить активную, реактивную и полную мощности катушки, построить векторную диаграмму.

*Решение***.**

$$\omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 42{,}7 \cdot 10^{-3} = 13{,}4 \text{ Ом};$$

$$z_k = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{6{,}7^2 + 13{,}4^2} = 15 \text{ Ом};$$

$$z_э = \sqrt{(R_1 + R)^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{26{,}7^2 + 13{,}4^2} = 29{,}7 \text{ Ом}.$$

В цепи проходит ток

$$I = \frac{U}{z_э} = \frac{220}{29{,}9} = 7{,}35 \text{ А}.$$

Разность фаз между напряжением и током определяется из соотношения

$$tg\,\varphi_э = \frac{\omega L}{R + R_1} = \frac{13{,}4}{26{,}7} = 0{,}5;$$

$$\varphi_э = 25{,}5°.$$

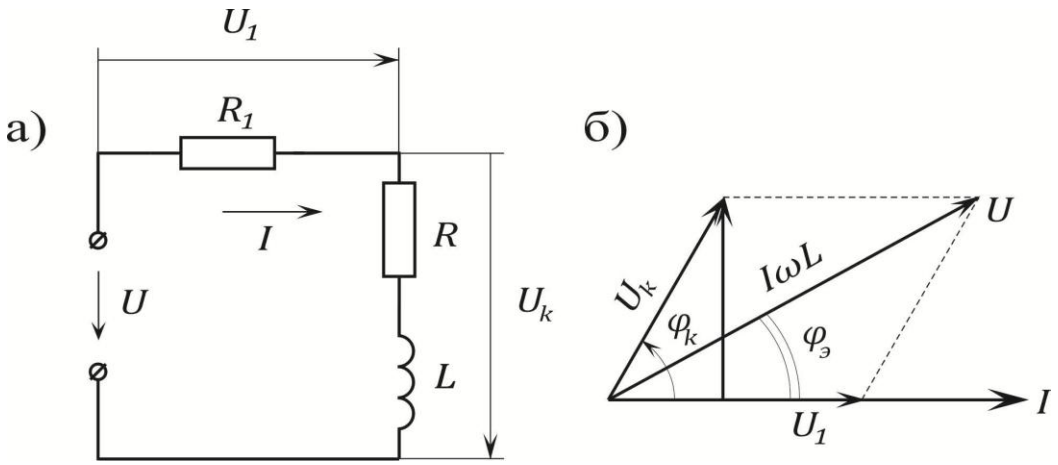


Рис. 3.10

Напряжения на реостате и катушке

$$U_1 = IR_1 = 7{,}35 \cdot 20 = 147\ B,$$

$$U_k = Iz_k = 7{,}35 \cdot 15 = 110\ B.$$

Сдвиг фаз между напряжением источника и напряжением на катушке φ найдется как разность фазовых углов φ_k и $\varphi_э$ (см. векторную диаграмму рис. 3.4, б):

$$tg\,\varphi_k = \frac{\omega L}{R} = \frac{13{,}4}{6{,}7} = 2; \quad \varphi_k = 63{,}5°;$$

$$\varphi = \varphi_k - \varphi_э = 63{,}5 - 26{,}5 = 37°.$$

Активная, реактивная и полная мощности катушки:

$$P_k = I^2R = 7{,}35^2 \cdot 6{,}7 = 362\ \text{Вт};$$

$$Q_k = I^2\omega L = 7{,}35^2 \cdot 13{,}4 = 724\ \text{ВАр};$$

$$S_k = U_kI = 110 \cdot 7{,}35 = 808\ \text{ВА}.$$

Задача 3.2. По показаниям приборов, включенных в цепь (рис. 3.11, а), определить ток, проходящий в неразветвленном

участке цепи. Заменить данную цепь эквивалентной последовательной цепью $R_э$, $x_э$. Построить векторную диаграмму.

Дано. $U = 120\ B, I_1 = 3\ A,\ I_2 = 6\ A,\ I_3 = 2\ A.$

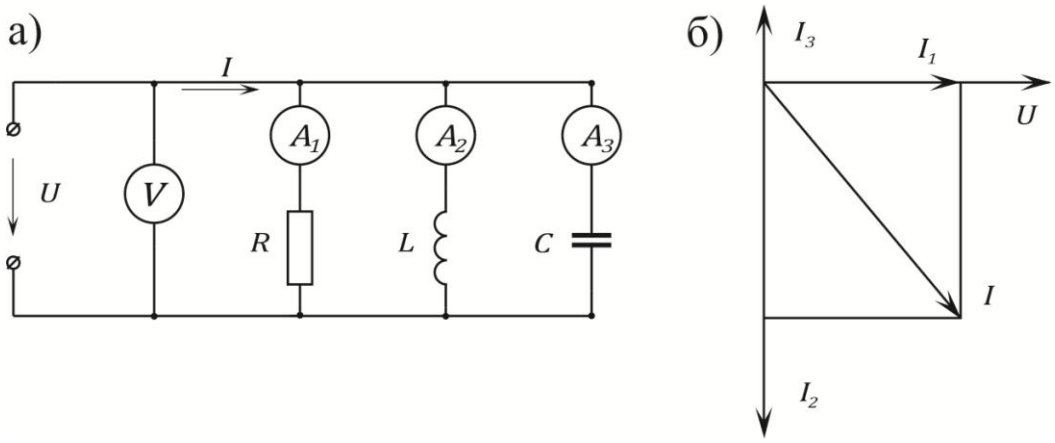


Рис. 3.11

Решение. Сопротивления и проводимости отдельных ветвей и всей цепи:

$$R = \frac{U}{I_1} = \frac{120}{3} = 40\ \text{Ом}; \quad g = \frac{1}{R} = \frac{1}{40}\ \text{См};$$

$$x_L = \frac{U}{I_2} = \frac{120}{6} = 20\ \text{Ом}; \quad b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{20}\ \text{См};$$

$$x_C = \frac{U}{I_3} = \frac{120}{2} = 60\ \text{Ом}; \quad b_C = \frac{1}{x_C} = \frac{1}{60}\ \text{См};$$

$$g_э = g = \frac{1}{40}\ \text{См};$$

$$b_э = b_L - b_C = \frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}\ \text{См (индуктивный)};$$

$$y_э = \sqrt{{g_э}^2 + {b_э}^2} = \sqrt{(\frac{1}{40})^2 + (\frac{1}{30})^2} = \frac{1}{24}\ \text{См};$$

$$z_э = \frac{1}{y_э} = 24 \text{ Ом}.$$

Заданная схема цепи может быть заменена другой, ей эквивалентной и состоящей из последовательно соединенных элементов, параметры которой равны:

$$R_Э = \frac{g_э}{y_э^2} = \frac{\frac{1}{40}}{\left(\frac{1}{24}\right)^2} = 14{,}4 \text{ Ом};$$

$$x_Э = \frac{b_э}{y_э^2} = \frac{\frac{1}{30}}{\left(\frac{1}{24}\right)^2} = 19{,}2 \text{ Ом}.$$

Проверка.

$$z_э = \sqrt{14{,}4^2 + 19{,}2^2} = 24 \text{ Ом}.$$

Определяем ток в неразветвленной части цепи:

$$I = \frac{U}{z_э} = \frac{120}{24} = 5\ A.$$

Векторная диаграмма построена на рис. 3.11, б. Из нее находим тот же ток

$$I = \sqrt{I_1^2 + (I_2 + I_3)^2} = 5\ A.$$

Задача 3.3. К цепи, состоящей из последовательно соединенных активного сопротивления $R = 3$ Ом, индуктивности $L = 8$ мГн и емкости $C = 15$ мкФ подключено напряжение $U = 20$ В с частотой $f = 500$ Гц. Найти ток, напряжение на каждом элементе цепи и мощность, расходуемую в ней. Построить векторную диаграмму.

Ответ. $I = 4A; U_a = 12$ В; $U_L = 101$ В; $U_C = 85$ В; $P = 48$ Вт.

Задача 3.4. Через реостат $R_1 = 40$ Ом и катушку индуктивности $R_L = 12$ Ом, $\omega L = 18$ Ом, соединенные последовательно, проходит ток $I = 2{,}2$ A. Чему равно приложенное к цепи напряжение? Подсчитать активные, реактивные и полные мощности всей цепи и ее отдельных элементов. Каков сдвиг фаз между приложенным напряжением и напряжением на катушке?

Ответ.

$U = 121$ В; $P_{\text{сх}} = 252$ Вт; $Q_{\text{сх}} = 87{,}1$ ВАр; $S_{\text{сх}} = 266$ ВА; $P_{\text{реост}} = 193{,}6$ Вт; $P_{\text{кат}} = 58{,}4$ Вт; $Q_{\text{кат}} = 87{,}1$ ВАр; $\varphi - \varphi_{\text{кат}} = 37{,}5°$.

Задача 3.5. Цепь, изображенная на рис. 3.12, подключена к источнику синусоидального напряжения $U = 96$ В. Сопротивления $R = 1$ Ом, $x_L = 5$ Ом, $x_C = 6$ Ом. Определить все токи, активную, реактивную и полную мощности. Подсчитать эквивалентные сопротивления схемы замещения, состоящей из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений, и начертить ее. Построить векторную диаграмму.

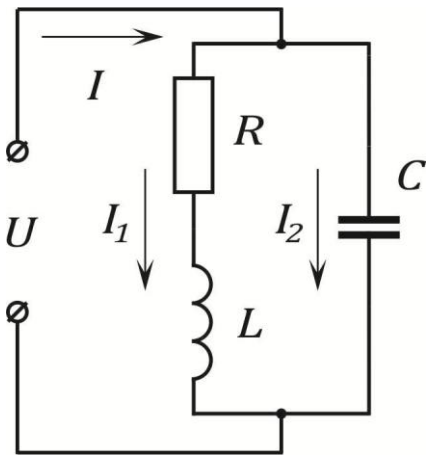


Рис. 3.12

Ответ. $I_1 = 15$ A; $I_2 = 16$ A; $I = 10{,}3$ A; $x = 3{,}9$ Ом; $P = 900$ Вт; $Q = 415$ ВАр; $S = 990$ ВА; $R_э = 8{,}5$ Ом.

Литература: [1, § 3.1–3.23; 2, § 2.1-2.10, 3.8; 6, § 3.9, 3.10, 3.14, 3.19, 4.2; 8, § 6.4, 6.5].

Занятие 4

РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Цель занятия: изучение и применение символического метода для расчета цепей переменного тока.

Основные положения и соотношения

1. Основным методом расчета цепей переменного тока является символический (комплексный) метод.

Пассивный элемент электрической цепи определяется своим комплексным сопротивлением $\underline{Z} = ze^{j\varphi}$ – комплексным числом, равным отношению комплексного напряжения на зажимах данного элемента к комплексному току этого элемента:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + ix = ze^{j\varphi},$$

где $\dot{U}$ и $\dot{I}$ – комплексные действующие значения напряжения и тока;

R – вещественная часть комплексного сопротивления $\underline{Z}$, равная активному сопротивлению цепи;

x – мнимая часть $\underline{Z}$, равная реактивному сопротивлению цепи;

z – модуль комплексного сопротивления цепи, равный полному сопротивлению цепи;

φ – аргумент $\underline{Z}$, равный углу сдвига фаз между током и напряжением.

Отношение комплексного тока в данной цепи к комплексному напряжению на ее зажимах называется комплексной проводимостью электрической цепи

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = g - jb = ye^{-j\varphi},$$

где g – вещественная часть $\underline{Y}$, равная активной проводимости цепи;

b – мнимая часть $\underline{Y}$, равная реактивной проводимости цепи;

y – модуль комплексной проводимости цепи, равный полной проводимости цепи;

φ – аргумент $\underline{Y}$, равный углу сдвига фаз между напряжением и током, взятому с обратным знаком.

Комплексная проводимость обратна комплексному сопротивлению цепи:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

2. **Закон Ома** для не содержащего э.д.с. участка цепи, сопротивление которого $\underline{Z}$, принимая положительное направление напряжения, совпадающее с положительным направлением тока, имеет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_{ab} = -\dot{U}_{ba} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = i\underline{Z}.$$

Для ветви, содержащей э.д.с. и сопротивление (например, для ветви, рис. 4.2, *г*),

$$i = \frac{\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b + \dot{E}}{z_{ba}} = \frac{\dot{U}_{ba} + \dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E} - \dot{U}_{ab}}{Z}.$$

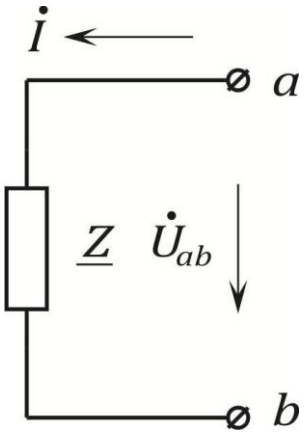


Рис. 4. 1

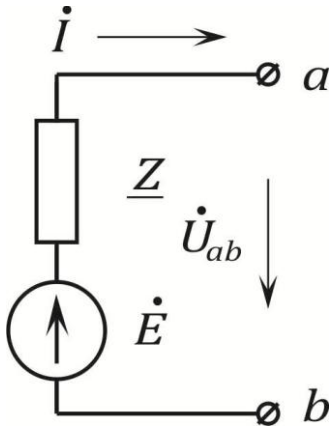


Рис. 4. 2

3. **Законы Кирхгофа**. Для записи уравнений на основе законов Кирхгофа надо выбрать положительные направления для всех токов и обозначить их на схеме.

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу электрической цепи имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0.$$

При записи этого уравнения токи, направленные к узлу, следует записывать со знаком плюс, а направленные от узла – со знаком минус (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа применяется к замкнутому контуру цепи и имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k = \sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k \underline{Z}_k \ ,$$

где $\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k$ – алгебраическая сумма комплексных э.д.с. источников напряжения. Со знаком плюс записываются те из них, положительные направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура; э.д.с., имеющие направления, противоположные обходу контура, записываются со знаком минус;

$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k \underline{Z}_k$ – падения напряжений на комплексных сопротивлениях $\underline{Z}_k$ отдельных участков. Со знаком плюс берутся те, для которых направление тока совпадает с направлением обхода, а со знаком минус – те, для которых направление тока противоположно направлению обхода контура.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока.

4. **Последовательное и параллельное соединение сопротивлений.** При последовательном соединении участков цепи комплексное эквивалентное сопротивление равно сумме комплексных сопротивлений отдельных участков:

$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \ .$$

При параллельном соединении ветвей цепи комплексная эквивалентная проводимость равна сумме комплексных проводимостей ветвей:

$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \ .$$

В частном случае двух параллельно соединенных сопротивлений $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ эквивалентное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \ .$$

Комплексные токи, проходящие в каждой их двух параллельных ветвей, могут быть рассчитаны через комплексный ток $\dot{I}$, проходящий в неразветвленной части цепи, и комплексные сопротивления по формулам:

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \ , \qquad \dot{I}_2 = \dot{I} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \ .$$

5. Полная мощность

$$S = \frac{U_m I_m}{2} = UI \text{ ВА.}$$

Активная мощность

$$P = \frac{U_m I_m}{2} cos\varphi = UIcos\varphi \text{ Вт.}$$

Реактивная мощность

$$Q = \frac{U_m I_m}{2} sin\varphi = UIsin\varphi \text{ ВАр.}$$

Связь между активной, реактивной и полной мощностью

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

Коэффициент мощности

$$cos\varphi = \frac{P}{S}.$$

Мощность в комплексной форме

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I} = Se^{j\varphi} = UIcos\varphi + jIUsin\varphi = P + jQ,$$

6. Совокупность векторов токов в ветвях данной цепи называется векторной диаграммой токов этой цепи. Совокупность векторов напряжений на участках цепи называется векторной диаграммой напряжений цепи. Если при построении векторной диаграммы строго придерживаться того порядка суммирования векторов напряжений на участках, в котором эти участки следуют друг за другом в цепи, векторная диаграмма приобретет свойство топографичности, и называется топографической. Напряжение между двумя точками электрической цепи определяется вектором, соединяющим соответствующие точки топографической диаграммы.

7. При расчете цепей переменного тока посредством комплексных чисел остаются справедливыми все методы расчета, применяемые для расчета цепей постоянного тока. При этом во всех уравнениях напряжения, потенциалы, токи, сопротивления и проводимости долины быть записаны в комплексной форме.

Контрольные вопросы

1. Как определяется комплексное сопротивление цепи переменного тока?
2. Сформулируйте закон Ома в символической форме.
3. Сформулируйте законы Кирхгофа в символической форме.
4. Как определить активную мощность цепи переменного тока?
5. Как определить реактивную мощность цепи переменного тока?
6. Как определить полную мощность цепи переменного тока?
7. Запишите выражение мощности в комплексной форме.

Задачи

Задача 4.1. Катушка индуктивности с параметрами $R = 3$ Ом, $L = 9{,}95$ мГн включена последовательно с сопротивлением $R_1 = 2$ Ом. К цепи приложено напряжение $u = 141 \sin 314t$ (рис. 4.3). Определить ток в цепи и напряжение на каждом элементе. Определить активную, реактивную и полную мощности цепи. Построить векторную диаграмму.

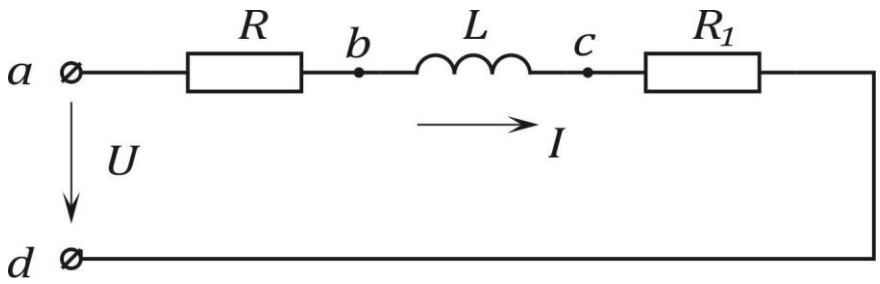


Рис. 4. 3

Решение.

1. Уравнению электрического равновесия данной цепи (второму закону Кирхгофа) для мгновенных значений

$$u = (R + R_1)i + L\frac{di}{dt},$$

соответствует уравнение для комплексных амплитуд

$$\dot{U}_m = (R + R_1)\dot{I}_m + j\omega L \cdot \dot{I}_m ,$$

где комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\psi_u} = 141 \text{ В},$$

и комплексное сопротивление

$$Z = R + R_1 + j\omega L = 3 + 2 + j314 \cdot 9{,}95 \cdot 10^{-3} = \\ = 5 + j3{,}12 = 5{,}9 \cdot e^{j32^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{141}{5{,}9e^{j32^\circ}} = 23{,}9 \cdot e^{-j32^\circ} \text{ А}$$

Комплексный ток

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{23{,}9e^{-j32^\circ}}{1{,}41} = 16{,}9 \cdot e^{-j32^\circ} \text{ А}$$

2. Напряжение на сопротивлении R: комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_{mab} = R\dot{I}_m = 3 \cdot 23{,}9e^{-j32^\circ} = 71{,}7 \cdot e^{-j32^\circ} \text{ В}$$

Комплексное напряжение

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{U}_{mab}}{\sqrt{2}} = 50{,}7e^{-j32^\circ} \text{ В}.$$

Напряжение на сопротивлении R_1:

$$\dot{U}_{mcd} = R_1\dot{I}_m = 3{,}12 \cdot e^{-j32^\circ} = 47{,}8 \cdot e^{-j32^\circ},$$

$$\dot{U}_{cd} = \frac{\dot{U}_{mcd}}{\sqrt{2}} = 33{,}8 \cdot e^{-j32^\circ}\ \text{В}\,.$$

Напряжение на индуктивности L:

$$\dot{U}_{mbc} = j\omega L \cdot \dot{I}_m = 3{,}12 \cdot e^{j90^\circ} \cdot 23{,}9 \cdot e^{-j32^\circ} = 74{,}5 \cdot e^{j58^\circ}\ \text{В}\,,$$

$$\dot{U}_{bc} = \frac{\dot{U}_{mbc}}{\sqrt{2}} = 52{,}8 \cdot e^{j58^\circ}\ \text{В}\,.$$

3. Активная мощность цепи

$$P = UI\cos\varphi = 100 \cdot 16{,}9 \cdot \cos 32^\circ = 1430\ \text{Вт},$$

или

$$P = (R_1 + R)I^2 = (3+2) \cdot 16{,}9^2 = 1430\ \text{Вт}.$$

Реактивная мощность

$$Q = UI\sin\varphi = 100 \cdot 16{,}9 \cdot \sin 32^\circ = 895\ \text{ВАр},$$

или

$$Q = x \cdot I^2 = 3{,}12 \cdot 16{,}9^2 = 895\ \text{ВАр}.$$

Полная мощность

$$S = UI = 100 \cdot 16{,}9 = 1690\ \text{ВА},$$

или

$$S = z \cdot I^2 = 5{,}9 \cdot 16{,}9^2 = 1690\ \text{ВА}.$$

4. Векторная диаграмма может быть построена с использованием комплексной плоскости и без нее. Построим векторную диаграмму без использования комплексной плоскости (рис. 4.4).

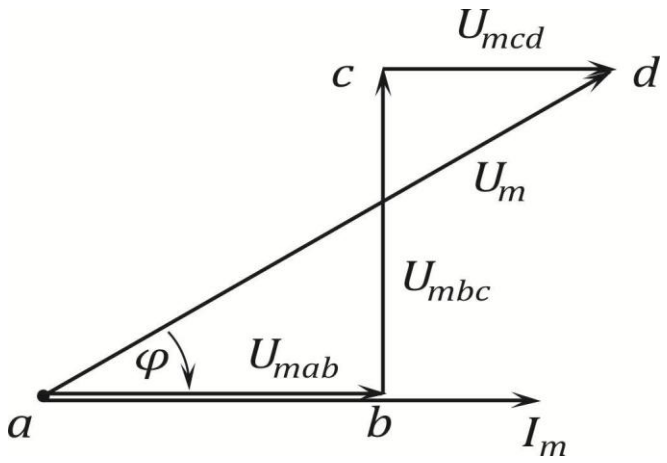


Рис. 4.4

Задаемся масштабом токов $m_i = 5\,\frac{\text{А}}{\text{см}}$ и масштабом напряжений $m_u = 20\,\frac{\text{В}}{\text{см}}$.

Из точки a (по горизонтальной оси) отложим вектор тока $I_m = 23{,}9$ А (в масштабе отрезок $23{,}9/5 = 4{,}77$ см). Затем из той же точки a откладываем вектор $U_{mab} = 71{,}7$ В (В масштабе отрезок $71{,}7/20 = 3{,}59$ см, он совпадает по фазе с током).

Из конца вектора U_{ab} строим вектор $U_{mbc} = 74{,}5$ В; этот вектор опережает ток на $90°$. Из конца вектора U_{mbc} строим вектор $U_{mcd} = 47{,}8$ В, совпадающий по фазе с током. Геометрическая сумма векторов напряжений на участках дает вектор приложенного напряжения U_m.

Диаграмма может быть построена и при обратной последовательности суммирования векторов (рис. 4.5). Обе диаграммы являются топографическими,

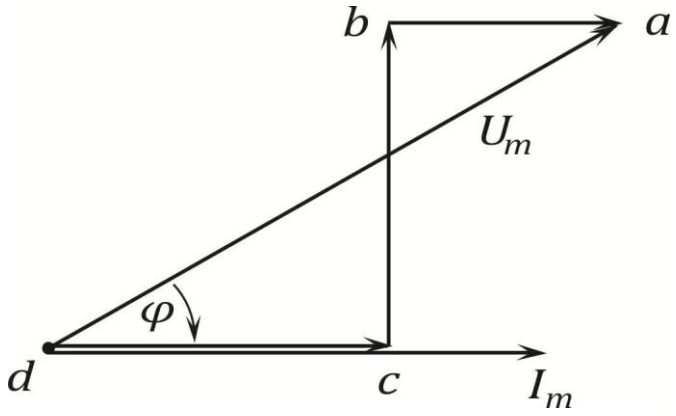


Рис. 4.5

Но любая третья, построенная при иной последовательности суммирования векторов, не будет обладать свойствами топографичности.

Задача 4.2. Цепь, схема которой изображена на рис. 4.6, имеет следующие данные:
$R_1 = 3$ Ом, $x_L = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $x_c = 8$ Ом. Вычислить токи, активную, реактивную и полную мощность цепи, если напряжение $U = 10$ В. Построить векторную диаграмму напряжений.

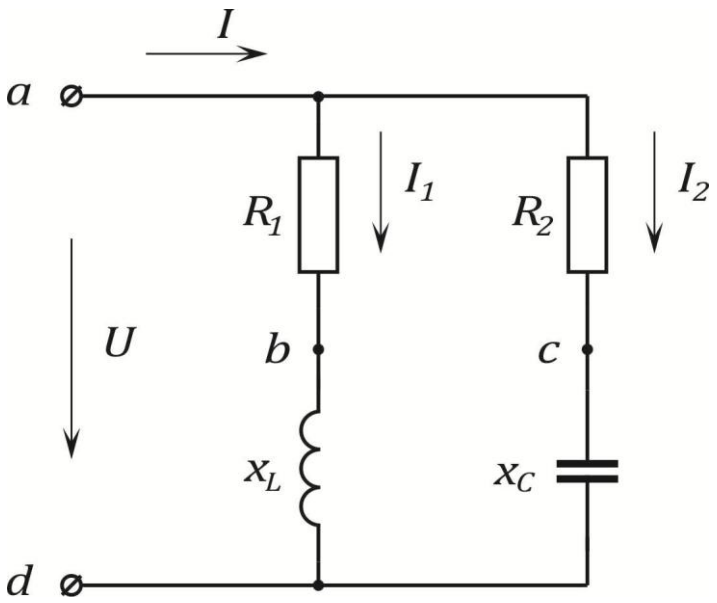


Рис. 4.6

Решение.

1. Запишем данные величины в комплексной форме: напряжение $\dot{U} = U = 10$ В, сопротивление ветвей

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_L = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - jx_C = 6 - j8 = 10e^{-j53^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Токи в ветвях

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{10}{5e^{j53^\circ}} = 2e^{-j53^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{10}{10e^{-j53^\circ}} = e^{j53^\circ}\ \text{А}.$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_э} = \frac{\dot{U}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} = \frac{10(3 + j4 + 6 - j8)}{(3 + j4) \cdot (6 - j8)} = \\ = 1{,}8 - j0{,}8 = 1{,}97e^{-j24^\circ}\ \text{А}.$$

3. Мощность определяется по комплексам напряжения и тока

$$\dot{S} = \dot{U}\dot{I} = 10 \cdot 1{,}97e^{j24^\circ} = (18 + j8)\ \text{ВА},$$

Следовательно $P = 18$ Вт, $Q = 8$ ВАр, $S = 19{,}7$ ВА.

4. Для построения векторной диаграммы токов и топографической диаграммы напряжений выбираем масштабы напряжения и тока

$$m_u = 2\frac{\text{В}}{\text{см}}, \qquad m_i = 0{,}2\frac{\text{А}}{\text{см}}.$$

Построение диаграммы целесообразно начинать с одного их токов в ветвях или с напряжения на любом элементе цепи. Начнем с тока I_1 (рис. 4.7).

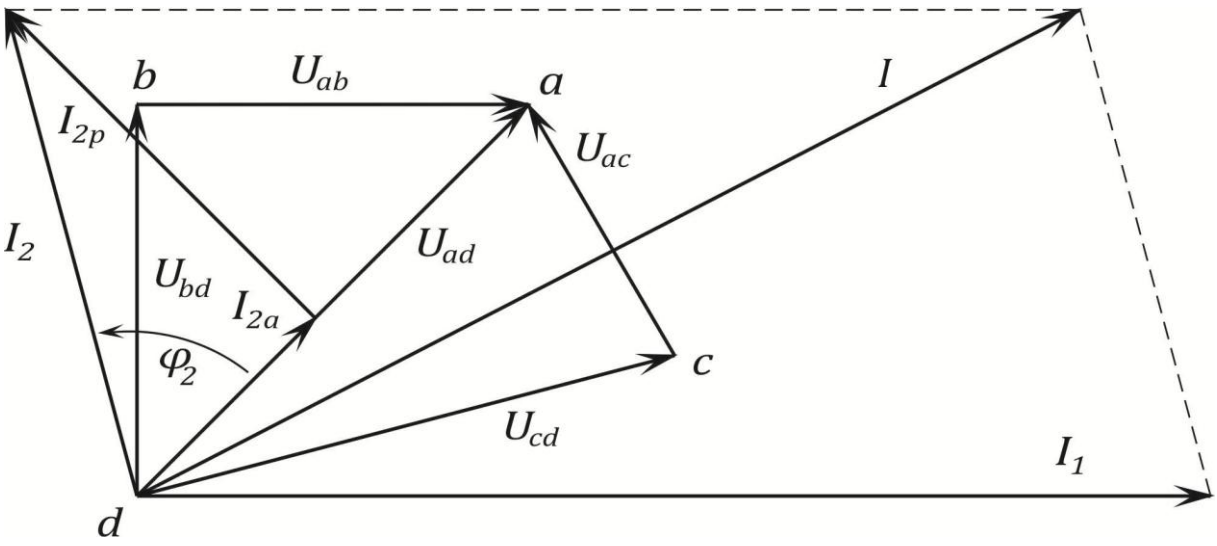


Рис. 4.7

Из начала координат в произвольном направлении (обычно горизонтально или вертикально) проводим вектор тока I_1 в выбранном масштабе. В начале координат помещаем точку d. Их точки d, перпендикулярно току I_1 в сторону опережения проводим вектор падения напряжения на индуктивном сопротивлении $U_{bd} = x_L I_1 = 4 \cdot 2 = 8$ В, получаем точку b.

Из точки b проведем вектор $U_{ab} = R_1 I_1 = 3 \cdot 2 = 6$ В, совпадающий с током I_1 по фазе, получаем точку a. Соединив точку d с точкой a получаем напряжение U_{ad}, которое должно быть равно приложенному напряжению $U = 10$ В.

Для построения падений напряжения во второй параллельной ветви нужно сначала построить вектор тока I_2. Построение тока можно осуществить двумя способами (рис. 4.7):

а) Определив модуль тока

$$I_2 = \frac{U_{ad}}{Z_2} = \frac{10}{10} = 1 \text{ А},$$

и его фазу относительно напряжения U_{ad}

$$\varphi_2 = arctg\frac{x_c}{R_2} = arctg\frac{8}{6} = 53°.$$

б) Определив составляющие тока: активную, совпадающую по фазе с U_{ad}

$$I_{2a} = g_2 U_{ad} = \frac{6}{6^2 + 8^2} \cdot 10 = 0{,}6 \text{ А},$$

и реактивную, опережающую напряжение U_{ad} на $90°$

$$I_{2p} = b_2 U_{ad} = \frac{8}{6^2 + 8^2} \cdot 10 = 0{,}8 \text{ А}.$$

Затем из точки d перпендикулярно току I_2 в сторону отставания проводим вектор $U_{cd} = x_C I_2 = 8 \cdot 1 = 8$ В, получаем точку

c, затем из точки c параллельно току I_2 проводим вектор $U_{ac} = R_2 I_2 = 6 \cdot 1 = 6$ В; конец последнего вектора попадает в найденную ранее точку a. Складывая векторы токов I_1 и I_2 находим ток I в неразветвленной части цепи.

Задача 4.3. Катушка, обладающая сопротивлением $R = 250$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}01$ Гн, соединена последовательно с конденсатором емкостью $C = 0{,}02$ мкФ. К этой цепи приложено синусоидальное напряжение $U = 20$ В, частота $f = 10000$ Гц.

Определить ток в цепи и напряжения на катушке и на конденсаторе. Вычислить активную, реактивную и полную мощность цепи.

Ответ.
$I = 0{,}0665$ А, $U_k = 45$ В, $U_c = 52{,}8$ В, $P = 1{,}1$ Вт, $Q = 0{,}74$ Вар, $S = 1{,}33$ ВА.

Задача 4.4. Цепь состоит их последовательно соединенных катушки индуктивности и конденсатора. При напряжении $U = 100$ В и частоте $f_1 = 50$ Гц, ток в цепи равен $I_1 = 2{,}24$ А, сдвиг фаз $\varphi = 63{,}5°$. При таком же действующем значении напряжения и частоте $f_2 = 100$ Гц ток в цепи равен $I_2 = 4{,}85$ А, а характер цепи остался прежним.

Определить параметры катушки и емкость конденсатора.

Ответ. $R = 19{,}9$ Ом, $L = 0{,}0311$ Гн, $C = 64$ мкФ.

Задача 4.5. Схема электрической цепи представлена на рис. 4.8. Показания амперметра равны $I = 16{,}1$ А, $I_1 = 8{,}93$ А и $I_2 = 10$ А. Определить активную мощность ветви с сопротивлением R_1, x_1, если $R_2 = 20$ Ом.

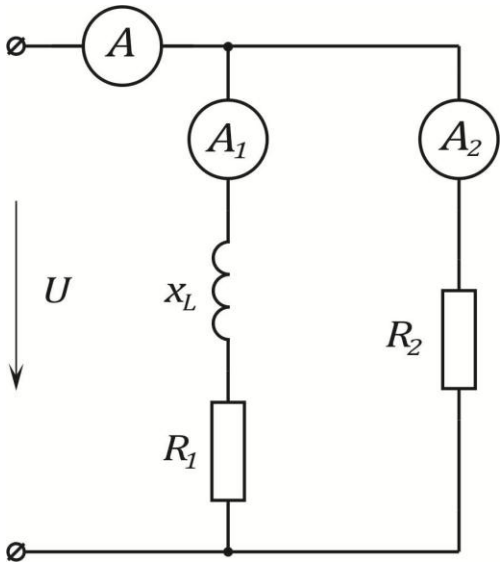


Рис. 4.8

Ответ. $P_1 = 800$ Вт, $R_1 = 10$ Ом, $x_1 = 20$ Ом.

Задача 4.6. Цепь, схема которой изображена на рис. 4.9, имеет следующие параметры:

$R_1 = 3$ Ом, $x_1 = 4$ Ом, $L_3 = 12{,}74$ мГн, $R_2 = 8$ Ом, $C_2 = 530$ мкФ, $L_4 = 25{,}5$ мГн, $z_4 = 10$ Ом, $R_5 = 8$ Ом, $x_5 = -6$ Ом.

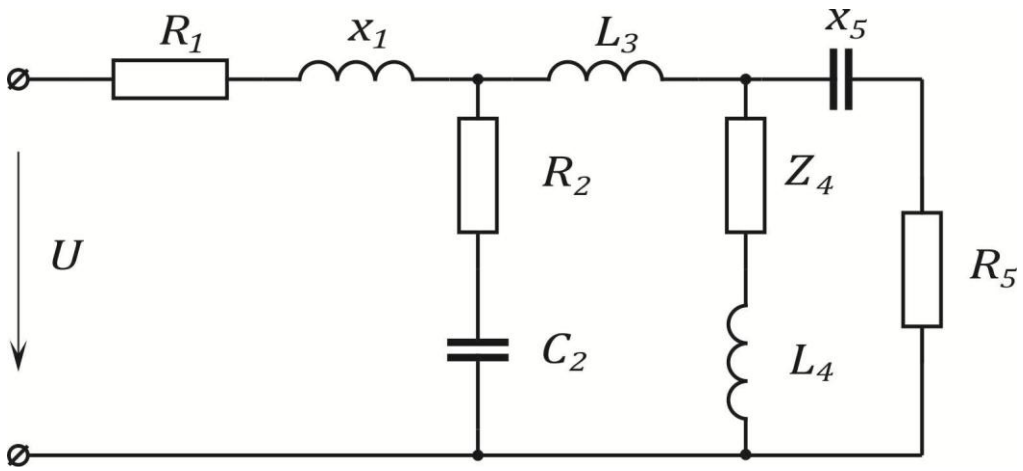


Рис. 4.9

Определить напряжение U на зажимах цепи и построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений, если мощность, расходуемая в ветви, содержащей индуктивность L_4 равна 500 Вт. Частота напряжения $f = 50$ Гц.

Ответ. $U = 200$ В.

Литература: [1, § 3.1–3.23; 3.20; 2, § 2.1-2.10, 3.8; 6, § 3.9, 3.10, 3.14, 3.19, 4.2; 8, § 6.4, 6.5].

Занятие 5

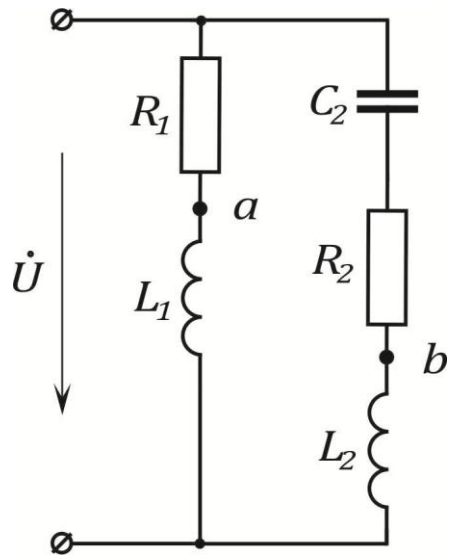
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ЦЕПЯМ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Цель занятия: проверка знаний и умений расчета цепей переменного тока.

Приводится вариант контрольной работы по расчету цепи переменного тока.

Вариант 1.

Задана схема электрической цепи.



Дано:

$U = 220$ В $\quad f = 50$ Гц;

$R_1 = 12$ Ом $\quad R_2 = 8$ Ом;

$x_{L1} = 4$ Ом $\quad x_{C2} = 16$ Ом

$x_{L2} = 12$ Ом

1. Определить токи, P, Q.
2. Построить векторную диаграмму и найти U_{ab}.

Занятие 6

АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий резонансных режимов, явления взаимной индуктивности, применение основных соотношений для расчета цепей переменного тока в резонансных режимах и для цепей со взаимоиндукцией.

Основные положения и соотношения

1. Резонанс напряжений возможен в цепи с последовательным соединением элементов *R, L, C* (рис 6.1). Комплексное входное сопротивление такой цепи, называемой также последовательным колебательным контуром

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = z \cdot e^{j\varphi},$$

где

$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивное сопротивление цепи;

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ – полное сопротивление цепи;

$\varphi = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ – угол сдвига фаз между напряжением и током.

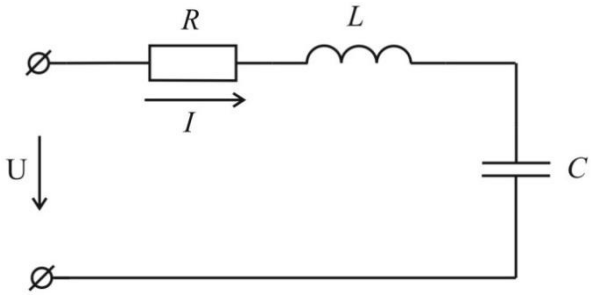


Рис. 6.1

2. Если реактивное сопротивление цепи $X = 0$, т. е.

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$, в цепи наступает резонанс напряжений. При этом полное сопротивление имеет минимальную величину и равно активному сопротивлению, ток достигает максимального значения и совпадает по фазе с напряжением на зажимах цепи, т.е. $Z = R,\ I_0 = \frac{U}{R}\ , \varphi = 0$

Напряжение на реактивных элементах цепи равны по величине и могут превышать напряжение на зажимах цепи.

3. Состояние резонанса может быть достигнуто за счет изменения одного из параметров ω, *L* или *C* при двух других неизменных. При заданных *L* и *C* резонанс наступит при частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

4. В электрической цепи, которая состоит из двух параллельных ветвей, содержащих индуктивность и емкость (рис. 6.2), возможно возникновение резонанса токов. Входная комплексная проводимость такой цепи, называемой простым параллельным колебательным контуром,

$$Y = \frac{1}{Z} = \left(\frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}\right) - j\left(\frac{\omega L}{Z_1^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{Z_2^2}\right) = g - jb = y \cdot e^{-j\omega}\ ,$$

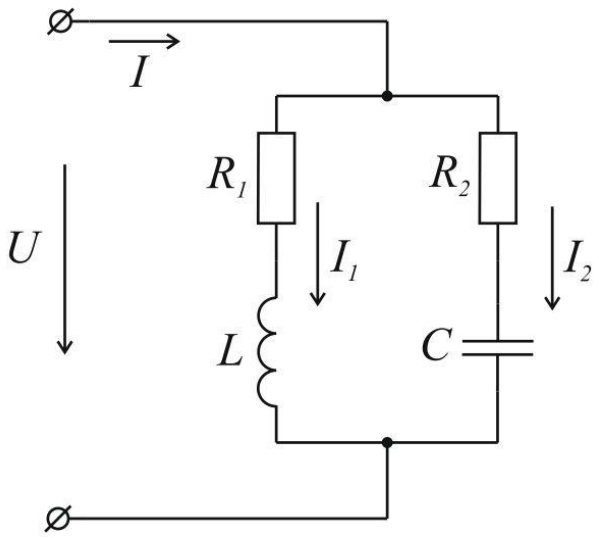


Рис. 6.2

где

g – активная проводимость цепи;

b – реактивная проводимость цепи;

y – полная проводимость цепи;

$\varphi = arctg\frac{b}{g}$ – угол сдвига фаз между напряжением и током.

Если $R_1 = R_2 = 0$, ($g_1 = g_2 = 0$), то контур не имеет потерь, такой контур называется идеальным.

5. Если реактивная проводимость цепи b = 0, т. е.

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

в цепи наступает резонанс токов. При этом полная проводимость цепи имеет минимальное значение и равна активной проводимости, ток в неразветвленной части цепи достигает минимальной величины и совпадает по фазе с напряжением, то есть $y = g$,

$$I_0 = gU\ ,\ \varphi = 0\ .$$

Токи в ветвях, имея равные реактивные составляющие, могут превышать величину тока в неразветвленной части цепи.

В идеальном контуре при резонансе токов проводимость цепи $y = 0$, сопротивление $Z = \infty$, ток в неразветвленной части цепи равен нулю, а токи в ветвях равны по величине и противоположны по фазе.

6. Резонансная частота параллельного контура, полученная из условия резонанса, равна

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}},$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление.

Резонанс токов возможен, если $\rho < R_1$ и $\rho < R_2$. Если $\rho = R_1 = R_2$, при любой частоте ток в неразветвленной части будет совпадать по фазе с приложенным напряжением.

7. Для идеального параллельного контура резонансная частота

$$\omega_0' = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

т. е. такая же, как для последовательного контура.

8. При расчете цепей со взаимной индуктивностью необходимо учитывать напряжения, обусловленные действием ЭДС взаимной индукции. В уравнениях второго закона Кирхгофа эти напряжения могут входить как с положительными, так и с отрицательным знаком.

Знак напряжения на катушке *a*, обусловленного током в катушке *b*, зависит от характера включения этих катушек (встречное или согласное) и направления обхода контура, содержащего катушку *a*. Знак напряжения на катушке *a* от тока I_b, совпадает со знаком напряжения на ней, обусловленного собственным её током I_a, если включение катушек *a* и *b* согласное. При встречном включении катушек знаки напряжения противоположны.

9. При последовательном соединении двух индуктивно связанных катушек и согласном их включении (рис. 6.3) уравнение будет

$$R_1\dot{I} + j\omega L_1 + j\omega M\dot{I} + R_2\dot{I} + j\omega L_2 I + j\omega M\dot{I} = \dot{U}$$

или

$$\dot{U} = [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)]\dot{I}$$

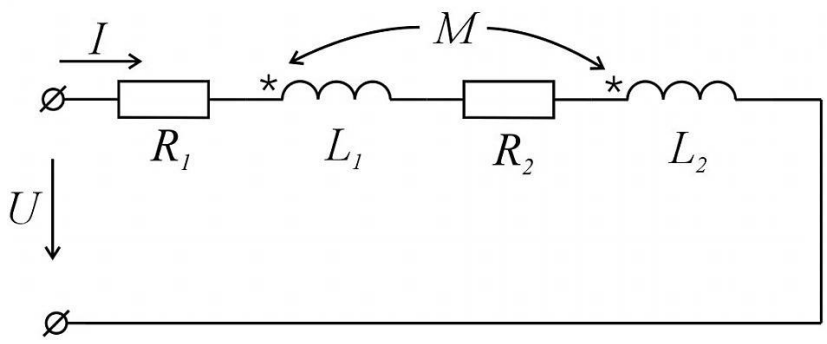


Рис.6.3

Отношение напряжения на выходе цепи к току представляет собой входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

При встречном включении катушек (рис 6.4) падения напряжения $j\omega M\dot{I}$ войдут в уравнение с отрицательным знаком и поэтому

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

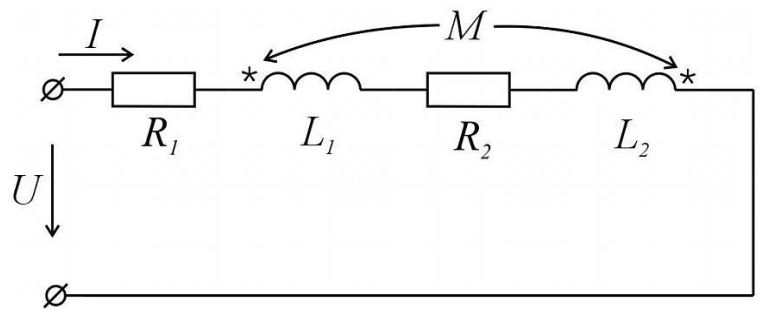


Рис. 6.4

10. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока, содержащих индуктивно связанные катушки, производится по законам Кирхгофа или по методу контурных токов.

Метод эквивалентного генератора можно применять только в том случае, когда определяется ток в ветви, не содержащей индуктивно связанных катушек.

Остальные расчетные методы (метод узловых напряжений, метод наложения, метод преобразования схемы) непосредственно неприменимы, так как они не учитывают ЭДС взаимной индукции.

Контрольные вопросы

1. В какой цепи и при каких условиях наступает резонанс напряжений?
2. Как определить резонансную частоту последовательного контура?

3. Почему при резонансе в последовательном контуре ток достигает максимального значения?

4. В какой цепи может возникнуть резонанс токов?

5. Изменением каких параметров можно добиться резонанса в параллельной цепи?

6. Как учитывается ЭДС взаимной индукции при расчете цепи, содержащей индуктивно связанные элементы?

7. Какие зажимы называются одноименными?

8. Какие методы применяются для расчета цепей, содержащих индуктивно связанные элементы и почему?

Задачи

Задача 6. 1. Реостат с активным сопротивлением R = 2 Ом, катушка с индуктивностью L = 0,1 мГ, конденсатор с емкостью C = 1 мкФ соединены последовательно (рис. 6.1).

Определить резонансную частоту ω_0, характеристическое сопротивление ρ и добротность контура Q. Вычислить ток в цепи I_0 при резонансе, напряжение на индуктивности U_{L0}, напряжение на емкости U_{C0}.

Определить активную мощность цепи. Построить векторную диаграмму. Цепь включена на синусоидальное напряжение U = 1В.

Решение:

1. Резонансная частота ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

2. Характеристическое сопротивление ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6}}} = 10 \text{ Ом}.$$

3. Добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{10}{2} = 5$$

4. Ток при резонансе

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ А}.$$

5. Напряжение на индуктивности и емкости при резонансе

$$U_{L0} = U_{C0} = UQ = 1 \cdot 5 = 5 \text{ В}.$$

6. Активная мощность цепи при резонансе

$$P = R \cdot I_0 = 2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}5 \text{ Вт}.$$

7. Векторная диаграмма:

– масштаб тока $m_i = 0{,}1$ А/см,

– масштаб напряжения $m_u = 1$ В/см

Построение диаграммы начато с тока I_0. Векторная диаграмма приведена на рис. 6.5.

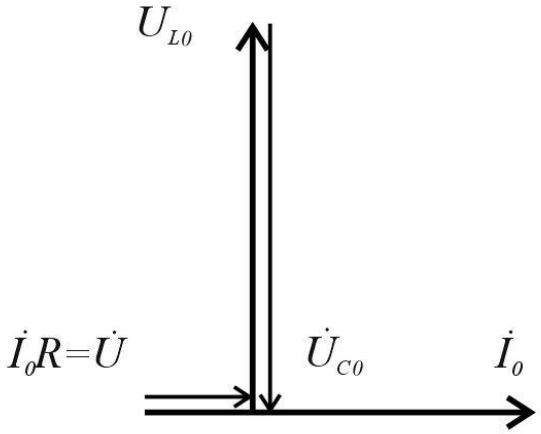


Рис. 6.5

Задача 6. 2. Определить токи в ветвях цепи, схема которой приведена на рис. 6.6 , если задано:

$R_1 = 8$ Ом; $L_1 = 2$ мГ; $L_2 = 2$ мГ; $R_3 = 2$ Ом;

$M = 1$ мГ; $C = 500$; $\omega = 10^3$ 1/с; $U = 20$ В.

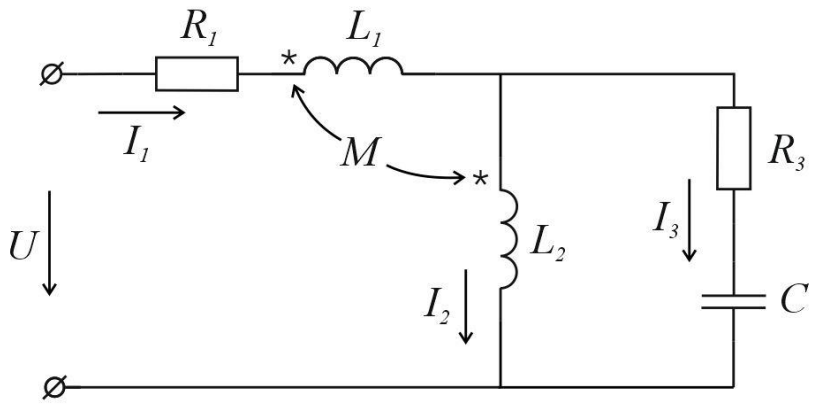


Рис. 6.6

Решение:

1. Выбираем положительные направления токов и обозначаем их на схеме. Записываем напряжения в комплексной форме

$$\dot{U} = U = 20 \text{ В}.$$

2. Составляем уравнения по законам Кирхгофа

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$R_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 + j\omega L_2\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = \dot{U};$$

$$R_3\dot{I}_3 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_3 - j\omega L_2\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1 = 0.$$

После подстановки числовых значений величин получаем уравнения:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$(8 + j3)\dot{I}_1 + j3\dot{I}_2 = 20;$$

$$-j\dot{I}_1 - j2\dot{I}_2 + (2 - j2)\dot{I}_3 = 0.$$

Решение этих уравнений дает:

$$\dot{I}_1 = 1{,}4e^{-j26{,}33^\circ}\ \text{А},$$

$$\dot{I}_2 = 2{,}5e^{-j82{,}17^\circ}\ \text{А},$$

$$\dot{I}_3 = 2{,}16e^{-j64{,}33^\circ}\ \text{А},$$

Задача 6. 3. Для электрической цепи (рис. 6.7) найти значения индуктивности L_0, при которой ток I совпадает по фазе с напряжением U.

Параметры цепи: L = 2 мГ; $C = 0{,}25\cdot10^{-3}$ Ф. $\omega = 2\cdot10^3$ рад/с. Определить при какой частоте ω' ток в цепи будет равен нулю.

Ответ: L_0 = 2 мГ, $\omega' = 1{,}41\cdot10^3$ рад/с.

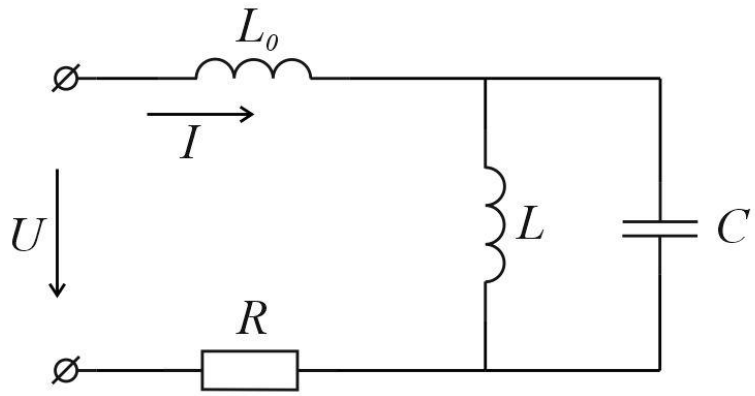


Рис 6.7

Задача 6. 4. Определить величину емкости C_0, которую необходимо включить последовательно с катушкой, имеющей активное сопротивление R = 16 Ом и индуктивность L = 158 мкГн, для того, чтобы цепь была настроена в резонанс при частоте f = 1 МГц.

Найти ток, мощность, выделяемую в цепи, и напряжение на конденсаторе при резонансе, если приложенное к цепи напряжение U = 0,8 В.

Ответ: C_0 = 160 пФ , I_0 = 50 мА , P = 40 мВт , U_{C0} = 49,7 В.

Задача 6. 5. Цепь, схема которой изображена на рис. 6.8 находится в состоянии резонанса, причем токи равны :
I_1= 7 А, I = 3,6 А. Определить ток I_2.
Ответ: I_2 = 6 А.

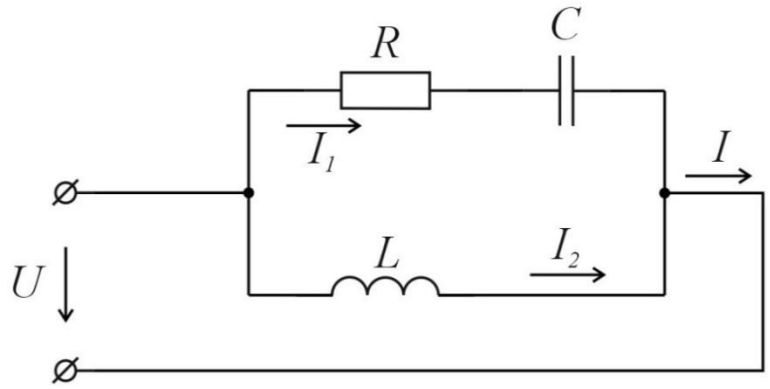


Рис. 6.8

Задача 6. 6. Вычислить токи в цепи, схема которой приведена на рис. 6.9. Параметры цепи: R_1 = 20 Ом; R_2=20 Ом; ωM = 10 Ом ; U = 150 В. Построить векторную диаграмму.

Ответ: I_1 = 8,1 А; I_2 = 6,3 А; I = 14,3 А.

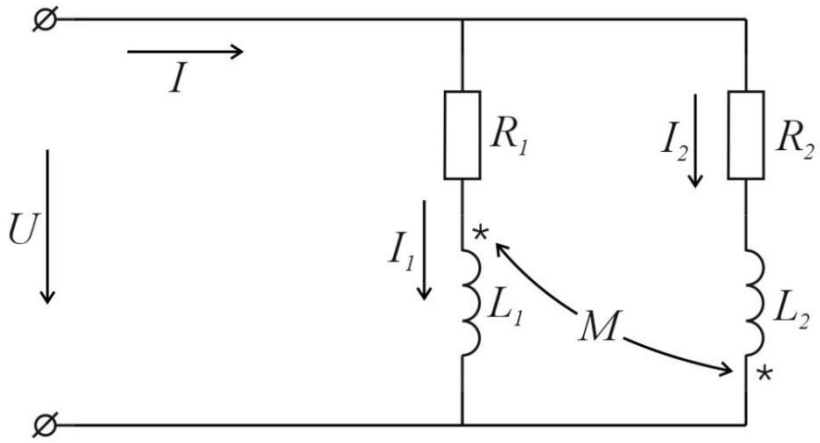


Рис. 6.9

Литература: [1, § 3.25–3.28, 3.36–3.38; 2 § 5.1–5.3, 8.1–8.4; 6, § 3.8, 3.11, 5.2, 6.1–6.4]

Занятие 7

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий трехфазных цепей переменного тока, применение основных соотношений для расчета трехфазных цепей

Основные положения и соотношения

Мгновенные значения и комплексы симметричной системы напряжений имеют вид:

$$\begin{cases} u_A = U_m sin\omega t;\ \dot{U}_A = U \\ u_B = U_m sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right);\ \dot{U}_B = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ u_C = U_m sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = U_m sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \\ \dot{U}_C = Ue^{-j\frac{4\pi}{3}};\dot{U}_C = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

1. Соотношения в симметричной трехфазной цепи. В симметричной трехфазной цепи комплексные сопротивления составляющих ее фаз одинаковы.

Для симметричной трехфазной системы при соединении звездой существуют следующие зависимости между линейными и фазными напряжения и токами:

$$U_л = \sqrt{3}U_ф;\ I_л = I_ф.$$

Для симметричной трехфазной системы при соединении треугольником линейные и фазные напряжения и токи связанны соотношениями:

$$U_л = U_ф;\ I_л = \sqrt{3}I_ф.$$

Мощность в симметричной трехфазной системе
$P = \sqrt{3}U_л\, I_л cos\varphi_ф = 3U_ф I_ф cos\varphi_ф.$

2. Расчеты несимметричных трехфазных цепей могут быть проведены с помощью законов Кирхгофа или любого метода расчета электрических цепей.

Если к трехфазному генератору, соединенному звездой, подключен приемник энергии, также соединенный звездой, то смещение нейтрали – напряжение $\dot{U}_{nN}$ между нейтральным (ну-

левыми) точками приемника и генератора – определяется по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – фазные напряжения генератора;

$\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C, \underline{Y}_N$ – проводимости фаз и нейтрального (нулевого) провода.

Токи в фазах и нейтральном проводе:

$$\begin{cases} \dot{I}_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_A; \ \dot{I}_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_B; \\ \dot{I}_C = (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_C; \ \dot{I}_N = \dot{U}_N \underline{Y}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \end{cases}$$

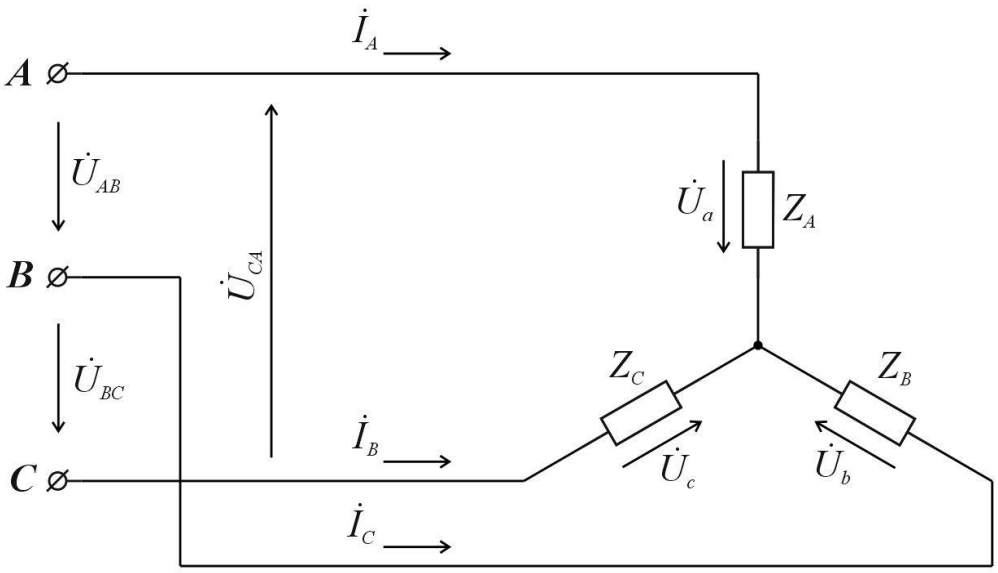


Рис. 7.1

Если нагрузка соединена звездой без нейтрального (нулевого) провода и известны линейные напряжения $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$, то фазные напряжения $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ (рис. 7.1) нагрузки находятся по формулам:

$$\begin{cases} \dot{U}_a = \frac{\dot{U}_{AB}\underline{Y}_B - \dot{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \\ \dot{U}_b = \frac{\dot{U}_{BC}\underline{Y}_C - \dot{U}_{AB}\underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \\ \dot{U}_c = \frac{\dot{U}_{CA}\underline{Y}_A - \dot{U}_{BC}\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \end{cases}$$

где $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$ и $\underline{Y}_C$ – проводимость фаз.

Для любой трехфазной системы сумма комплексных линейных напряжений равна нулю:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$$

Контрольные вопросы

1. В каком случае система напряжений генератора может считаться симметричной?
2. Какие виды соединений приемника и генератора используются в трехфазных цепях?
3. При каких условиях режим трехфазной цепи считается симметричным?
4. Какая связь между линейными и фазными напряжениями при соединении звездой и при соединении треугольником?
5. Какова связь между линейными и фазными токами при соединении звездой и при соединении треугольником?
6. Какова последовательность расчета трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой?
7. Какова последовательность расчета трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником?
8. Как определяется мощность трехфазной цепи?

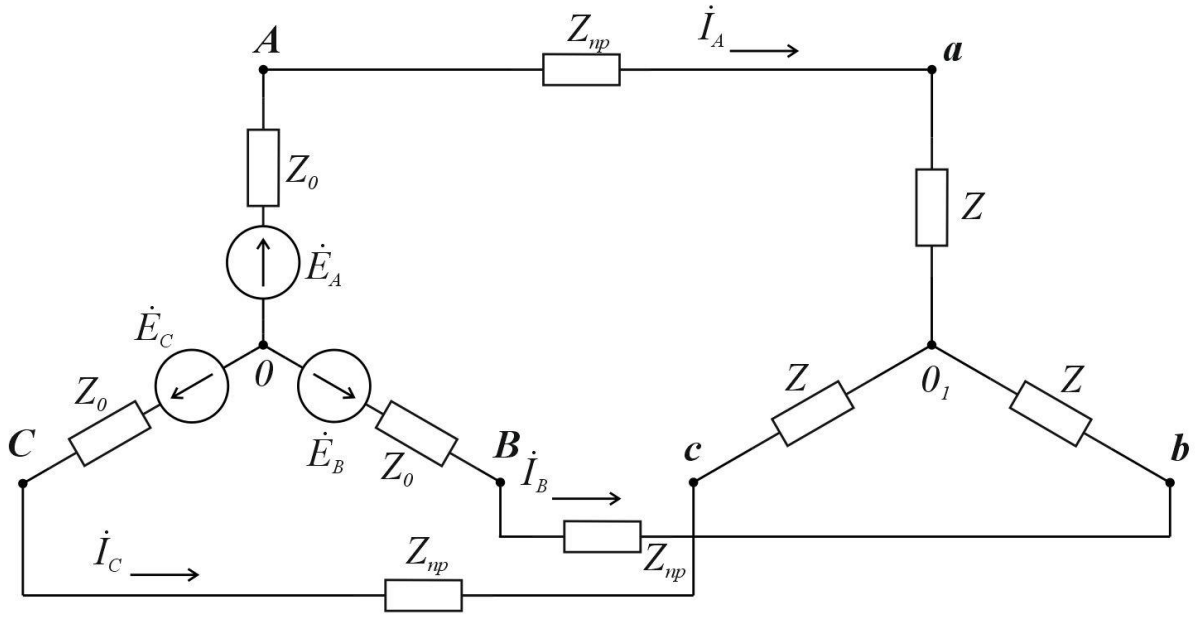
Задачи

Задача 7.1. К симметричному трехфазному генератору с фазной э.д.с. *E=127В* и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_0 = (0{,}3 + +j0{,}9)$*Ом* через линию, сопротивления каждого про-

вода которой $\underline{Z}_{\text{пр}} = (0{,}5 + j1)Ом$, подключена симметричная нагрузка $\underline{Z} = = (10 + j6)Ом$, соединенная звездой (рис.7.2, а). Определить ток в каждой фазе, фазное и линейное напряжение генератора, ток, фазное и линейное напряжение нагрузки, мощность доставляемую генератором и расходуемую в нагрузке. Построить векторную диаграмму.

Решение. Ввиду полной симметрии системы напряжение между нулевыми точками генератора и нагрузки равно нулю. Каждую фазу можно рассматривать независимо от других фаз. Так, например,

а)



б)

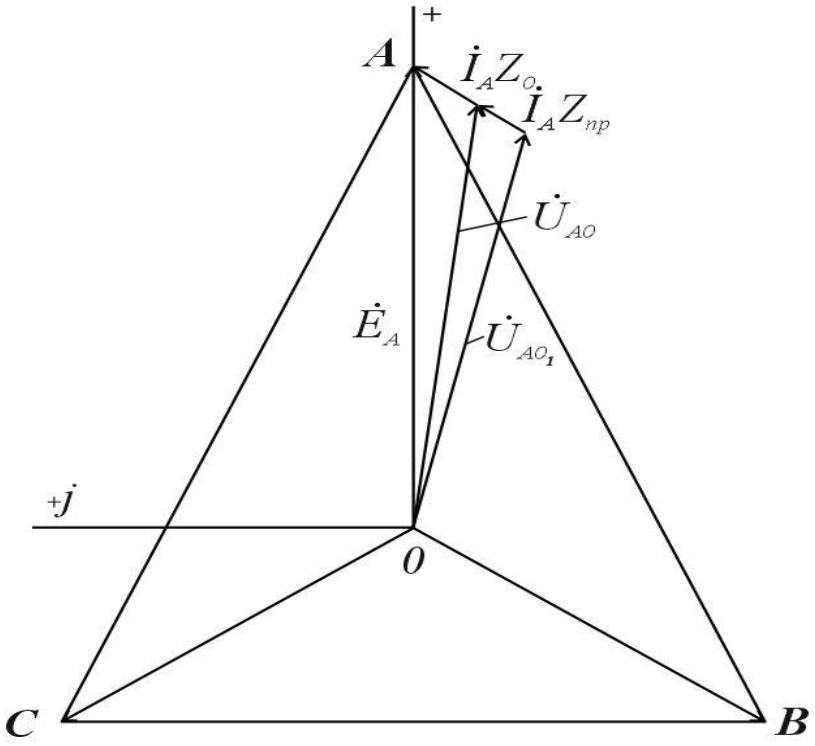


Рис. 7.2

ток в фазе *A* находится на основании закона Ома (полагаем $\dot{E}_A = 127$в):

$$\dot{I}_A = \frac{E}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{\text{пр}} + \underline{Z}} = \frac{127}{10{,}8 + j7{,}9} = 9{,}5e^{-j36{,}17^\circ}\text{ А}.$$

Фазные напряжения на зажимах генератора и нагрузки

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{I}_A\underline{Z}_0 = 127 - 9{,}5e^{-j36{,}17^\circ}.$$
$$(0{,}3 + j0{,}9) = 119{,}7e^{-j2{,}50^\circ}\text{ В};$$
$$\dot{U}_a = \dot{I}_A\underline{Z} = 9{,}5e^{-j36{,}17^\circ}.(10 + j6) = 111e^{-j5{,}17^\circ}\text{ В}.$$

Также напряжения в других фазах сдвинуты соответственно на 120° и 240°:

$$\dot{U}_B = 119{,}7e^{-j122{,}17^\circ}\text{ В};\ \dot{U}_C = 119{,}7e^{-j242{,}50^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}_b = 111e^{-j125{,}17^\circ}\text{ В};\ \dot{U}_b = 111e^{-j245{,}17^\circ}.$$

Линейные напряжения на зажимах генератора и нагрузки

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = 119{,}7e^{-j2{,}50^\circ} - 119{,}7e^{-j122{,}50^\circ} = 208e^{j27{,}50^\circ}\text{ В}.$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_a - \dot{U}_b = 111e^{-j5{,}17^\circ} - 111e^{-j125{,}17^\circ} = 192e^{j24{,}83^\circ}\text{ В}.$$

Мощность, доставляемая генератором,

$$P_\text{г} = 3 \cdot 127 \cdot 9{,}5cos36{,}17^\circ = 2920\text{ Вт}.$$

Мощность в нагрузке $P_\text{н} = 3 \cdot 9.5^2 \cdot 10 = 2710$ Вт.

Векторная диаграмма построена на рис. 7.2, б.

Задача 7.2. К симметричному трехфазному генератору э.д.с. E=230 B и с внутренним сопротивлением $\underline{Z}_0 = (0{,}3 + j0{,}9)Ом$ подключена несимметричная нагрузка, соединенная в звезду с нулевым проводом (рис. 7.3, а). Сопротивления фаз нагрузки $\underline{Z}_a = (2 + j4)Ом$, $\underline{Z}_b = (4 - j8)ом$, $\underline{Z}_c = 5Ом$. Сопротивление каждого провода линии $\underline{Z}_\text{пр} = (0{,}4 + j0{,}3)Ом$, а сопротивление нейтрального провода $\underline{Z}_N = 0{,}5Ом$. Определите токи напряжения на каждой фазе нагрузки и генераторе при наличии нейтрального провода и при его обрыве. Для каждого случая построить векторную диаграмму.

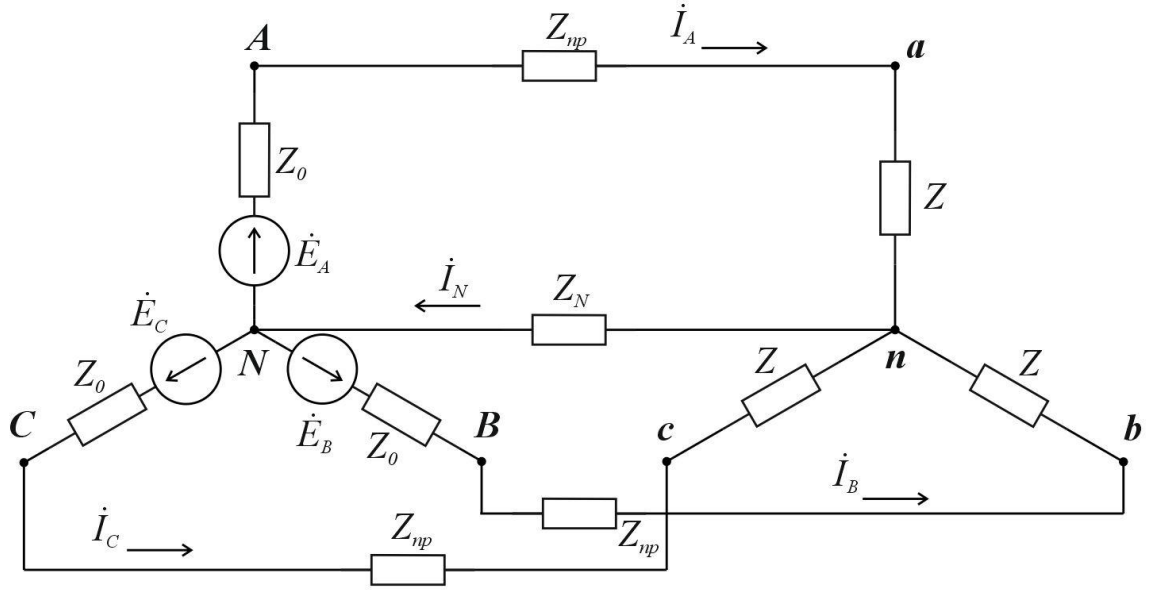


Рис. 7.3, а

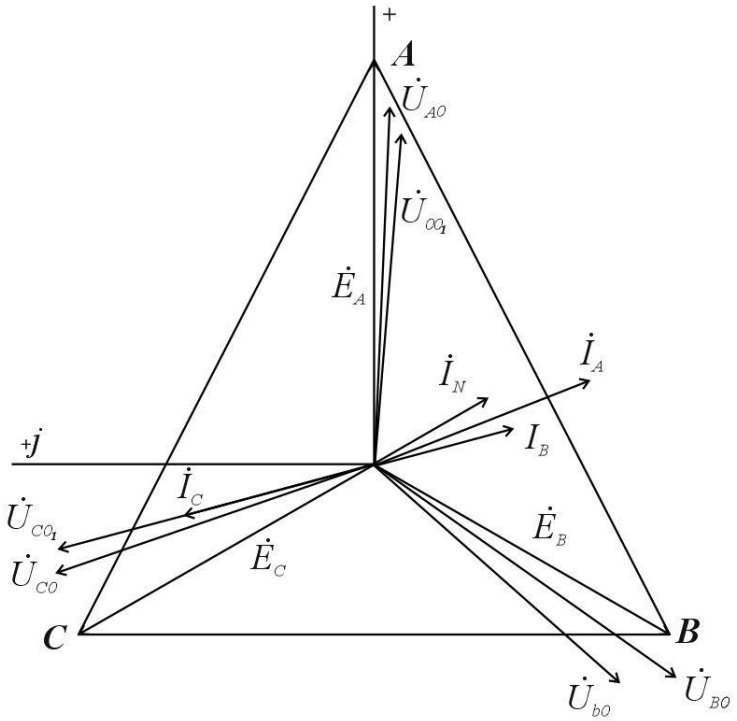


Рис.7.3,б

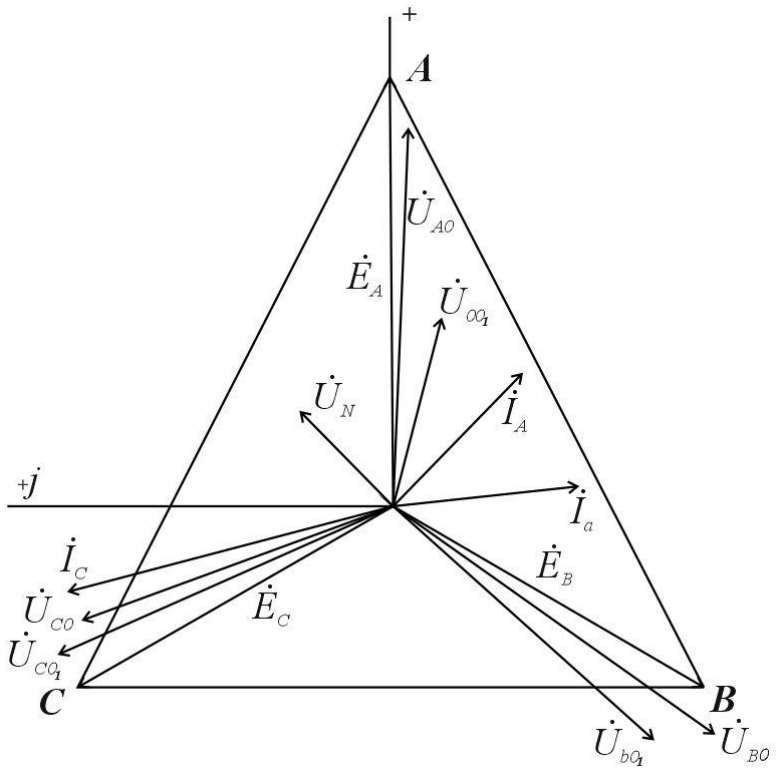


Рис. 7.3, в

Решение. Запишем фазные Э.Д.С. генератора в комплексном виде: $\dot{E}_A = E_A = 230$ В,

$$\dot{E}_B = 230e^{-j120^\circ} = -115(1 + j1{,}73)\text{В};$$

$$\dot{E}_C = 230e^{-j240^\circ} = -115(1 - j1{,}73)\text{В}.$$

Комплексные проводимости фаз:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_0 + \underline{Z}_{\text{пр}}} = \frac{1}{2{,}7 + j5{,}2} = (0{,}0788 - j0{,}152)\ \text{См};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_0 + \underline{Z}_{\text{пр}}} = \frac{1}{4{,}7 + j6{,}8} = (0{,}0688 + j0{,}0995)\ \text{См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_0 + \underline{Z}_{\text{пр}}} = \frac{1}{5{,}7 + j1{,}2} = (0{,}168 - j0{,}0354)\ \text{См};$$

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{Z_N} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \text{См}.$$

При наличии нейтрального провода.
Найдем напряжение между точками n и N:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{230(0{,}0788 - j0{,}152) - -115(1 + j1{,}73)(0{,}0688 + j0{,}0995) - }{2{,}32 - j0{,}088}$$
$$\frac{-115(1 - j1{,}73)(0{,}168 - j0{,}0354)}{2{,}32 - j0{,}088} = 8{,}03 - j9{,}38 = 12{,}4e^{-j49{,}42^{\circ}}\text{В},$$

а по формуле (7.6) все токи:

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_A = 18{,}9 - j33 = 37{,}9e^{-j60{,}17^{\circ}}A;$$

$$\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_B = 10{,}4 - j25{,}2 = 27{,}4e^{-j67{,}67^{\circ}}A;$$

$$\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_C = -13{,}3 + j39{,}4 = 41{,}6e^{j108{,}58^{\circ}}A;$$

$$\dot{I}_N = \dot{U}_{nN}\underline{Y}_N = 16 - j18{,}8 = 24{,}8e^{-j49{,}42^{\circ}}A.$$

Проверка показывает, что $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C - \dot{I}_N = 0$.
Напряжение на фазах нагрузки:

$$\dot{U}_a = \dot{I}_A\underline{Z}_a = 170e^{j3{,}25^{\circ}}\text{В}; \quad \dot{U}_b = \dot{I}_B\underline{Z}_b = 230e^{-j134{,}33^{\circ}}\text{В};$$

$$\dot{U}_c = \dot{I}_C\underline{Z}_c = 208e^{j108^{\circ}58'}\text{В}.$$

Напряжение на каждой фазе генератора:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{I}_A\underline{Z}_0 = 195e^{-j2{,}08^{\circ}}\text{В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{I}_B\underline{Z}_0 == 243e^{-j125^{\circ}}\text{В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{I}_C\underline{Z}_0 = 213e^{j110{,}75^{\circ}}\text{В}.$$

На рис 7.3,б построена векторная диаграмма.
При обрыве нейтрального провода $(Y_N = 0)$.

$$\dot{U}'_{nN} = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = 70{,}8 - j51{,}8 = 87{,}6e^{-j36{,}25^\circ}\text{ В}.$$

Токи:

$$\dot{I}'_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_{nN})\underline{Y}_A = 20{,}4 - j20{,}1 = 28{,}6e^{-j44{,}67^\circ}\,A;$$

$$\dot{I}'_B = \left(\dot{E}_B - \dot{U}_{nN}\right)\underline{Y}_B = 1{,}9 - j28{,}6 = 28{,}6e^{-j86{,}25^\circ}\,A;$$

$$\dot{I}'_C = \left(\dot{E}_C - \dot{U}_{nN}\right)\underline{Y}_C = -22{,}3 + j48{,}7 = 53{,}6e^{j114{,}67^\circ}\,A.$$

Напряжения на фазах нагрузки:

$$\dot{U}'_a = \dot{I}'_A \underline{Z}_a = 128e^{j18{,}75^\circ}\text{ В};\ \ \dot{U}'_b = \dot{I}'_B \underline{Z}_b = 256e^{-j149{,}67^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}'_c = \dot{I}'_C \underline{Z}_c = 268e^{j114{,}50^\circ}\text{ В}.$$

Напряжение на фазах генератора:

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{I}'_A \underline{Z}_N = 206 - j12{,}3 = 206e^{-j3{,}42^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{I}'_B \underline{Z}_N = -141 - j192 = 239e^{-j125{,}33^\circ}\text{ В};$$

$$\dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{I}'_C \underline{Z}_N = -64{,}5 + j205 = 215e^{j107{,}42^\circ}\text{ В}.$$

Задача 7.3. Схема трехфазной цепи изображена на рис.7.4.

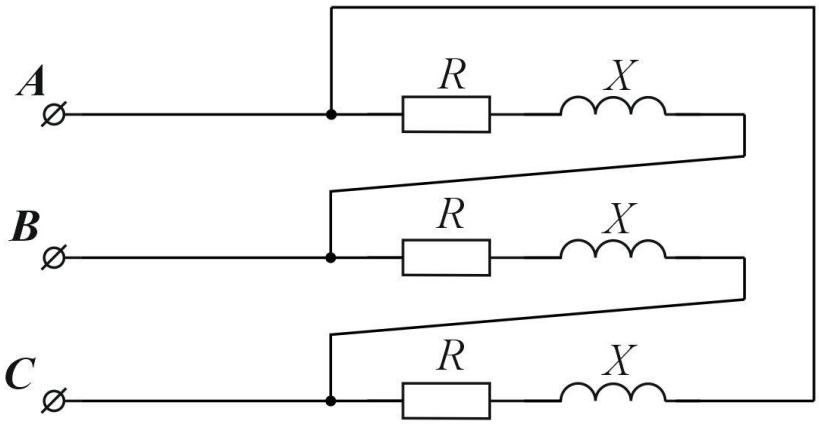


Рис.7.4

Линейные напряжения образуют симметричную систему и равны $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 200\text{В}$. Сопротивления R = 8 Ом, x = 6 Ом.

Найти фазные и линейные токи.

Ответ:$I_ф = 20\ A,\ I_л = 34{,}6\ A.$

Задача 7.4. В цепи, схема которой изображена на рис.7.5. действует симметричная система линейных напряжений $U_л = 220\text{В}$. Сопротивление линейного провода $\underline{Z}_л = 6\ \text{Ом}$, сопротивление нагрузки $\underline{Z}_н = j8\ \text{Ом}$.

Найти токи во всех фазах и построить векторную диаграмму. Определить по диаграмме линейные напряжения на нагрузке.

Ответ:

$I_A = I_B = I_C = 12{,}7\ A;\ U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = 178\ \text{В}.$

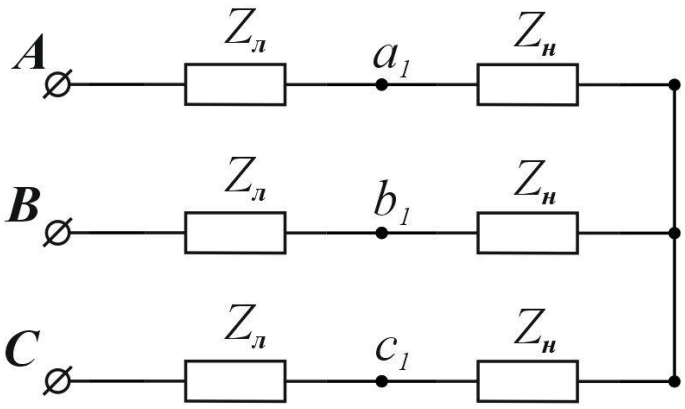


Рис. 7.5

Задача 7.5. Схема трехфазной цепи представлена на рис. 7.6.

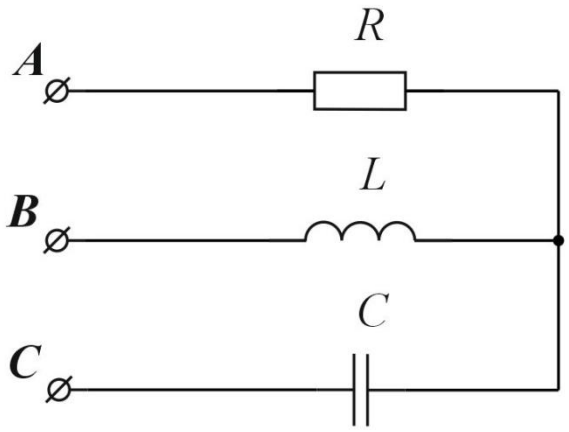


Рис. 7.6

Фазные напряжения генератора образуют симметричную систему, $U_ф = 100$ В. Сопротивление фаз $R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10$ Ом. Определить токи, активную, реактивную, и полную мощность цепи. Построить векторную диаграмму.

Ответ:

$I_A = 17{,}3\ A, I_B = 9e^{-j185^\circ}\ A, I_C = 9e^{-j165^\circ}\ A,$

P = 3кВт, Q = 0, S = 300 ВА.

Задача 7.6 В трехфазной цепи, схема которой изображена на рис 7.7 фазные напряжения генератора равны 100 В и симметричны. Частота *f* = 50Гц.

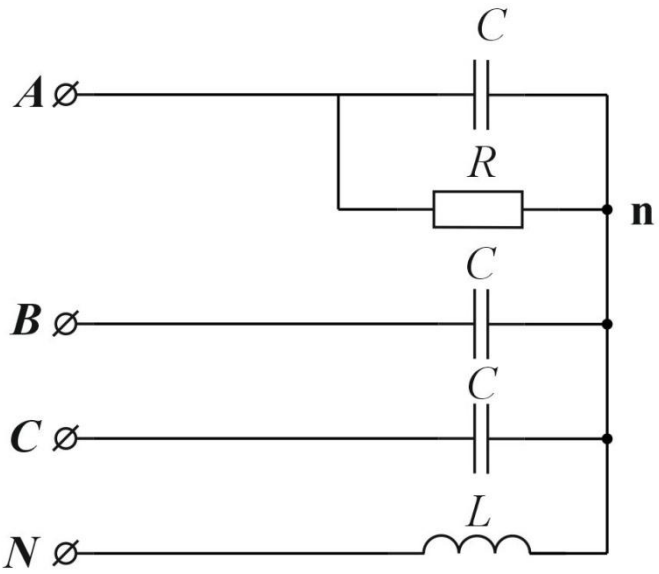


Рис 7.7

Сопротивления конденсаторов, включенных в каждой фазе, $^{1}/_{\omega C} = 100$ Ом. В первой фазе параллельно конденсатору включено активное сопротивление *R* (конечной величины).

Определить величину индуктивности *L*, которую нужно включить в нейтральном проводе для того что бы ток в сопротивлении был равен нулю. Определить фазные токи и ток в нулевом проводе в этом режиме. Построить векторную диаграмму.

Ответ: $L = 0{,}00106$; $\dot{I}_A = 0, \dot{I}_B = 17{,}3e^{-j60^\circ}\,A,$

$$\dot{I}_C = 17{,}3e^{j24^\circ}\,A, \dot{I}_C = 30e^{-j90^\circ}\,A.$$

Задача 7.7. Цепь, схема которой изображена рис. 7.8 подключена к трехфазному генератору с симметричной системой напряжений.

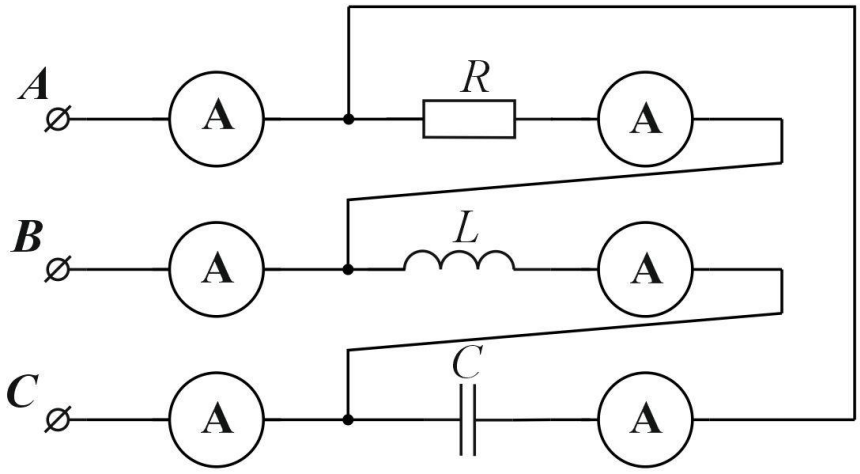


Рис. 7.8

Показания амперметров в фазах нагрузки одинаковы и равны 10 А.

Определить показания амперметров в линейных проводах. Построить векторную диаграмму.

Ответ: $I_A = 19{,}2$ А, $I_B = 19{,}2$ А, $I_C = 10$ А.

Литература: [1, § 6.1 – 6.9; 2, § 12.1 – 12.4; 6, § 10.1 – 10.6]

Занятие 8

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ, С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий цепей с несинусоидальным источником, применение основных соотношений для расчета токов высших гармоник.

Основные положения и соотношения

1. Несинусоидальная периодическая функция (ЭДС, напряжение и ток), если она удовлетворяет условиям Дирихле (что всегда справедливо в реальных физических цепях), может быть разложены в ряд Фурье. Ряд Фурье можно представить в тригонометрической или комплексной формах.

Тригонометрическая форма записи ряда Фурье для ЭДС:

$$e(t) = E_0 + E_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + E_{1m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \cdots +$$
$$+E_{km}(k\,\omega t + \psi_k) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} E_{km}(k\,\omega t + \psi_k).$$

Здесь

E_0 – постоянная составляющая или нулевая гармоника k=0.

$E_{1m}\sin(\omega t + \psi_1)$ – основная или первая гармоника.

$E_{km}(k\omega t + \psi_k)$ – высшая гармоника порядка k, у которой E_{km}-амплитуда, $k\omega$ – частота, ψ_k – начальная фаза. При k=0, $E_{1m} = E_0, \psi_0 = \frac{\pi}{2}$.

При практических расчетах ряд Фурье ограничивают некоторым числом гармоник.

Комплексная форма записи ряда Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{F}_{km} e^{jk\omega t},$$

где

$$\dot{F}_{km} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jk\omega t}\, dt$$

комплексные амплитуды ряда.

2. Совокупность гармонических составляющих, на которые может быть разложена данная периодическая функция *f(t)*, называется спектром этой функции. Наглядное представление о спектральном составе фикции дают графики, называемые амплитудно-частотным или фазо-частотным спектром. При построении их по оси абсцисс откладывают частоты, а по оси ординат – значения амплитуд или, соответственно, начальных фаз.

3. Расчет линейных электрических цепей при действии несинусоидальной периодической ЭДС основан на методе наложе-

ния. Расчет производится для каждой гармоники в отдельности: для постоянной составляющей – методами расчета цепей постоянного тока, для первой и всех высших гармоник – методами расчета цепей синусоидального тока (комплексный метод).

Комплексные амплитуды k-ой гармонической составляющей тока и напряжения на участке цепи связаны законом Ома

$$\dot{I}_{km} = \frac{\dot{U}_{km}}{\underline{Z}_k} = I_{km} e^{j(\psi_k - \varphi_k)},$$

где $\underline{Z}_k$ – комплексное сопротивление участка при частоте $k\omega$.

При расчете следует учитывать, что сопротивления резистивных элементов принимаются независимыми от частоты, а сопротивление реактивных элементов для различных гармоник различны. Для гармоники порядка k:

$$R_k = R = const, \quad x_{Lk} = k\omega L, \qquad x_{Ck} = \frac{1}{k\omega C},$$

поэтому, например, для участка цепи с последовательным соединением *R*, *L* и *C*, комплексное сопротивление для k-ой гармоники будет

$$\underline{Z}_k = R + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right) = Z_k \cdot e^{j\varphi_k},$$

где

$$\underline{Z}_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}, \quad \varphi_k = arctg\,\frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R},$$

4. Мгновенное значение тока (напряжения)на любом участке цепи определяется как сумма мгновенных значений отдельных составляющих (постоянной и всех гармонических). Так, если приложенное напряжение

$$u(t) = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + \ldots + U_{km}(k\,\omega t + \psi_k) + \ldots,$$

то ток, в общем случае будет иметь те же составляющие, т.е.

$$i(t) = I_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + \ldots + I_{km}(k\,\omega t + \psi_k - \varphi_k) + \ldots.$$

Зависимость реактивных и полных сопротивлений, а также сдвигов фаз, от порядка гармоники приводит к тому, что в общем случае форма кривой тока не будет подобна форме кривой приложенного напряжения. Для некоторых гармоник возможно возникновение резонансных явлений.

5. Действующее значение периодического несинусоидального тока (напряжение, ЭДС) определяется как корень квадратный из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармонических составляющих

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots} = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{I_{km}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \ldots} =$$

$$= \sqrt{I_0^2 + 0{,}5(I_{1m}^2 + \ldots + I_{km}^2 + \ldots)}$$

6. Активная (средняя за период) мощность P определяется как сумма мощности постоянной составляющей и активных мощностей всех гармоник.

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + \ldots + U_k I_k \cos\varphi_k + \ldots$$

Реактивная мощность Q определяется как сумма реактивных мощностей всех гармоник

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + \ldots + U_k I_k \cos\varphi_k + \ldots$$

Полная мощность S определяется как произведение действующих значений напряжения и тока

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

В цепи периодического несинусоидального тока активная, реактивная, и полная мощности связанны соотношением

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2,$$

где $T = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}$ – так называемая мощность искажения.

7. Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}.$$

При замене периодических несинусоидальных функций напряжения и тока эквивалентными синусоидами, коэффициент мощности λ может быть истолкован как косинус угла сдвига фаз между синусоидами

$$\lambda = cos\varphi.$$

8. Для характеристики периодических несинусоидальных ЭДС (напряжение, токов) применяются следующие коэффициенты:

коэффициент формы кривой ЭДС – отношение действующего значения к среднему по модулю значению за период

$$K_{\Phi} = \frac{E}{E_{ср}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2\,(t)dt}}{\frac{1}{T}\int_0^T e\,(t)dt},$$

коэффициент амплитуды – отношение максимального значения ЭДС к действующему

$$K_a = \frac{E_m}{E},$$

коэффициент искажения – отношения действующего значения основной гармоники несинусоидальной ЭДС к действующему значению ЭДС

$$K_u = \frac{E_1}{E}.$$

Контрольные вопросы

1. Какова последовательность расчета линейных цепей при несинусоидальных периодических воздействиях?
2. Как влияет характер цепи на форму кривой тока при несинусоидальном напряжении?
3. Каковы особенности резонансных явлений в цепи при несинусоидальном напряжении?
4. Как определяется действующее значение несинусоидального напряжения (тока)?
5. Как определяется мгновенное значение несинусоидального напряжения (тока)?
6. Как рассчитывается активная, реактивная, полная мощность при несинусоидальных напряжениях и токах?
7. Как определить мощность искажения?
8. Как определяется коэффициент мощности в цепи с несинусоидальной периодической ЭДС?
9. Какие коэффициенты применяются для характеристик периодических несинусоидальных функций?

Задача 8.1. Цепь, состоящая из последовательно соединенных реостата с сопротивлением R = 20 Ом, катушки с индуктив-

ностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатора с емкостью $C = 11{,}25$ мкФ (рис. 8.1), включена к источнику с напряжением

$$u = [310\sin(\omega t - 15^{\circ}) + 77{,}5sin3\omega t + 40\sin(5\omega t + 18{,}75^{\circ}]\text{В}.$$

Частота основной гармоники $f = 50$ Гц. Определить мгновенное и действующее значение тока в цепи

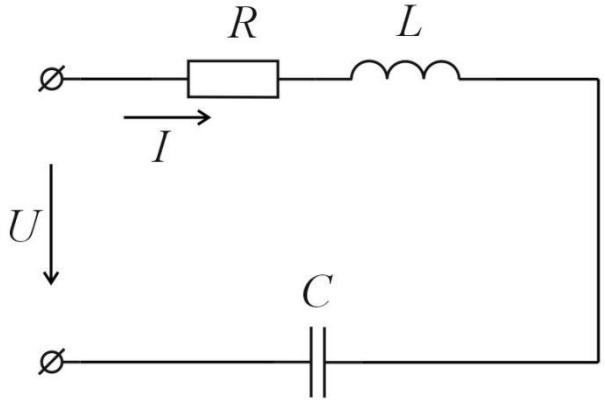


Рис.8.1

Решение. 1. Расчет основной (первой) гармоники тока. Частота основной гармоники

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Первая гармоника напряжения

$$u_{(1)} = 310\sin(314 - \sin(\omega t - 15^{\circ})\,\text{В}$$

Комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_{m(1)} = 310e^{-j15^{\circ}}\,\text{В}.$$

Комплексное сопротивление цепи для первой гармоники

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C} = 20 + j\left(314 \cdot 0{,}1 - \frac{1 \cdot 10^{6}}{314 \cdot 11{,}25}\right) =$$

$$= 20 - j251{,}2 = 252e^{-j85{,}42^{\circ}}\ \text{Ом}.$$

Сдвиг фаз $\varphi_1 = -85{,}42^\circ$, т. е. для первой гармоники цепь имеет емкостной характер.

Комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_{m(1)} = \frac{\dot{U}_{m(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{310e^{-j15^\circ}}{252e^{-j85{,}42^\circ}} = 1{,}23e^{-j70{,}42^\circ} A.$$

Мгновенное значение первой гармоники тока

$$i_{(1)} = 1{,}23\sin(\omega t + 70{,}42^\circ) A.$$

Действующее значение первой гармоники тока

$$I_{(1)} = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}23}{1{,}41} = 0{,}87A.$$

2. Расчет третьей гармоники тока

Частота третьей гармоники $3\omega = 3 \cdot 14 = 942 рад/с.$

Третья гармоника напряжения $u_{(3)} = 77{,}5sin3\omega t$ В.

Комплексная амплитуда напряжения $\dot{U}_{m(3)} = 77{,}5$ В.

$$\underline{Z}_{(3)} = R + j\left(3\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= 20 + j\left(3 \cdot 314 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{3 \cdot 314 \cdot 11{,}25 \cdot 10^6}\right) = 20 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_{m(3)} = \frac{\dot{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{77{,}5}{20} = 3{,}87 \text{ А}.$$

Мгновенное значение третьей гармоники тока

$$i_{(3)} = 3{,}87 sin3\omega t \quad A.$$

Действующее значение третьей гармоники тока

$$I_{(3)} = \frac{\dot{I}_{m(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{3{,}87}{1{,}41} = 2{,}73\ A.$$

3. Расчет пятой гармоники тока. Частота пятой гармоники

$$5\omega = 5 \cdot 314 = 1570 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Пятая гармоника напряжения

$$u_{(5)} = 40 \sin(5\omega t + 18{,}75^{\circ})\ \text{В}.$$

Комплексная амплитуда напряжений

$$\dot{U}_{m(5)} = 40 e^{j18{,}75^{\circ}}\ \text{В}.$$

Комплексное сопротивление цепи для пятой гармоники

$$\underline{Z}_{(5)} = R + j\left(5\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) =$$

$$= 20 + j\left(5 \cdot 314 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{5 \cdot 314 \cdot 11{,}25 \cdot 10^{6}}\right) =$$

$$= 20 + j100{,}5 = 102{,}5 e^{j78{,}75^{\circ}}\ \text{Ом}.$$

Сдвиг фаз $\varphi_5 = 78{,}75^{\circ}$, т. е. для пятой гармоники цепь имеет индуктивный характер.

Комплексная амплитуда тока

$$\dot{I}_{m(5)} = \frac{\dot{U}_{m(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{40{,}2e^{j18{,}75^\circ}}{102{,}5e^{j78{,}75^\circ}} = 0{,}391e^{-j60^\circ}\ A.$$

Мгновенное значение тока пятой гармоники

$$i_{(5)} = 0{,}391\sin(5\omega t - 60^\circ)A.$$

Действующее значение пятой гармоники тока

$$\dot{I}_{(5)} = \frac{\dot{I}_{m(5)}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}391}{1{,}41} = 0{,}276\ A.$$

4. Мгновенное значение тока в цепи

$$i = i_{(1)} + i_{(3)} + i_{(5)} = [1{,}23\sin(\omega t + 70{,}42^\circ) + 3{,}87 + sin3\omega t + 0{,}391\sin(5\omega t - 60^\circ)].$$

Анализируя полученный результат, можно видеть влияние характера цепи на форму кривой тока. Для третьей гармоники тока имеет место резонанс напряжений, поэтому третья гармоника в кривой тока резко усилена.

5. Действующее значение тока в цепи

$$I = \sqrt{\left(\frac{I_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{m(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{0{,}87^2 + 2{,}73^2 + 0{,}276^2} = 2{,}87\ A.$$

Задача 8.2. К некоторой электрической цепи приложено напряжение

$$u = [\sqrt{2}\cdot 150\sin(\omega t + 83^\circ) + \sqrt{2}\cdot 28\sin(3\omega t - 65^\circ) + +\sqrt{2}\cdot 2{,}97\sin(5\omega t + 34^\circ)]\ \text{В}.$$

Ток на входе этой цепи равен

$$i = [\sqrt{2} \cdot 23{,}1 \sin(\omega t + 99{,}25^{\circ}) + \sqrt{2} \cdot 10{,}8 \sin(3\omega t - 74{,}20^{\circ}) +$$

$$+\sqrt{2} \cdot 2{,}97 \sin(5\omega t - 44{,}77^{\circ})]\ A.$$

Определить действующее значения напряжения и тока, активную, полную и реактивную мощность, коэффициент мощности цепи, мощность искажения и коэффициент искажения.

Решение. 1. Действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2 + U_{(5)}^2} = \sqrt{150^2 + 28^2 + 15^2} = 153 \text{ В}.$$

1. Действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2} = \sqrt{23{,}1^2 + 10{,}8^2 + 2{,}97^2} = 25{,}7\ A.$$

2. Полная мощность

$$S = UI = 153 \cdot 25{,}7 = 3950 \text{ ВА}.$$

3. Активная мощность

$$P = U_{(1)} I_{(1)} cos\varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} cos\varphi_{(3)} + U_{(5)} I_{(5)} cos\varphi_{(5)} =$$

$$= 150 \cdot 23{,}1 \cos(83^{\circ} - 99{,}25^{\circ}) + 28 \cdot 10{,}8 \cos(-65^{\circ} + 74{,}20^{\circ}) +$$

$$+15 \cdot 2{,}97 \cos(34^{\circ} + 44{,}77^{\circ}) = 3570 \text{ Вт}.$$

4. Реактивная мощность

$$Q = U_{(1)} I_{(1)} sin\varphi_{(1)} + U_{(3)} I_{(3)} sin\varphi_{(3)} + U_{(5)} I_{(5)} sin\varphi_{(5)} =$$

$$= 150 \cdot 23{,}1 \sin(-16{,}25^\circ) + 28 \cdot 10{,}8 sin 9{,}33^\circ +$$

$$+15 \cdot 2{,}97 sin 78{,}77^\circ = -902 \text{ Вар.}$$

5. Коэффициент мощности цепи

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{3570}{3970} = 0{,}908.$$

6. Мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{3950^2 - 3570^2 - (-902)^2} = 1390 \text{ ВА}$$

7. Коэффициент искажения

$$K_u = \frac{I_{(1)}}{\sqrt{I_{(1)}^2 + I_{(3)}^2 + I_{(5)}^2}} = \frac{23{,}1}{\sqrt{23{,}1^2 + 10{,}8^2 + 2{,}97^2}} = 0{,}9$$

Задача 8.3. К цепи, схема которой изображена на рис. 8.2 приложено напряжение

$$u = [20 + \sqrt{2} \cdot 150 \sin(\omega t + 83^\circ) + \sqrt{2} \cdot 15 \sin(5\omega t + 34^\circ)] \text{ В}$$

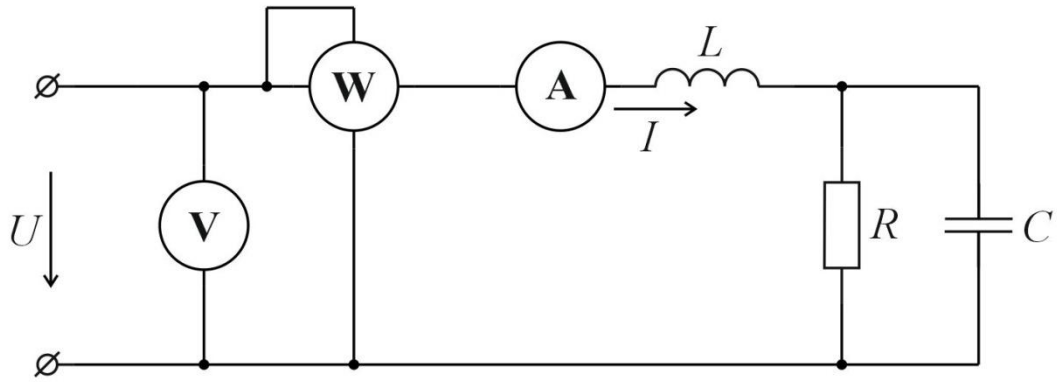


Рис. 8.2

Сопротивление R = 8 Ом, $\omega L = 1{,}5$ Ом, $\frac{1}{\omega C} = 15$ Ом.

Определить показания приборов электродинамической системы.

Решение. Поскольку амперметр и вольтметр электродинамической системы показывают действующие значения тока и напряжения, а ваттметр измеряет активную мощность, задача заключается в расчете этих величин.

1. Расчет постоянной составляющей тока.

Напряжение $U_0 = 20$ В

Сопротивление цепи R = 8 Ом

Ток в цепи

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{20}{8} = 2{,}5 \text{ Ом}.$$

2. Расчет первой гармоники тока.

Комплексное напряжение $\dot{U}_{(1)} = 150e^{j83^\circ}$ В

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{(1)} = j\omega L + \frac{R\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{\omega C}} = j1{,}5 + \frac{8(-j15)}{8 - j15} = 6{,}5e^{-j16{,}25^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексный ток

$$\dot{I}_{(1)} = -\frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{150e^{j83^\circ}}{6{,}5e^{-j16{,}25^\circ}} = 23{,}1e^{j99{,}25^\circ} \text{ А}$$

3. Расчет пятой гармоники

Комплексное напряжение $\dot{U}_{(5)} = 15e^{j34^\circ}$ В.и

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{(5)} = j5\omega L + \frac{R\left(-j\frac{1}{5\omega C}\right)}{R - j\frac{1}{5\omega C}} = j7{,}5 + \frac{8(-j3)}{8 - j3} = 5{,}05e^{j78{,}77^\circ}\ \text{Ом}.$$

Комплексный ток

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(5)}}{Z_{(5)}} = \frac{15e^{j34^\circ}}{5{,}05e^{j78{,}77^\circ}} = 2{,}97e^{-j43{,}23^\circ}\ \text{А}.$$

4. Показания вольтметра

$$U = \sqrt{U_{(0)}^2 + U_{(1)}^2 + U_{(5)}^2} = \sqrt{20^2 + 150^2 + 15^2} = 152\ \text{В}.$$

5. Показания амперметра

$$I = \sqrt{I_{(0)}^2 + I_{(1)}^2 + I_{(5)}^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 23{,}1^2 + 2{,}97^2} = 2{,}5\ \text{А}.$$

6. Показания ваттметра

$$P = U_{(0)}I_{(0)} + U_{(1)}I_{(1)}cos\varphi_{(1)} + U_{(5)}I_{(5)}cos\varphi_{(5)} =$$

$$= 20 \cdot 2{,}5 + 150 \cdot 23{,}1\cos(-16{,}25^\circ) +$$

$$+15 \cdot 2{,}97\cos 78{,}77^\circ = 3400\ \text{Вт}.$$

Задача 8.4. Цепь состоит из последовательно соединенных R = 50 Ом, L = 0,05 Гн и C = 5 мкФ.

Определить мгновенное значение тока цепи, действующее значение напряжения на конденсаторе и активную мощность, расходуемую в цепи, если напряжение на зажимах цепи

$$u = \left[40 + 120sin1000t + 60\sin\left(2000t + \frac{\pi}{4}\right) + 50\sin\left(5000t - \frac{\pi}{3}\right)\right] \text{В}.$$

Ответ:
$i = [0{,}76\sin(1000t + 71{,}57^{\circ}) + 1{,}2\sin(2000t - 30^{\circ}) - -0{,}23\sin(5000t + 43{,}38^{\circ})]$ А, $U_C = 143$ В, $P = 51{,}8$ Вт.

Задача 8.5. К зажимам цепи, схема которой изображена на рис. 8.5 приложено напряжение

$$u = \left[30 + 120sin1000t + 60\sin\left(2000t + \frac{\pi}{4}\right) + 40\sin\left(4000t - \frac{\pi}{6}\right)\right] \text{В}.$$

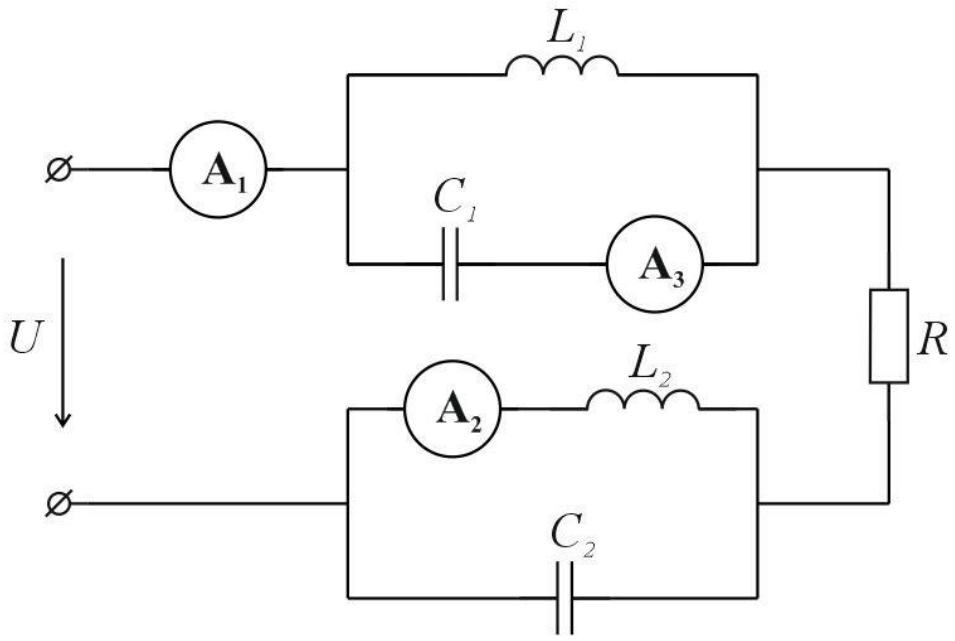


Рис. 8.3

Параметры цепи:
$L_1 = 40$мГн, $C_1 = 20$ мкФ, $L_2 = 10$мГн, $C_2 = 6{,}25$ мкФ.

Определить показания амперметров электродинамической системы

Ответ:

$I_{A1} = 1{,}73\ A, \qquad I_{A2} = 2{,}83\ A, \qquad I_{A3} = 2{,}25\ A.$

Задача 8.6. К зажимам цепи, схема которой изображена на рис. 8.4 приложено напряжение

$$u = [150 + 100sin\omega t + 50sin3\omega t]\text{В}.$$

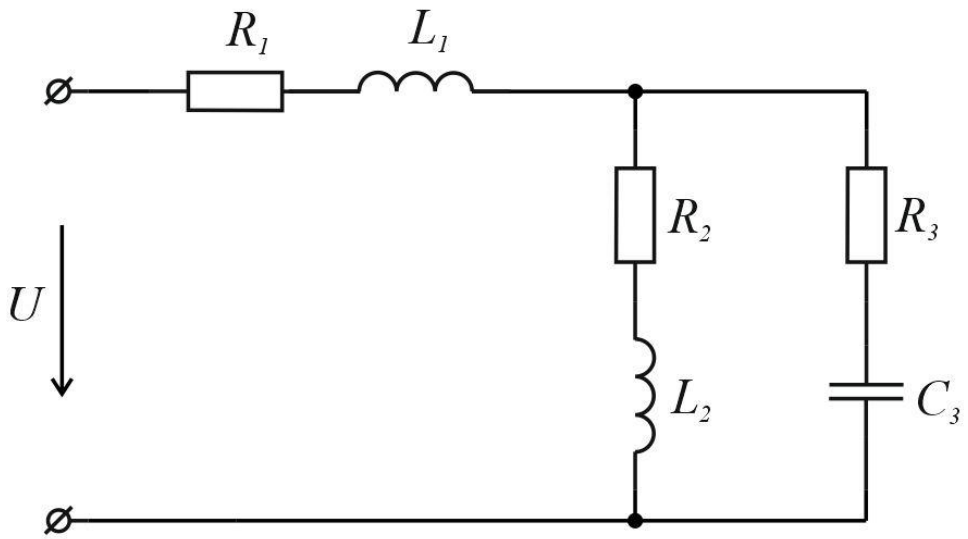


Рис. 8.4

Определить мгновенное значение токов в ветвях и активную мощность, расходуемую в цепи.

Ответ:

$i_1 = [0{,}1 + 0{,}0744\sin(\omega t - 42{,}42^\circ) + 0{,}0157\sin(3\omega t - 73{,}33^\circ)\,\text{A},$

$i_2 = [0{,}1 + 0{,}0336\sin(\omega t - 79{,}67^\circ) +$
$+ 0{,}00458\sin(3\omega t - 124{,}33^\circ)\,\text{A},$

$i_3 = [0{,}052 + 0{,}0336\sin(\omega t - 19{,}42^\circ) +$
$+ 0{,}0134\sin(3\omega t - 55{,}5^\circ)\,\text{A},$

$P = 17{,}9\ \text{Вт}.$

Литература: [1], § 7.1–7.12; [2], § 13.1–13.9, [8], § 13.1–13.7.

Занятие 9

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА. КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий переходных процессов в электрических цепях постоянного тока, применение основных соотношений для расчета переходных процессов.

Основные положения и соотношения

Процессы, протекающие в электрических цепях при переходе от одного состояния к другому, называются переходными.

Переходные процессы могут сопровождаться перенапряжением или сверхтоками на отдельных участках цепи. Кроме того, целый ряд устройств автоматики и радиотехники работают длительное время в переходном режиме. Поэтому изучение этих процессов весьма важно для инженерной практики.

Переходный процесс возникает в результате коммутации. Коммутацией называют включения, отключения и переключения ветвей электрической схемы, приводящие к изменению схемы или ее параметров. Считается, что коммутация происходит мгновенно.

При наличии в цепи накопителей энергии: катушек индуктивности и конденсаторов переходный процесс имеет длительность во времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию электрической цепи соответствует определенный запас энергии на индуктивностях и емкостях. Переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием энергии накопителей. При конечной мощности энергия может изменяться только непрерывно.

Здесь рассматриваются переходные процессы в линейных электрических цепях. Поэтому исключаются из рассмотрения случаи, когда при коммутации возникает электрическая дуга (нелинейный элемент).

Если нет специального указания, будем считать, что коммутация проходит в момент времени $t = (0-)$.

Из непрерывности энергии накопителей вытекают законы коммутации.

1. Ток и потокосцепление индуктивности непосредственно перед коммутацией и сразу же после коммутации одинаковы

$$i_L(+0) = i_L(-0), \qquad \psi(+0) = \psi(-0).$$

2. Напряжение на емкости и ее заряд также не меняют своего значения в момент коммутации

$$u_C(+0) = u_C(-0), \qquad q(+0) = q(-0).$$

Токи и напряжения в переходном процессе называют переходными величинами (функциями). Переходная величина определяется полным решением дифференциального уравнения относительно этой функции. Решение дифференциального уравнения может осуществляться различными методами.

Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом

Расчет переходных процессов классическим методом рекомендуется по следующей алгоритмической схеме:

1. Составить систему уравнений энергетического состояния цепи по любому известному методу, описывающую процесс в цепи после коммутации.

2. Найти принужденную составляющую искомой величины, используя для расчета любой известный метод.

3. Записать с точностью до постоянных выражение для свободной составляющей искомой величины. Для этого:

a) Сформировать характеристическое уравнение;

b) Определить его корни;

c) Записать решение.

4. Записать с точностью до постоянных полное решение для искомой величины как сумму принужденной и свободной составляющих.

5. Определить постоянные интегрирования. Для этого:

a) Записать выражения для искомой величины и ее $(n-1)$ производной (где n – порядок характеристического уравнения) при $t=0$;

b) Расчетом установившегося режима в цепи до коммутации и на основе законов коммутации определить независимые начальные условия $i_L(0)=i_L(0+)$; $u_C(0)=u_C(0+)$;

c) С помощью независимых начальных условий и системы уравнений п.1, записанной для $t=0$, определить зависимые начальные условия (значения искомой величины и ее $(n-1)$ производной при $t=0$);

d) Определить постоянные интегрирования, содержащиеся в общем решении для свободной составляющей полного решения.

6. Записать окончательное решение для искомой переходной функции.

Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом

1. Рассчитать цепь до коммутации и рассчитать независимые начальные условия: $i_L(0)=i_L(0-)$ и $u_C(0)=u_C(0-)$.

2. Составить операторную схему. Изображения заданных э.д.с. (токов) найти по таблице соответствия между оригиналами и изображениями. Ненулевые независимые начальные условия учесть введением внутренних э.д.с. В ветвях, содержащих индуктивные элементы, внутренние э.д.с. равны $Li_L(0)$ и по направлению совпадают с положительным направлением тока. В ветвях с емкостными элементами внутренние э.д.с. равны $\frac{U_C}{p}$ и противоположны положительным направлениям $u_C(0)$.

3. Определить по операторной схеме изображение искомой величины любым методом (метод контурных токов, метод узловых напряжений, метод эквивалентного источника и т.д.)

4. Найти оригинал искомой величины, пользуясь теоремой разложения или таблицами соответствия оригиналов и изображений.

Контрольные вопросы

1. Какой процесс называют переходным?
2. Сформулируйте законы коммутации?
3. В чем заключается классический метод расчета переходных процессов?
4. Какие начальные условия называют независимыми?
5. Какие начальные условия называют зависимыми?
6. Как связаны изображения и оригиналы в формуле разложения?

Задачи

Классический метод

Задача 9.1. В цепи с постоянной э.д.с. замыкается одно из последовательных соединений (рис. 9.1):
$E = 100$ В, $R = 3$ Ом, $r = 2$ Ом, $L = 0{,}01$ Гн.

Определить ток и напряжение на индуктивности в переходном режиме, построить график тока.

Решение.

1. Записываем дифференциальное уравнение послекоммутационной схемы

$$ri + L\frac{di}{dt} = E$$

2. Полное решение для тока (непрерывной величины) представляем в виде

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}} = i_{\text{пр}} + Ae^{pt},$$

3. Принужденный ток при постоянной э.д.с. совпадает с установившимся конечным током (рис. 9.1, *в*)

$$i_{\text{пр}} = i_{\text{уст}} = \frac{E}{r} = \frac{100}{2} = 50\ A.$$

При постоянном токе $i_{\text{пр}} = const$ индуктивность равносильна закоротке $u_{L\text{пр}} = L\frac{di_{\text{пр}}}{dt} = 0$ и на величину тока не влияет.

4. Начальное $(t = +0)$ значение тока индуктивности согласно закону коммутации равно предкоммутационному $(t = -0)$.

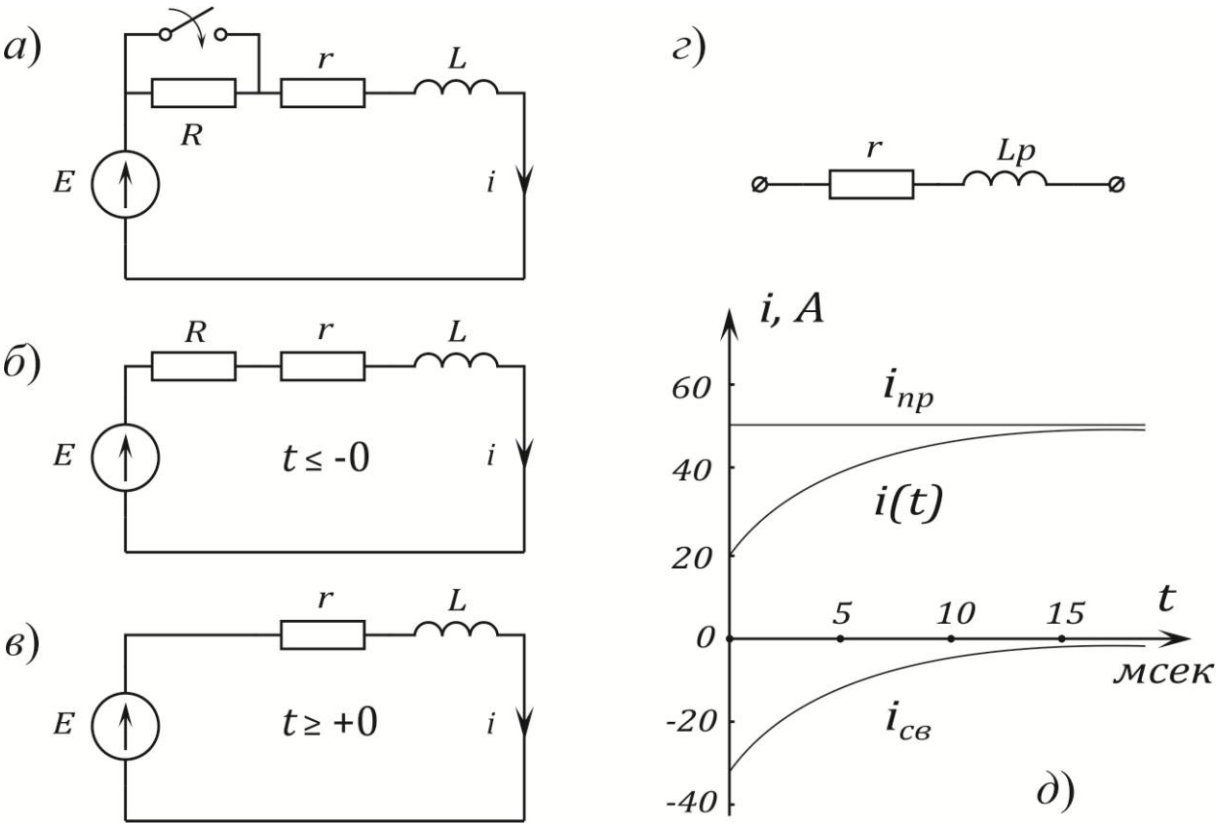


Рис. 9.1

Находим его из схемы *б*, полагая режим установившимся

$$i(+0) = i(-0) = \frac{E}{r+R} = \frac{100}{2+3} = 20\ A.$$

5. Для определения постоянной A подставим начальное значение тока в выражение полного тока

$$i(0) = i_{\text{пр}}(0) + Ae^0, \qquad 20 = 50 + A, \qquad A = -30.$$

6. Составим характеристическое уравнение:

а) По дифференциальному уравнению послекоммутационной схемы, заменяя di/dt на p, i на 1, правую часть E – нулем

$$r + Lp = 0;$$

б) По входному операторному сопротивлению послекоммутационной схемы: $Z(p) = r + pL = 0$.

Находим корень уравнения: $p = -rL = -200$ сек$^{-1}$.

7. Итак, $i(t) = 50 - 30e^{-200t}$ A. Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = 0{,}01 \cdot (-30) \cdot (-200)e^{-200t} = 60e^{-200t} \text{ В}.$$

8. Для построения графика $i(t)$ определяем постоянную времени цепи τ (время, в течение которого свободный ток изменится в e раз, $e \approx 2{,}72$).

$$\tau = \frac{L}{r} = \left|\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{200} = 0.005 \text{ сек} = 5 \text{ мсек}.$$

Решение можно запись через τ.

$$i(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{-\frac{1}{\tau}} = 50 - 30e^{-\frac{t}{0{,}005}}\ A.$$

Задаваясь временами $0\tau, \tau, 2\tau, 3\tau$, находим

$$i_{\text{св}}(0) = -30e^{0} = -30,$$

$$i_{\text{св}}(\tau) = -30e^{-1} = -\frac{30}{2{,}72} = -11,$$

$$i_{\text{св}}(2\tau) = -\frac{11}{2{,}72} = 4{,}06,$$

$$i_{\text{св}}(3\tau) = -\frac{4{,}06}{2{,}72} = -1{,}5.$$

По точкам строим $i_{\text{св}}, i_{\text{пр}}$ и суммируем ординаты алгебраически для получения графика полного тока (рис. 9.1, *д*).

Задача 9.2. В цепь с сопротивлением $R = 10$ Ом и конденсатором $C = 10^{-4}$ Ф, заряженным до напряжения $U_0 = 20$ В, включается постоянная э.д.с. $E = 100$ В (рис. 9.2).

Найти ток переходного процесса $i(t)$. Определить время, в течение которого ток уменьшится в 2 раза. Рассчитать тепловую энергию, выделяющуюся в сопротивлении R за первую миллисекунду переходного процесса.

Решение. Постоянный ток через конденсатор не течет, поэтому принужденный ток $i_{\text{пр}} = 0$. Полный ток через конденсатор равен свободному

$$i(t) = i_{\text{св}} = Ae^{pt}.$$

Начальное значение тока (зависимой величины) находим из послекоммутационной схемы для $t = +0$, используя известное значение непрерывной величины $u_c(0)$

$$Ri(0) + u_C(0) = E, \qquad i(0) = \frac{1}{R}[E - u_C(0)] = 8\ A.$$

Подставляем в решение начальное значение тока $i(0) = Ae^0$, $A = 8$. Характеристическое уравнение, его корень и постоянная времени цепи

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} = 0, \quad p = -\frac{1}{RC}, \quad \tau = RC, \quad p = -1000 \text{ сек}^{-1}.$$

Ток переходного процесса $i(t) = 8e^{-1000t}\ A$.

Начальный ток, после уменьшения в 2 раза будет равным $\frac{8}{2} = 4$ А. Время t_1 такого изменения находим из уравнения

$$4 = 8e^{-1000t}\ A.$$

Логарифмируя это равенство, определяем $t_1 = 0{,}692 \cdot 10^{-3}$сек.

Находим тепловую энергию, выделяющуюся в сопротивлении за первую миллисекунду переходного процесса

$$W = \int_{t=0}^{0{,}001} Ri^2(t)dt = \int_{0}^{0{,}001} 10 \cdot (8e^{-1000t})^2 dt = 0.277 \text{ Дж.}$$

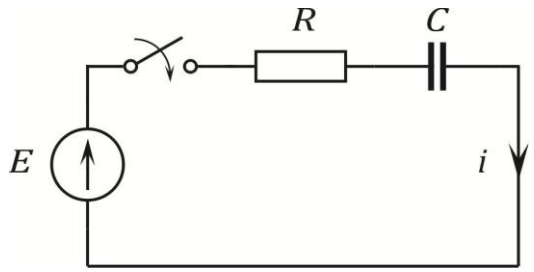


Рис. 9. 2

Операторный метод

Задача 9.3. Дана цепь (рис. 9. 3) $U_1 = 300$ В, $U_2 = 100$ В, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $L = 12$ мГн. В момент $t = 0$ замыкается рубильник. Определить уравнение тока индуктивности.

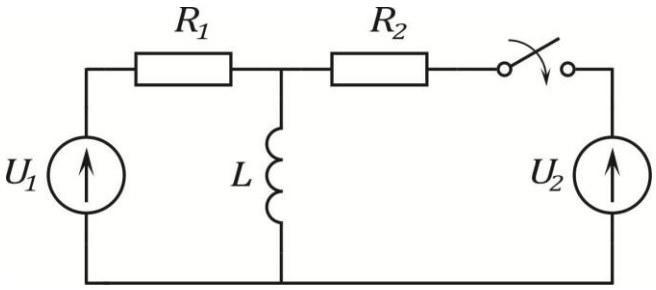


Рис. 9.3

*Решение***.** Операторная схема замещения изображена на рис. 9. 4. Рассматриваемая цепь имеет только одну пару узлов, поэтому $I_L(p)$ проще определить методом узловых напряжений.

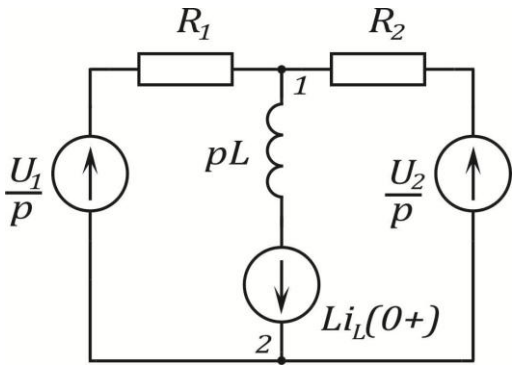


Рис. 9. 4

Принимаем $U^{(2)}(p) = 0$, тогда

$$Y_{11}(p)U^{(1)}(p) = I_{11}(p),$$

где

$$Y_{11}(p) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Lp} = \frac{(R_1 + R_2)Lp + R_1R_2}{R_1R_2Lp},$$

$$I_{11}(p) = \frac{U_1}{R_1p} + \frac{U_2}{R_2p} - \frac{Li_L(0+)}{Lp}.$$

Так как $i_L(0+) = i_L(0-) = \frac{U_1}{R_1}$, что легко установить по схеме до коммутации, то $I_{11}(p) = \frac{U_2}{R_2L}$.

Определяем

$$U^{(1)}(p) = \frac{R_1LU_2}{(R_1 + R_2) + Lp + R_1R_2}.$$

Операторное выражение тока индуктивности находим из соотношения

$$I_L(p) = \frac{U^{(1)}(p) + L\frac{U_1}{R_1}}{Lp} = \frac{U_1\frac{R_1 + R_2}{R_1}Lp + U_1R_2 + U_2R_1}{(R_1 + R_2)L\left[p + \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)L}\right]p} =$$

$$= \frac{1}{(R_1 + R_2)L} \cdot \frac{M(p)}{pN(p)}.$$

Находим корень уравнения $N(p) = 0$:

$$p_1 = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = -1000 = -\beta.$$

Переходя к оригиналу функции по теореме разложения, получим

$$i_L(t) = \frac{1}{(R_1 + R_2)L} \cdot \left| \frac{M(0)}{N(0)} + \frac{M(p_1)}{p_1 N'(p_1)} \cdot e^{p_1 t} \right| =$$

$$= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_2}{R_2} e^{-\beta t} = 15 - 5e^{-10^3 t}.$$

Задача 9.4. Определить токи во второй и третьей ветвях при размыкании ключа в первой ветви (рис. 9.5), если $E = 120$ В; $I = 6$ А; $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом; $L = 0{,}05$ Гн.

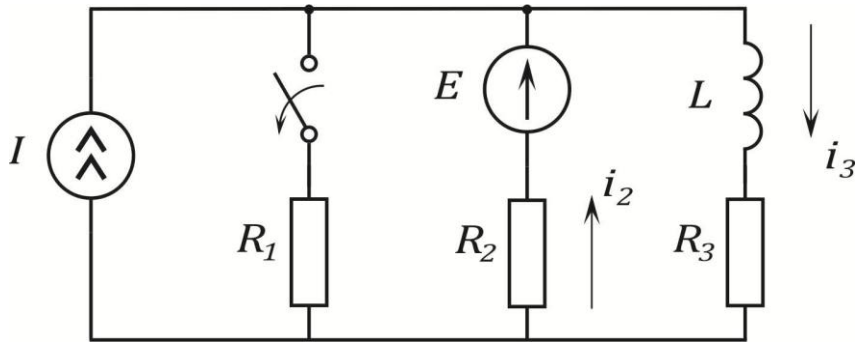


Рис. 9.5

Ответ:

$i_2 = 3 - 3e^{-400t}$ А.

$i_3 = 9 - 3e^{-400t}$ А.

Задача 9.5. В цепи (рис. 9. 6) отключается источник с э.д.с. $E = 120$ В с внутренним сопротивлением $R_1 = 10$ Ом.

Рассчитать и построить зависимости напряжения U_C на конденсаторе $C = 20$ мкФ и тока i в резисторе $R = 50$ Ом.

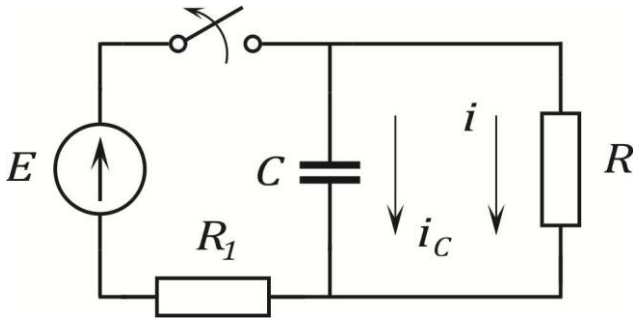


Рис. 9.6

Ответ.

$U_C = 100e^{-1000t}$ В.

$$i = \frac{U_C}{R} = 2e^{-1000t}\ A.$$

Задача 9.6. В цепи (рис. 9. 7) с параметрами: $I = 0{,}3\ A$; $R_1 = 500$ Ом; $C = 10$ мкФ; $R = 250$ Ом происходит размыкание ключа. Найти $U_C(t)$ и $i(t)$.

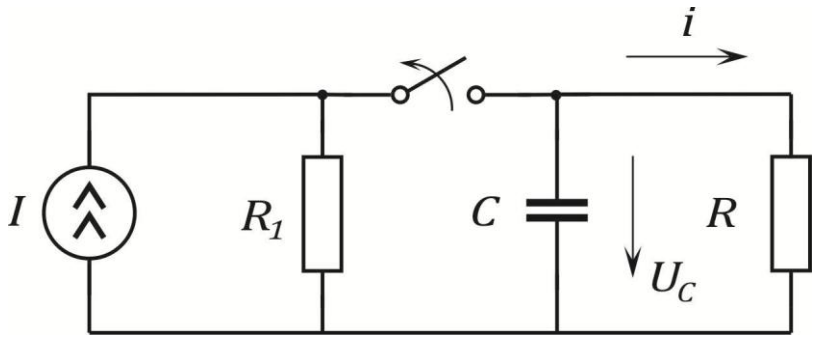


Рис. 9.7

Ответ.

$U_C = 50e^{-400t}$ В.

$i(t) = 0{,}2e^{-400t}$ А.

Литература: [1], § 8.1–8.21; [2], § 14.1–14.8; [8], § 3.1–3.6.

Занятие 10

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий переходных процессов в электрических цепях переменного тока, применение основных соотношений для расчета переходных процессов.

Основные положения и соотношения

1 . Расчет переходных процессов в цепях переменного тока также проводят с использованием классического и операторного методов.

2 . Для расчета переходного процесса при воздействии на электрическую цепь источников напряжения или тока произвольной формы можно применить формулы Дюамеля.

3 . Переходная проводимость.

Используя метод наложения, можно показать, что ток в любой ветви схемы может быть представлен в виде

$$i_k = g_{km} U_m,$$

где g_{km} –собственная ($k = m$) или взаимная ($k \neq m$) проводимость.

Это соотношение, трансформированное в уравнение

$$i_k(t) = g_{km}(t) U_m, \qquad (10.1)$$

будет иметь силу и в переходном режиме, т.е. когда замыкание ключа в m-й ветви подключает к цепи находящийся в этой ветви источник постоянного напряжения U_m. При этом $g_{km}(t)$ является функцией времени и называется переходной проводимостью.

В соответствии с (10.1) переходная проводимость численно равна току в ветви при подключении цепи к постоянному напряжению $U_m = 1\text{В}$.

4 . Переходная функция по напряжению.

Переходная функция по напряжению наиболее часто используется при анализе четырёхполюсников.

Если линейную электрическую цепь с нулевыми начальными условиями подключить к источнику постоянного напряжения *U*, то между произвольными точками *m* и *n* цепи возникнет напряжение

$$u_{km}(t) = h(t)U,$$

где $h(t)$ – переходная функция по напряжению, численно равная напряжению между точками m и n схемы при подаче на ее вход постоянного напряжения $U = 1\text{В}$.

Переходную проводимость $g(t)$ и переходную функцию по напряжению $h(t)$ можно найти расчетным или экспериментальным (осциллографирование) путями.

В качестве примера определим эти функции для цепи на рис. 10.1

В этой схеме

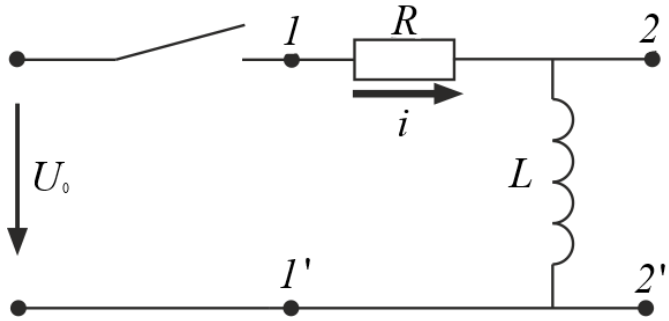


Рис. 10.1

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau_L}}\right),$$

где $$\tau_L = \frac{L}{R},$$

Тогда переходная проводимость

$$g(t) = \frac{i(t)}{U_0} = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{1}{\tau_L}}).$$

Переходная функция по напряжению

$$h(t) = \frac{U_{22'}(t)}{U_0} = \frac{L\frac{di}{dt}}{U_0} = \frac{U_0 e^{-\frac{1}{\tau_L}}}{U_0} = e^{\frac{t}{\tau_L}}.$$

5 . Расчет переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля.

Зная реакцию цепи на единичное возмущающее воздействие, т. е. функцию переходной проводимости $g(t)$ или (и) переходную функцию по напряжению $h(t)$, можно найти реакцию цепи на воздействие произвольной формы. В основе метода – метода расчета с помощью интеграла Дюамеля – лежит принцип наложения.

При использовании интеграла Дюамеля для разделения переменной, по которой производится интегрирование, и переменной, определяющей момент времени, в который определяется ток в цепи, первую принято обозначать как τ, а вторую – как t.

$$i(t) = U(0)g(t) - \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (10.2)$$

Соотношение (10.2) называется интегралом Дюамеля.

Следует отметить, что с использованием интеграла Дюамеля можно определять также напряжение. При этом в (10.2) вместо переходной проводимости $g(t)$ будет входить переходная функция по напряжению.

6 . Алгоритм расчета с использованием интеграла Дюамеля.

1. Определение функции $g(t)$ (или $h(t)$) для исследуемой цепи.

2. Запись выражения $g(t-\tau)$ (или $h(t-\tau)$) путем формальной замены t на $(t-\tau)$.

3. Определение производной $u'(\tau)$.

4. Подстановка найденных функций в (1) и интегрирование определенного интеграла.

В качестве примера использования интеграла Дюамеля определим ток в цепи рис. 10.2

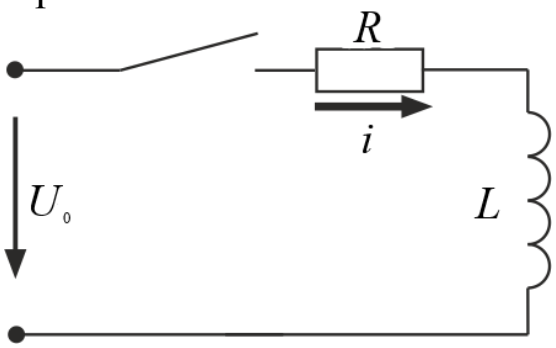


Рис. 10.2

Исходные данные для расчета: $u(t) = 1000e^{-5t}B$, $R = 10$ Ом, $L = 1$ Гн.

1. Переходная проводимость

$$g(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 0{,}1(1 - e^{-10t}).$$

2. $$g(t-\tau) = 0{,}1(1 - e^{-10t}e^{10\tau}).$$

3. $$u'(t) = -5000e^{-5t}.$$

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)\, g(t-\tau)d\tau =$$

$$= 100(1 - e^{-10t}) - 500\int_0^t e^{5\tau}d\tau + 500e^{-10t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau =$$

$$= 100(1 - e^{-10t}) + 100|_0^t e^{-5\tau} + 100e^{-10t}|_0^t e^{5\tau} =$$

$$= 200(e^{-5t} - e^{-10t})A.$$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях расчет переходного процесса проводят с использованием интеграла Дюамеля?
2. Чему равна переходная проводимость?
3. Чему равна переходная функция по напряжению?
4. Запишите формулу интеграла Дюамеля.

Пример расчета переходного процесса методом интеграла Дюамеля.

Методом интеграла Дюамеля, для схемы рис. 10.3 найти и построить $i_1(t)$, $i_2(t), i_3(t)$, а также напряжение на индуктивности $U_l(t)$. Напряжение источника ЭДС: $e(t) = E_m \cdot 1(t), e(t) = E_m \cdot t \cdot 1(t)$.

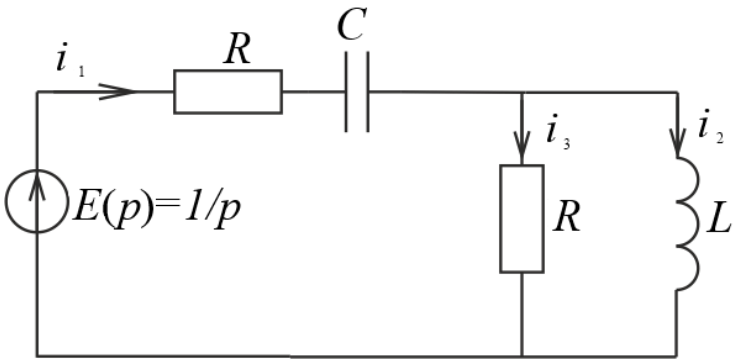


Рис. 10.3

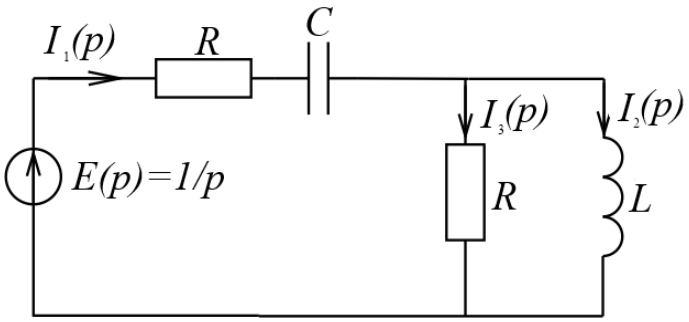


Рис. 10.4

Будем искать ток в индуктивности в переходном режиме. Остальные токи определим по выражению тока i_2, используя уравнения (1), составленные по законам Кирхгофа.

$$i_1 = i_2 + i_3;\ u_L = l\frac{di_2}{dt} = r \cdot i_3, \qquad (1)$$

1. Определяем переходную проводимость Y_{21} операторным методом при н.н.у., как ток $I_2(p)$ при воздействии единичной э.д.с. (рис 10.4)

Операторное изображение $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{E(p)}{R + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{R \cdot pL}{R + pL}} = \frac{1}{p \cdot \left(R + \frac{1}{p \cdot C} + \frac{R \cdot pL}{R + pL}\right)} =$$

$$= \frac{(R + pL) \cdot C}{2 \cdot R \cdot p^2 L \cdot C + R^2 \cdot p \cdot C + p \cdot L + R};$$

По формуле разброса токов операторное изображение $I_2(p)$:

$$I_2(p) = \frac{R \cdot I_1(p)}{R + pL} = \frac{R \cdot C}{2 \cdot R \cdot p^2 L \cdot C + R^2 p \cdot C + p \cdot L + R};$$

Подставим значения параметров в изображение для тока и преобразуем его так, чтобы получить табличное изображение.

$$I_2(p) = \frac{50}{p^2 + 1000p + 500000} =$$

$$= 0{,}1 \cdot \frac{500}{(p + 500)^2 + 500^2} \div 0{,}1e^{-500t} sin500 \cdot t = i_2(t)$$

.

2. Следовательно, переходная проводимость

$$h_{21}(t - \tau) = 0{,}1 \cdot e^{-500(t-\tau)} \sin\left(500 \cdot (t - \tau)\right).$$

Сначала найдем все реакции при воздействии

$e(t) = E_m \cdot 1(t)$, а затем при $e(t) = E_m \cdot t \cdot 1(t)$.

Сначала найдем все реакции при воздействии

$$e(t) = E_m \cdot 1(t).$$

3.1. Определяем $U'(t)$:

$$U'(t) = \frac{d}{dt}(E_m) = 0.$$

4.1. Так как $U'(t) = 0$, то второе слагаемое в формуле выпадает.

$$i_2(t) = U(0) \cdot h_{21}(t) = 100\sqrt{2} \cdot 0{,}1 \cdot e^{-500t} sin500t =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot e^{-500t} sin500t, A$$

Находим остальные токи:

$$i_3(t) = \frac{L}{r}\frac{di_2}{dt} =$$

$$= 10^{-3}\left(10\sqrt{2}\right)(-500e^{-500t} sin500t + 500e^{-500t} cos500t) =$$

$$= 5\sqrt{2}e^{-500t}(cos500t - sin500t), A$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) =$$

$$= 10\sqrt{2} \cdot e^{-500t} sin500t + 5\sqrt{2}e^{-500t}(cos500t - sin500t) =$$

$$= 5\sqrt{2}e^{-500t}(cos500t + sin500t), A$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L\frac{di_2}{dt} = R \cdot i_3(t) = 50\sqrt{2}e^{-500t}(cos500t - sin500t), A$$

Найдем все реакции при воздействии $e(t) = E_m \cdot t \cdot 1(t)$:

3.2. Определяем $U'(\tau)$:

$$U'(t) = \frac{d}{dt}(E_m \cdot t) = E_m = 100\sqrt{2}.$$

4.2. Так как $U(0) = 0$, то первое слагаемое в формуле выпадает.

$$i_2(t) = \int_0^t U'(t) \cdot h_{21}(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t 100\sqrt{2} \cdot 0{,}1 \cdot e^{-500(t-\tau)} \sin\big(500 \cdot (t-\tau)\big)\, d\tau =$$

$$= 10\sqrt{2} \int_0^t e^{-500(t-\tau)} \sin\big(500 \cdot (t-\tau)\big)\, d\tau =$$

$$= -\frac{10\sqrt{2}}{500} \int_{-500t}^{0} e^x sinx dx = -\frac{1}{25\sqrt{2}}\left(\frac{e^x}{2} \cdot (sinx - cosx)\right)\Big|_{-500t}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{25\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}(0-1) - \left(\frac{e^{-500t}}{2}(\sin(-500t) - \cos(-500t))\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t}(sin500t + cos500t), A$$

Находим остальные токи:

$$i_3(t) = \frac{L}{r}\frac{di_2}{dt} =$$

$$= 10^{-3}\left(-\frac{1}{25\sqrt{2}}\right)(-500e^{-500t}(sin500t + cos500t) +$$

$$+500e^{-500t}(sin500t - cos500t)) =$$

$$= \frac{1}{50\sqrt{2}} e^{-500t}\left(-(sin500t + cos500t) + (cos500t - sin500t)\right) =$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t} sin500t,$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) =$$

$$= \frac{1}{25\sqrt{2}} - \frac{1}{25\sqrt{2}} e^{-500t}(sin500t + cos500t), A$$

Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = R \cdot i_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{5} e^{-500t} sin500t.$$

На рис. 10.5 построены графики всех токов и напряжения на индуктивности при $e(t) = E_m \cdot \delta_1(t)$.

На рис. 10.6 построены графики всех токов и напряжения на индуктивности при $e(t) = E_m \cdot t \cdot \delta_1(t)$.

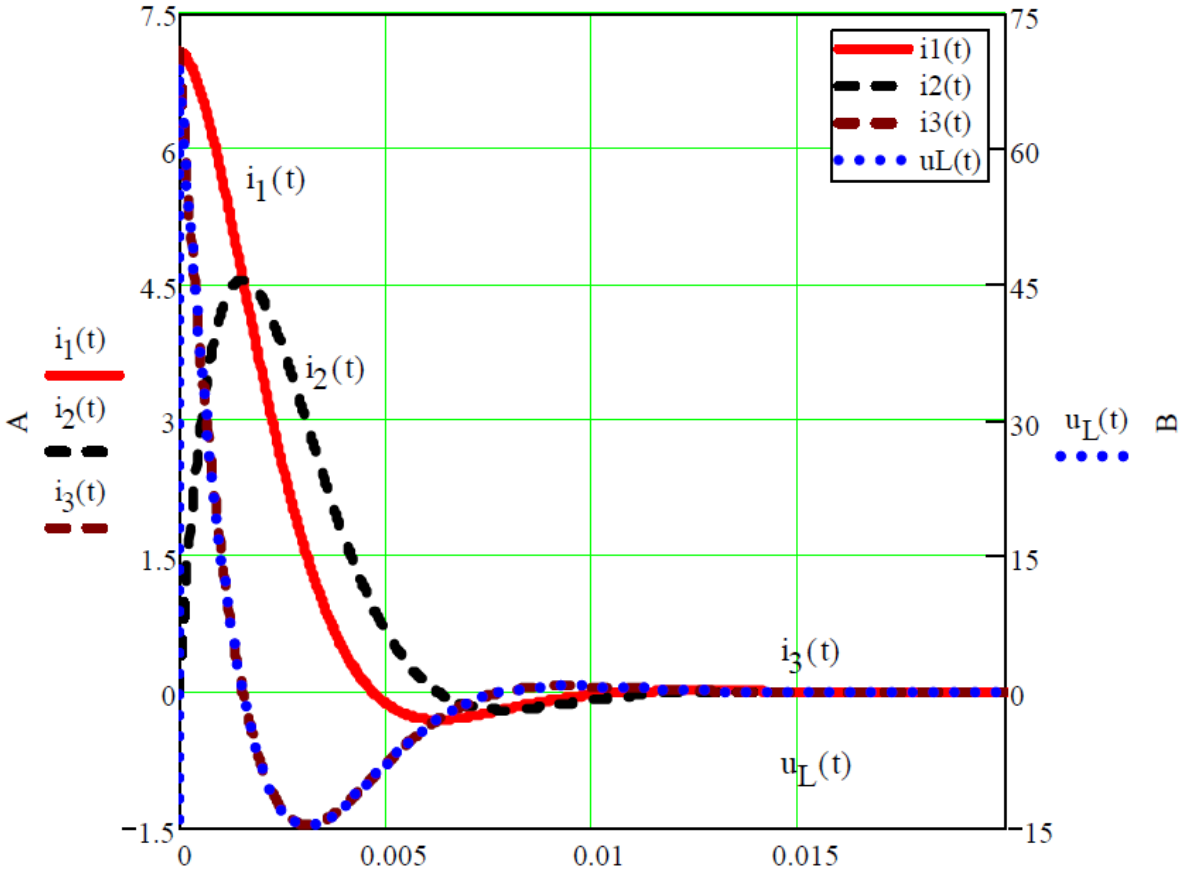


Рис. 10.5

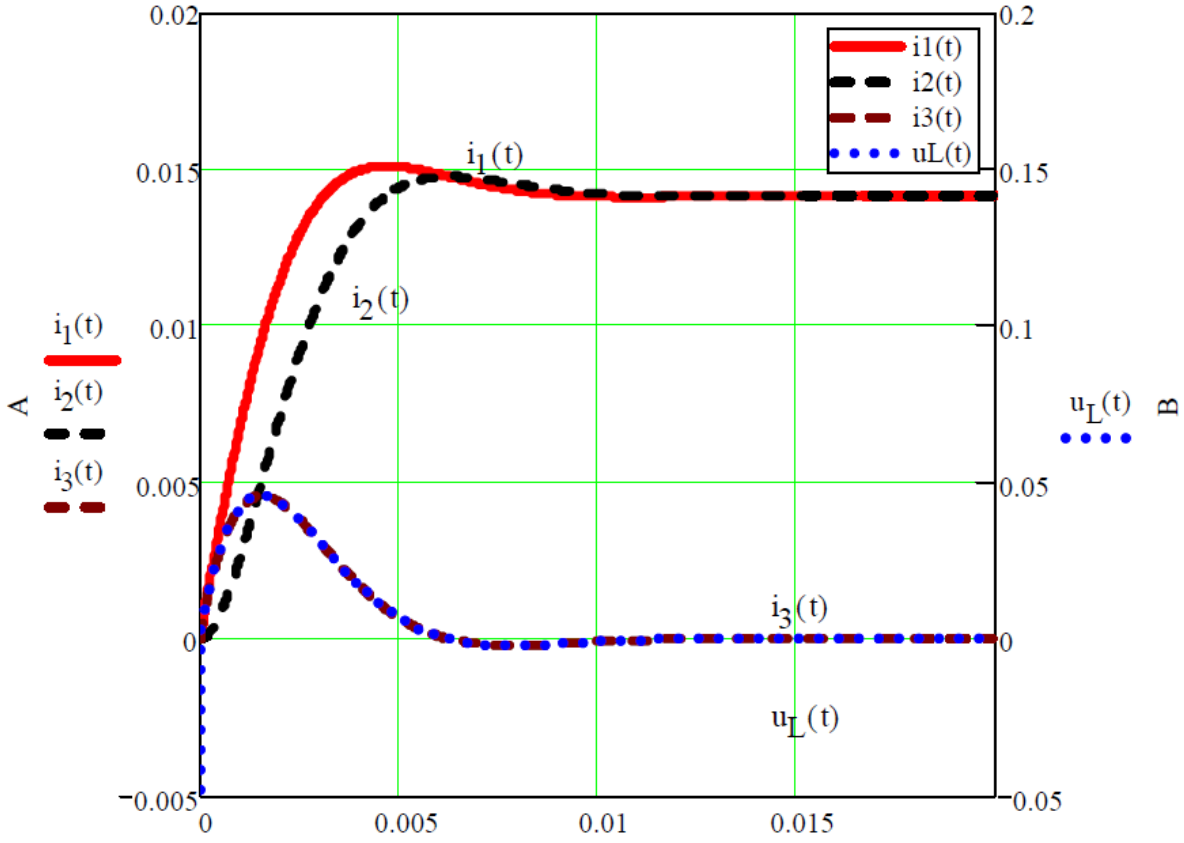


Рис. 10.6

Пример расчета переходного процесса в цепи переменного тока классическим методом.

В цепи рис. 10.7 размыкается ключ К. При этом начинается процесс перехода от одного установившегося режима к другому. Параметры элементов: $e = 100\sqrt{2}$ В, $\omega = 1000c^{-1}$, $L = 0{,}01$ Гн, $C = 0{,}0001$ Ф, $R = 10$ Ом.

Определить переходные функции токов.

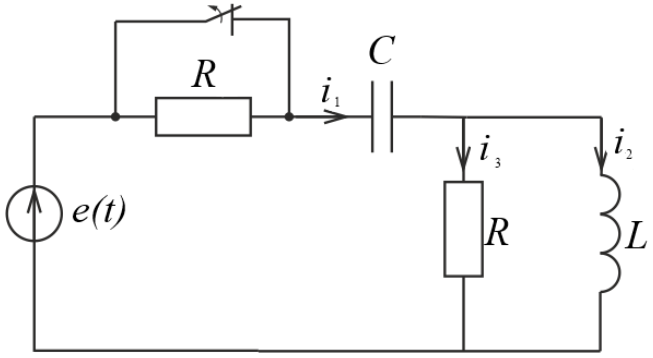


Рис. 10.7

Решение. Составим систему уравнений электрического состояния цепи для послекоммутационной схемы

$$i_1 = i_2 + i_3, Ri_1 + U_c + L\frac{di_2}{dt} = e(t), U_L = L\frac{di_2}{dt} = Ri_3.$$

Будем искать ток в индуктивности в переходном режиме. Остальные токи определим по выражению тока , используя уравнение (1).

Рассчитываем принужденную составляющую тока i_2. Воспользуемся для расчета комплексным методом. Для комплексной схемы рис. 10.8 имеем:

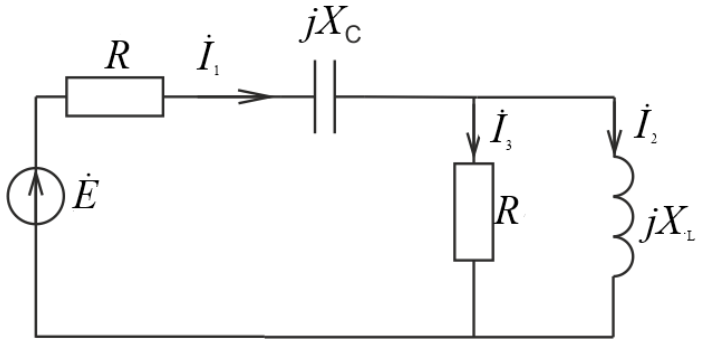


Рис. 10.8

$$\underline{Z_1} = r - jX_C = 10 - j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z_2} = jX_L = 10j \text{ Ом};$$

$$\underline{Z_{23}} = \frac{\underline{Z_2} R}{\underline{Z_2} + R} = 5 + j5 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z_э} = \underline{Z_1} + \underline{Z_{23}} = 15 + j15 \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E} Z_{23}}{Z_э Z_2} = \frac{\dot{E} R}{Z_1 Z_2 + Z_2 R + R Z_1} = 4{,}45 e^{-j26{,}6°};$$

$$i_2(t) = 6{,}3 \sin(\omega t - 26{,}6°) \text{ А}.$$

Сформируем характеристическое уравнение.
Входное сопротивление для схемы рис 10.8 равно:

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R}.$$

Из условия $Z(p) = 0$ получаем уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

где $\delta = \frac{R^2 C + L}{4RLC}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{2LC}$.

Определяем значение корней:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\omega' = -500 \pm j500.$$

Корни характеристического уравнения получились комплексными. Выражение для свободной составляющей тока i_2 запишем в виде:

$$i_{2_{\text{св}}} = e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

Запишем полное решение для тока i_2 и выражение производной по времени от тока i_2:

$$i_2(t) = i_{2_{\text{пр}}}(t) + i_{2_{\text{св}}}(t) =$$

$$= 6{,}3 \sin(\omega t - 26{,}6°) + e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = 6{,}3 \sin(\omega t - 26{,}6°) - e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t) +$$

$$+e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t).$$

Для определения постоянных интегрирования, нужно знать начальные условия:

$$i_2(0) \text{ и } \left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}.$$

Определим независимые начальные условия. Для этого рассчитаем установившийся режим в цепи до коммутации (рис. 10.9),

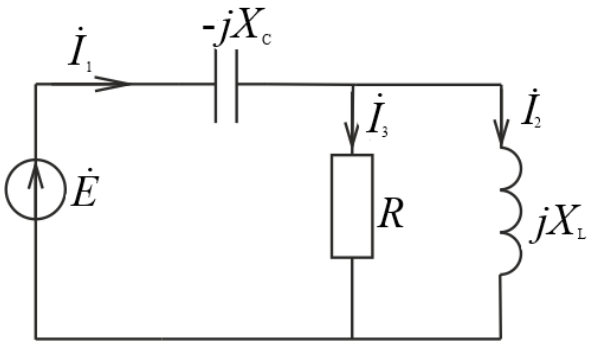


Рис. 10.9

$$\underline{Z}_1 = -jX_C; \qquad \underline{Z}_2 = jX_L;$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 R}{\underline{Z}_2 + R}; \quad \underline{Z}_э = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23};$$

$$\dot{U}_c = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_э}\underline{Z}_1 = 100 - j100; \quad u_c(0) = \sqrt{2}Im\left(\dot{U}_c\right) = 141 \text{ В}.$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_э \underline{Z}_2} = 10; \qquad i_2(0) = \sqrt{2}Im\left(\dot{I}_2\right) = 0 \text{ А}.$$

Запишем систему уравнений (1) для момента времени $t = 0$:

$$i_1(0) = i_2(0) + i_3(0); \qquad Ri_1(0) + u_c(0) + L\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = e(0),$$

$$L\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = Ri_3(0).$$

Отсюда находим

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0} = \frac{e(0) - Ri_2(0) - u_c(0)}{2L} = 0{,}707 \cdot 10^4 \text{ А/с}.$$

Подставляя начальные условия $i_2(0)$ и $\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}$ в выражения для искомой величины i_2, и ее производной $\frac{di_2(t)}{dt}$, получим систему алгебраических уравнений относительно постоянных интег-

рирования:

$$0 = -2{,}81 + A_2,$$

$$7070 = 56000 - 500A_2 + 500A_1.$$

Отсюда $A_1 = 5{,}67$ и $A_2 = 2{,}81$.
Итак, имеем:

$$i_2(t) = 6{,}3\sin(\omega t - 26{,}6°) + 6{,}32e^{-500t}\sin(\omega' t + 26{,}36°)\ \text{A}.$$

Токи i_1 и i_3 найдем из уравнений (1):

$$u_L = Ri_3 = L\frac{di_2}{dt};$$

$$i_3 = \frac{L}{R}\frac{di_2}{dt} = 6{,}3\sin(\omega' t + 63{,}5°) - 4{,}45e^{-\delta t}\sin(\omega' t - 18{,}5°),\ \text{A}.$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 8{,}9\sin(\omega' t + 18{,}5°) + 4{,}47e^{-\delta t}\sin(\omega' t + 71°),\text{A}.$$

Пример расчета переходного процесса в цепи переменного тока операторным методом.

Рассчитать переходную функцию в схеме рис. 10.7 операторным методом. Из расчета цепи до коммутации (в предыдущем примере) получили независимые начальные условия:

$$i_2(0) = 0\ \text{A};\ u_c(0) = -141\ \text{B}.$$

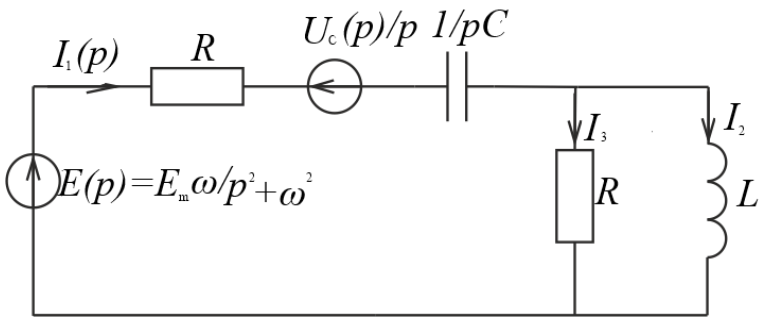


Рис. 10.10

Составляем операторную схему замещения (рис. 10.10) Воспользуемся для расчета операторным изображением комплекса мгновенной э.д.с.

$$e(t) \div E(p) = \frac{E_m(p \cdot \sin(\psi_E) + \omega \cos(\psi_E))}{p^2 + \omega^2}$$

или

$$e(t) \div E(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Внутренняя э.д.с. $Li_2(0)$ отсутствует, так как $i_2(0) = 0$. По закону Ома:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)};$$

$$U(p) = E(p) - \frac{U_c(0)}{p} = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{U_c(0)}{p} =$$

$$= \frac{-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2}{p \cdot (p^2 + \omega^2)};$$

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} + \frac{pLR}{pL + R} = \frac{2RLCp^2 + (R^2C + L)p + R}{p(LCp + RC)};$$

$$I_1(p) = \frac{(-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2) \cdot p(LCp + RC)}{p \cdot (p^2 + \omega^2) \cdot (2RLCp^2 + (R^2C + L)p + R)} =$$

$$= \frac{(-U_c(0) \cdot p^2 + E_m \omega \cdot p - U_c(0) \cdot \omega^2)(\frac{1}{2R}p + \frac{1}{2L})}{(p - j\omega)(p + j\omega)(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)},$$

где $\delta = \frac{R^2C+L}{4RLC}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{2LC}$.

Подставим значения параметров в изображение для тока:

$$I_1(p) = \frac{7{,}05 \cdot p^3 + 14121 \cdot p^2 + 14121068 \cdot p + 7050000000}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)} =$$

$$= \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Здесь $p_{1,2} = \pm j\omega = \pm j1000;\ p_{3,4} = -\delta \pm j\omega' = -500 \pm j500.$
Применим теорию разложения.

$$F_2'(p) = 4 \cdot p^3 + 3000 \cdot p^2 + 3000000 \cdot p + 1000000000;$$

$$F_1(p_1) = -7{,}07 \cdot 10^9 + j7{,}07 \cdot 10^9; \quad F_2'(p_1) = -2 \cdot 10^9 - j10^9;$$

$$F_1(p_3) = 1{,}752 \cdot 10^9 + j1{,}763 \cdot 10^9; \quad F_2'(p_3) = 5 \cdot 10^8 + j \cdot 10^9;$$

$$i_1(t) = 2 \cdot Re\left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t}\right) + 2 \cdot Re\left(\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t}\right) =$$

$$= 2 \cdot Re\left(4{,}47 e^{-j71{,}5^\circ} e^{j1000t}\right) + 2 \cdot Re\left(2{,}22 e^{-j18{,}2^\circ} e^{500t} e^{-j500t}\right) =$$

$$= 8{,}9 \cdot \cos(1000 \cdot t - 71{,}5^\circ) + 4{,}4 \cdot e^{-500t} \cos(500t - 18{,}2^\circ).$$

Окончательно, после преобразования, получим:

$$i_1(t) = 8{,}9 \sin(\omega t + 18{,}5) + 4{,}4 e^{-500t} \cos(\omega' t - 71)\ \text{А}.$$

Задачи

Задача 10.1. В цепи на рис. 10.11 при t=0,2с напряжение на входе цепи мгновенно спадает до нуля. Определить ток в цепи.

Ответ: $i = 200(e^{5t} - e^{10t})$ А при $t < 0{,}2c$; $i = 344 e^{10t}$ А при $t \geq 0{,}2c$.

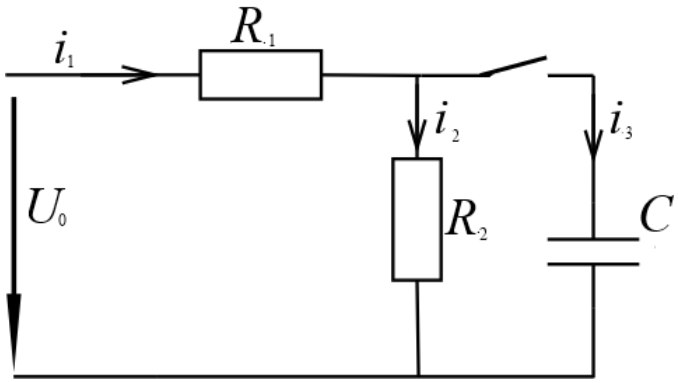


Рис.10.11

Задача 10.2. Цепь (рис. 10.12) включается под действием напряжения u = 100sin 314t; R_1 = 5 Ом; R_2= 10 Ом; C = 318 мкФ.

Определить уравнения токов всех участков цепи при переходном процессе.

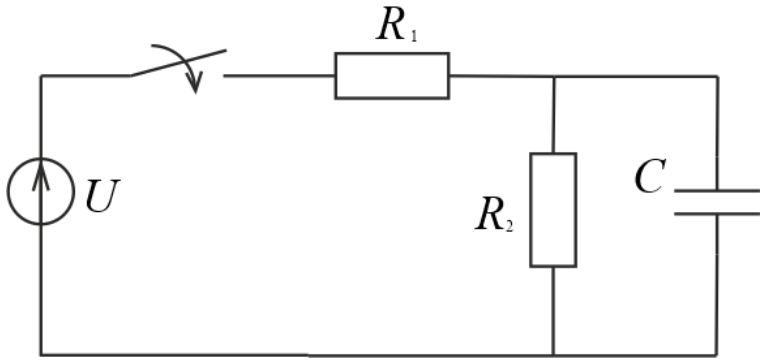


Рис. 10.12

Ответ: $i_1 = 8{,}95\sin(314t + 26{,}5°) - 4e^{-945t}$;
$i_2 = 6{,}32\sin(314t - 18{,}42°) + 2e^{-945t}$;
$i_3 = 6{,}32\sin(314t + 71{,}58°) - 6e^{-945t}$.

Задача 10.3. Участок с параметрами R_2 = 300 Ом; L = 0,04 Гн неразветвленной цепи переменного тока, в которой действует эдс $e = 100\sin(2500t + 60°)$ В, замыкается накоротко (рис. 10.13). Определить ток i на участке цепи с параметрами $R_1 = 20$ Ом, $C = 0{,}04$ мкФ и напряжение u_c на конденсаторе.

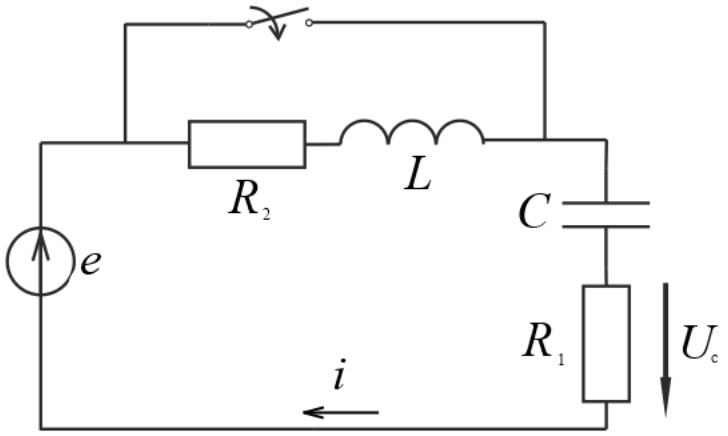


Рис. 10.13

Ответ: $u_c = 98\sin(2500t + 48{,}7°) - 173{,}6e^{-12500t}$ В, $i = 0{,}98\sin(2500t + 138{,}7°) + 8{,}68e^{-12500t}$ А.

Литература: 1, § 8.1–8.21, 10.51–1055; [2], § 14.1–14.8; [8], § 3.1–3.6.]

Занятие 11

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ПЕРЕХОДНЫМ ПРОЦЕССАМ

Цель занятия: проверка знаний и умений по расчету переходных процессов в электрических цепях.

Приводится вариант контрольной работы:

Задана схема электрической цепи, в которой происходит коммутация (рис.11.1):

Дано: R = 2 Ом, L = 1 Гн, C = 50 мкФ, E = 10 В.
Найти токи.

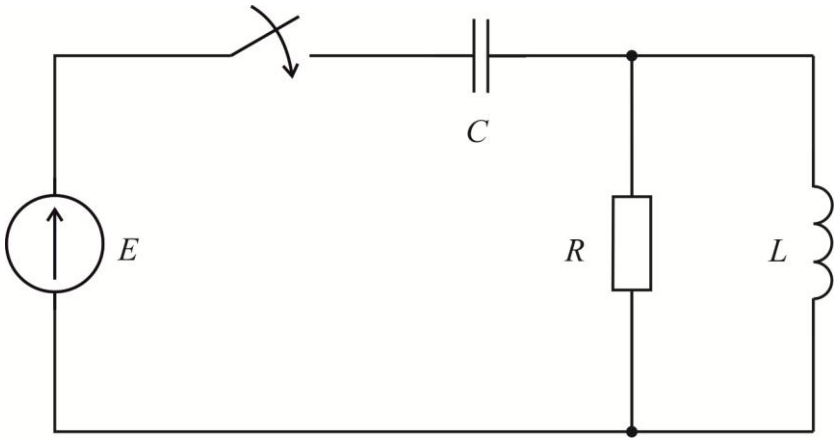


Рис.11.1

Занятие 12

АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий четырехполюсников, применение основных соотношений для расчета четырехполюсников.

Основные положения и соотношения

1. Между напряжениями и токами на входе линейного пассивного четырехполюсника (рис. 12.1) существуют определенные зависимости, которые могут быть записаны в различных формах

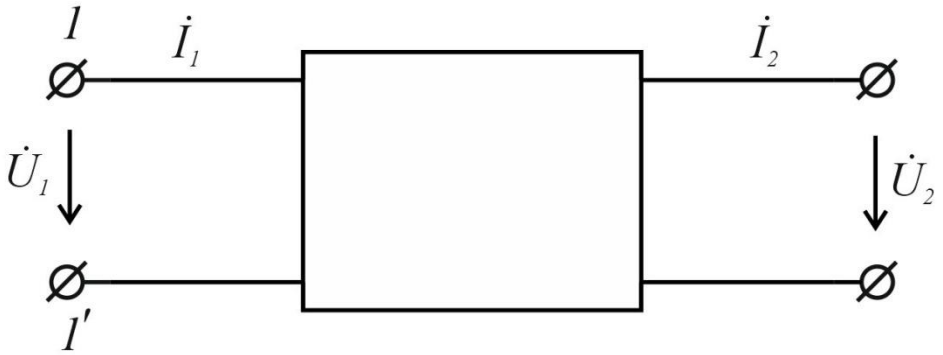


Рис. 12.1

Уравнения четырехполюсника в наиболее употребительных формах: в форме А

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$
$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2,$$

или

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2,$$
$$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

в форме Z

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{U}_2 + Z_{12}\dot{I}_2,$$
$$\dot{I}_1 = Z_{21}\dot{U}_2 + Z_{22}\dot{I}_2,$$

в форме Y

$$\dot{U}_1 = Y_{11}\dot{U}_2 + Y_{12}\dot{I}_2,$$
$$\dot{I}_1 = Y_{21}\dot{U}_2 + Y_{22}\dot{I}_2,$$

в форме H

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{U}_2 + H_{12}\dot{I}_2,$$
$$\dot{I}_1 = H_{21}\dot{U}_2 + H_{22}\dot{I}_2,$$

Коэффициенты A, Z, Y и H (называемые так же постоянными четырехполюсников или параметрами четырехполюсников) в общем случае являются комплексными величинами.

Связь между коэффициентами различных форм уравнений четырехполюсников приведена в таблице 12.1

Здесь для краткости записи величинами $|Z|$, $|Y|$, $|H|$ обозначены определители, составленные из коэффициентов соответствующих матриц, то есть например $|Z| = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$.

2. Способ определения коэффициентов четырехполюсника зависит от того, что известно о четырехполюснике.

а) При известной внутренней схеме и параметрах ее элементов можно составить уравнения по законам Кирхгофа. После не-

обходимых преобразований их составляют с соответствующими уравнениями четырехполюсника и определяют коэффициенты последних.

Если уравнения составить по методу контурных токов, то вычислив определитель систем уравнений Δ и соответствующие алгебраические дополнения $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21} и\ \Delta_{22}$ можно найти необходимые коэффициенты. Так коэффициенты четырехполюсника A, B, C, D определяются по формулам:

$$A = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}; \quad B = \frac{\Delta}{\Delta_{12}}; \quad C = \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta\ \Delta_{12}}; \quad D = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}.$$

Между коэффициентами четырехполюсника существует связь AD − BC = 1, поэтому только три коэффициента являются независимыми.

Если по схеме четырехполюсника и ее параметрам определить сопротивление холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника со стороны первичных зажимов $(\underline{Z}_{10}, \underline{Z}_{1k})$ и со стороны вторичных зажимов $(\underline{Z}_{20}, \underline{Z}_{2k})$, то по этим величинам можно также найти коэффициенты четырехполюсника. Для формы A:

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2k}}} = \frac{\underline{Z}_{10}}{\sqrt{\underline{Z}_{20}\left(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k}\right)}}; \qquad C = \frac{1}{\underline{Z}_{10}} \cdot A;$$

$$B = \underline{Z}_{2k} \cdot A = \underline{Z}_{1k}\sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1k}}}; \qquad D = \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}} \cdot A.$$

Таблица 12.1

	Матрицы четырехполюсников, выраженные через различные параметры			
	A	***Z***	***Y***	***H***
A	$A \quad B$ $C \quad D$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad -\frac{\lvert Z\rvert}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$-\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{1}{Z_{21}}$ $-\frac{\lvert Y\rvert}{Y_{21}} \quad \frac{Y_{11}}{Z_{21}}$	$-\frac{\lvert H\rvert}{H_{21}} \quad \frac{H_{11}}{H_{21}}$ $-\frac{H_{22}}{H_{21}} \quad \frac{1}{H_{21}}$
Z	$\frac{A}{C} \quad -\frac{1}{C}$ $\frac{1}{C} \quad -\frac{D}{C}$	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{Y_{22}}{\lvert Y\rvert} \quad -\frac{Y_{12}}{\lvert Y\rvert}$ $-\frac{Y_{21}}{\lvert Y\rvert} \quad \frac{Y_{11}}{\lvert Y\rvert}$	$\frac{\lvert H\rvert}{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$
Y	$\frac{D}{B} \quad -\frac{1}{B}$ $\frac{1}{B} \quad -\frac{A}{B}$	$\frac{Z_{22}}{\lvert Z\rvert} \quad -\frac{Z_{12}}{\lvert Z\rvert}$ $-\frac{Z_{21}}{\lvert Z\rvert} \quad \frac{Z_{11}}{\lvert Z\rvert}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{1}{H_{11}} \quad -\frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{\lvert H\rvert}{H_{11}}$
H	$\frac{B}{D} \quad \frac{1}{D}$ $\frac{1}{D} \quad -\frac{C}{D}$	$\frac{\lvert Z\rvert}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $-\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad -\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$ $-\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\lvert Y\rvert}{Y_{11}}$	$H_{11} \quad H_{12}$ $H_{21} \quad H_{22}$

б) Если внутренняя схема данного четырехполюсника неизвестна, коэффициенты четырехполюсника могут быть определенны по данным опытов холостого хода и короткого замыкания. Если в результате опытов будут найдены сопротивления холостого хода и короткого замыкания, коэффициенты четырехполюсника определяются по приведенным выше формулам. Если в результате опытов будут найдены комплексные напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника, то коэффициенты

$$A = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}};\ \ B = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{2k}};\ \ C = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}};\ \ D = \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_{2k}}.$$

3. Пассивный четырехполюсник характеризуется только тремя независимыми параметрами, поэтому простейшая схема замещения четырехполюсника содержит три элемента.

На рис. 12.2 приведена Т-образная схема

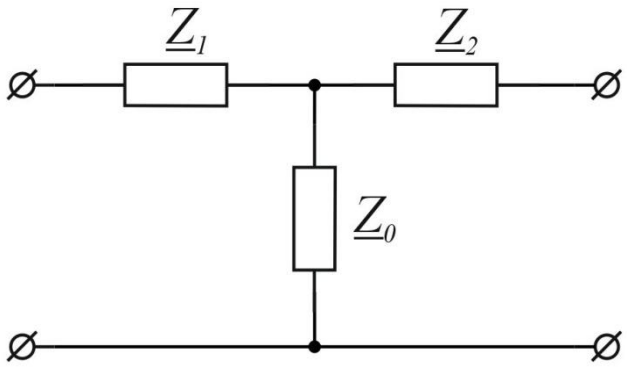


Рис. 12.2

замещения четырехполюсника, параметры которой определяются по коэффициентам A, B, C, D четырехполюсника так:

$$\underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C};\ \ \underline{Z}_2 = \frac{D-1}{C};\ \ \underline{Z}_0 = \frac{1}{C}.$$

Параметры П-образной схемы замещения (рис 12.3) определяются так:

$$\underline{Z}_1 = \frac{B}{D-1};\ \ \underline{Z}_2 = \frac{B}{A-1};\ \ \underline{Z}_0 = B.$$

Если четырехполюсник состоит из трех элементов $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_0$, образующих Т-образную схему (рис. 12.2), то коэффициенты формы А будут равны

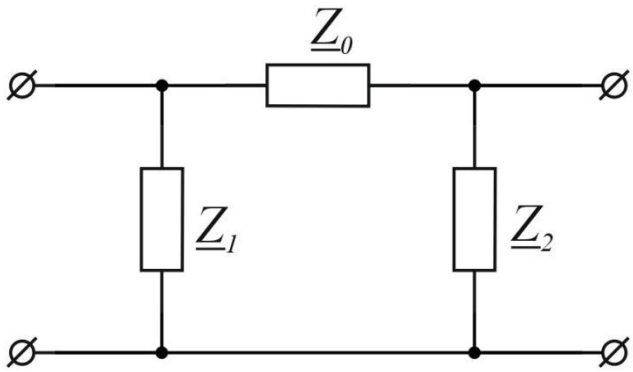


Рис. 12.3

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}; \qquad C = \frac{1}{\underline{Z}_0};$$

$$B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}; \qquad D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}.$$

При П-образной схеме (рис. 12.3)

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_2}; \qquad C = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2};$$

$$B = \underline{Z}_0; \qquad D = 1 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1}.$$

4. Входное сопротивление четырехполюсника зависит от нагрузки, включенной к его выходным зажимам. Оно может быть определено так:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\underline{Z}_H + B}{AC_H + D} = \underline{Z}_{10} \frac{\underline{Z}_{2k} + \underline{Z}_H}{\underline{Z}_{20} + \underline{Z}_H}.$$

5. Четырехполюсник называется симметричным, если при перемене местами его входных и выходных зажимов не изменяются токи и напряжения в цепи, с которого он соединен. Этому соответствует равенство коэффициентов четырехполюсника.

$$A = D = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_k}}.$$

Связь между коэффициентами симметричного четырехполюсника

$$A^2 - BC = 1.$$

Симметричный четырехполюсник характеризуется только двумя независимыми параметрами, поэтому в схемах замещения такого четырехполюсника $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$.

Входное сопротивление симметричного четырехполюсника

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{A\underline{Z}_H + B}{AC_H + A} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_k + \underline{Z}_H}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_H}.$$

6. В теории симметричных четырехполюсников кроме коэффициентов A, B, C широко применяются так называемые характеристические параметры – характеристическое сопротивление $\underline{Z}_C$ и коэффициент распространения (постоянная передачи) γ.

Характеристическое сопротивление $\underline{Z}_C$ обладает следующим свойством: входное сопротивление симметричного четырехполюсника, нагруженного сопротивлением $\underline{Z}_C$, равно сопротивлению $\underline{Z}_C$.

Характеристическое сопротивление может быть определен по коэффициентам четырехполюсника или по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания:

$$Z_{вх} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Z}_k}.$$

Коэффициентом передачи называется комплексное число

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

вещественная часть α называется коэффициентом затухания, а мнимая β коэффициентом фазы.

Коэффициент затухания α показывает, как изменяется величина напряжения и тока при прохождении через четырехполюсник

$$\alpha = ln\frac{U_1}{U_2} = ln\frac{I_1}{I_2}.$$

Коэффициент затухания измеряется в неперах.

Коэффициент фазы β показывает, как изменяется фаза напряжения или тока при прохождении через четырехполюсник

$$\beta = \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \psi_{I_1} - \psi_{I_2}.$$

Коэффициент фазы измеряется в радианах.

Коэффициент распространения может быть определен по коэффициентам четырехполюсника

$$\gamma = \alpha + j\beta = \ln\left(A + \sqrt{BC}\right).$$

или по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания

$$e^{2\gamma} = e^{2(\alpha+j\beta)} = \frac{1 + th\gamma}{1 - th\gamma},$$

где

$$th\gamma = \sqrt{\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_0}}\ .$$

7. Режим симметричного четырехполюсника, при котором сопротивление нагрузки $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$, называется согласованным. При согласованном режиме работы уравнения симметричного четырехполюсника могут быть записаны так:

$$\dot{U}_1 = e^{\gamma} \cdot \dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = e^{\gamma} \cdot \dot{I}_2.$$

8. Коэффициенты A, B, C симметричного четырехполюсника могут быть выражены через характеристические параметры:

$$A = D = ch\gamma,$$

$$B = \underline{Z}_C sh\gamma,$$

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh\gamma.$$

Поэтому при любом режиме работы симметричного четырехполюсника вместо уравнения в форме А можно применять уравнения в гиперболических функциях

$$\dot{U}_1 = ch\gamma \cdot \dot{U}_2 + \underline{Z}_C sh\gamma \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh\gamma \cdot \dot{U}_2 + ch\gamma \dot{I}_2.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется четырехполюсником?
2. Записать уравнения четырехполюсника в различных формах.
3. Как определить коэффициенты четырехполюсника по его схеме?
4. Как определить коэффициенты по опытам холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника?

5. Какая существует связь между коэффициентами четырехполюсника A, B, C, D?

6. Начертить схемы замещения четырехполюсника?

7. В каких пределах изменится входное сопротивление четырехполюсника при изменении режима на вторичных зажимах от холостого хода до короткого замыкания?

8. Объяснить различие между симметричным и несимметричным четырехполюсником?

9. Можно ли по схеме четырехполюсника определить, что он симметричен?

10. Почему симметричный четырехполюсник можно характеризовать только двумя независимыми параметрами?

11. Какой режим работы симметричного четырехполюсника называется согласованным?

12. Как определить коэффициенты уравнений симметричного четырехполюсника в форме А по известным характеристическому сопротивлению и коэффициенту распространения и наоборот?

13. Записать уравнения симметричного четырехполюсника с характеристическими параметрами при работе на нагрузку и в частном случае работы на согласованную нагрузку.

14. Привести примеры симметричных четырехполюсников, используемых в технике.

Задачи

Задача 12.1. Определить коэффициенты четырехполюсника A, B, C, D (рис. 12.4) используя метод контурных токов, если

$$R_1 = 30\ Ом, X_2 = 18\ Ом, R_2 = 15\ Ом, X_3 = 30\ Ом,$$
$$R_4 = 24\ Ом, X_4 = -20\ Ом.$$

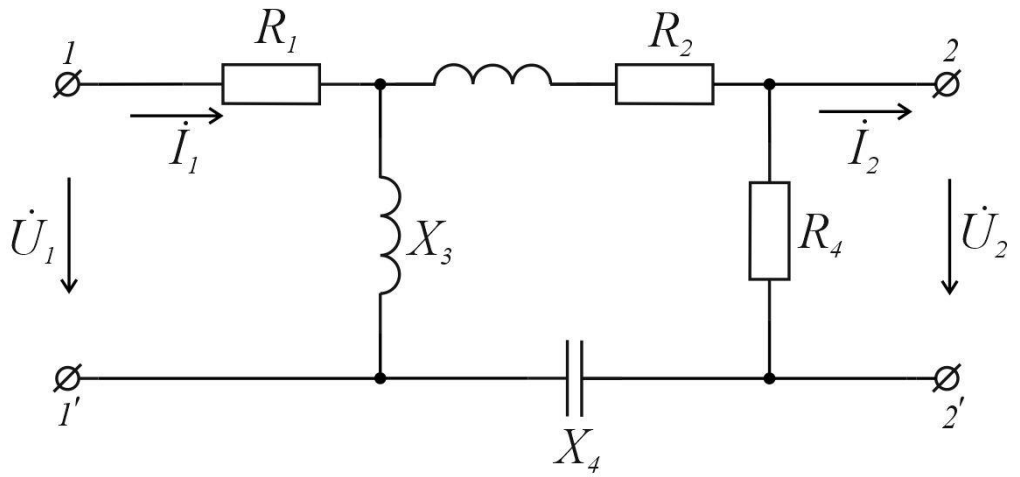


Рис. 12.4

Решение. 1. Поскольку $\dot{U}_1$ равно электродвижущей силе идеального источника, включенного к зажимам 1-1, а $\dot{U}_2$ является напряжением на нагрузке, включенной к зажимам 2-2, для трех

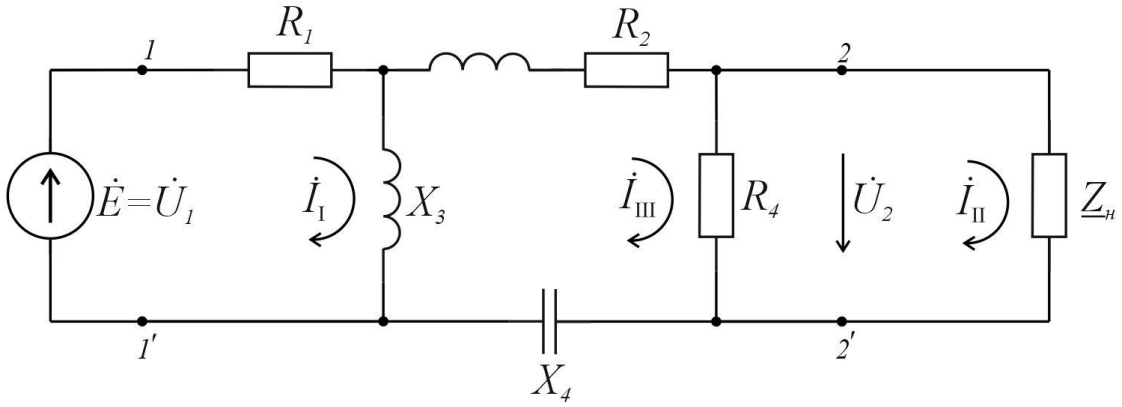


Рис. 12.4 а

контуров с контурными токами $\dot{I}_I$, $\dot{I}_{II}$ и $\dot{I}_{III}$ (рис.12.4 а) уравнения будут

$$(R_1 + jX_3)\dot{I}_I + (-jX_3)\dot{I}_{III} = \dot{U}_1;$$
$$\left(R_4 + \underline{Z_H}\right)\dot{I}_{II} + (-R_4)\dot{I}_{III} = 0;$$

$$(-jX_3)\dot{I}_I + (-R_4)\dot{I}_{II} + (jX_3 + jX_2 + R_2 + R_4 - jX_4)\dot{I}_{III} = 0.$$

2. После подстановки числовых значений и учитывая, что $\underline{Z_H}\dot{I}_{II} = \dot{U}_2$, можно получить

$$(30 + j30)\dot{I}_I + (-j30)\dot{I}_{III} = \dot{U}_1;$$

$$24\dot{I}_{II} + (-24)\dot{I}_{III} = -\dot{U}_2;$$

$$(-j30)\dot{I}_I + (-24)\dot{I}_{II} + (39 + j28)\dot{I}_{III} = 0.$$

3. Определитель системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 + j30 & 0 & -j30 \\ 0 & 24 & -24 \\ -j30 & -24 & 39 + j28 \end{vmatrix} = 33400e^{j68,33^\circ}$$

4. Алгебраические дополнения

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ -j30 & 39 + j28 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} = j720;$$

$$\Delta_{21} = \Delta_{12} = j720;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 39 + j28 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} = 764e^{j61,83^\circ};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 30 + j30 & -j30 \\ -j30 & 39 + j28 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+2} = 2350e^{j58,50^\circ}.$$

5. Коэффициенты четырехполюсника

$$A = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} = \frac{2350e^{j58,50^\circ}}{720e^{j90^\circ}} = 3,27e^{-j31,52^\circ};$$

$$B = \frac{\Delta}{\Delta_{12}} = \frac{33400e^{j68,33^\circ}}{720e^{j90^\circ}} = 46,5e^{-j21,67^\circ} Ом;$$

$$C = \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} =$$

$$= \frac{764e^{j61,83^\circ} \cdot 2350e^{j58,50^\circ} - 720e^{j90^\circ} \cdot 720e^{j90^\circ}}{33400e^{j68,33^\circ} \cdot 720e^{j90^\circ}} =$$

$$= 0,066e^{-j54^\circ} См;$$

$$D = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{764e^{j61,83^\circ}}{720e^{j90^\circ}} = 1,06e^{-j28,17^\circ}.$$

6. Проверка по уравнению AD – BC=1 подтверждает правильность решения.

Задача 12.2. По данным опытов были определенны сопротивления холостого хода и короткого замыкания четырехполюсника $\underline{Z}_{10} = 40$ *Ом*, $\underline{Z}_{20} = 20$ *Ом*, $\underline{Z}_{2k} = 10$ *Ом*. Определить параметры Т – образной схемы замещения четырехполюсника. Определить соотношение между токами на входе и выходе при коротком замыкании на вторичных зажимах четырехполюсника.

Решение. 1. Определение коэффициентов А – формы четырехполюсника

$$A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2k}}} = \sqrt{\frac{40}{20 - 10}} = 2,$$

$$B = \underline{Z}_{2k} \cdot A = 10 \cdot 2 = 20 \text{ Ом},$$

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_{10}} A = \frac{1}{40} \cdot 2 = 0,05 \text{ См},$$

$$D = \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}} A = \frac{20}{40} \cdot 2 = 1.$$

2. Определение соотношения между токами. При коротком замыкании $\dot{U}_2 = 0$, поэтому

$$\dot{I}_{1k} = D\dot{I}_{2k}, \quad \frac{\dot{I}_{1k}}{\dot{I}_{2k}} = D = 1$$

3. Определение параметров Т-образной схемы замещения

$$\underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C} = \frac{2-1}{0{,}05} = 20 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{D-1^{\circ}}{C} = 0;$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{C} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ Ом}.$$

Схема замещения изображена на рис. 12.5

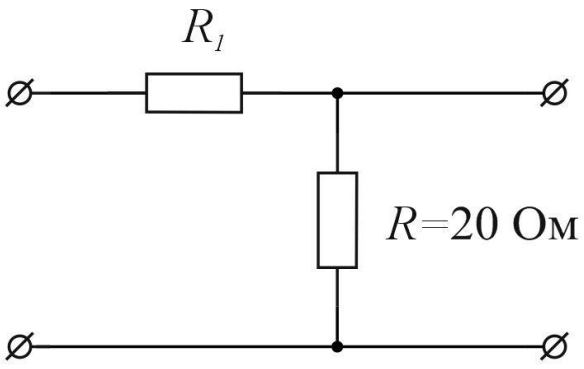


Рис. 12.5

Задача 12.3. Составить П-образную схему замещения симметричного четырехполюсника, если известны его коэффициенты $A = 5, B = j4$ *Ом.*

Решение 1. Определяем параметры П-образной схемы замещения

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{B}{A-1} = \frac{j4}{5-1} = j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_0 = B = j4 \text{ Ом}.$$

2. Схема замещения приведена на рис. 12.6

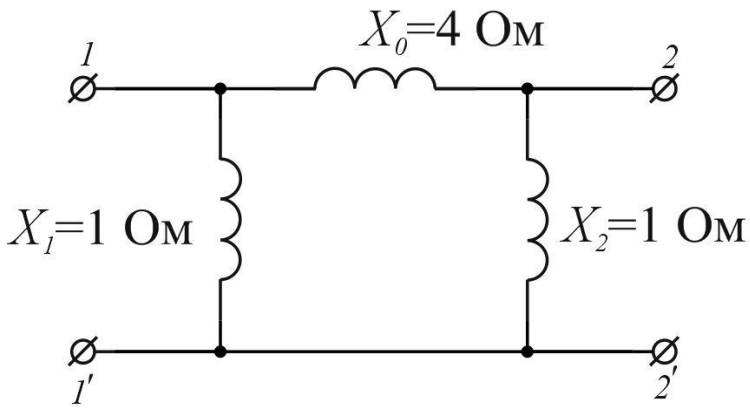


Рис. 12.6

Задача 12.4. Определить коэффициенты A, B, C, D четырехполюсника (рис. 12.7) по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания, которые нужно предварительно вычислить, если дано: $X_1 = 10$ *Ом*, $X_3 = 5$ *Ом*, $R_1 = 10$ *Ом*, $R_3 = 5$ *Ом*.

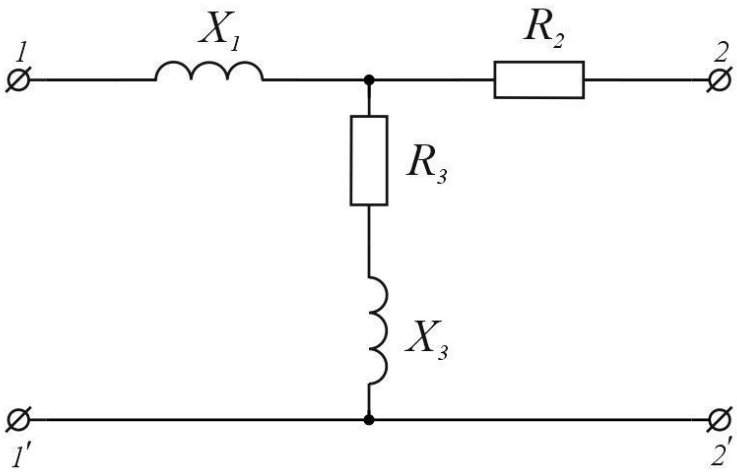


Рис. 12.7

Ответ:
$A = 2 + j; \quad B = (20 + j20)$ Ом;
$C = (0{,}1 - j0{,}1)$ См; $\quad D = 2 - j.$

Задача 12.5. Определить параметры Т-образной схемы замещения симметричного четырехполюсника, если известны его коэффициенты $B = 0; C = -j0{,}25$ См.

Ответ: $\underline{Z}_0 = j4$ Ом; $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 0.$

или $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = -j8$ Ом. (Условию задачи удовлетворяют две схемы)

Задача 12.6. Сопротивление холостого хода и короткого замыкания симметричного четырехполюсника равны $\underline{Z}_0 = 1$ Ом, $\underline{Z}_k = 3$ Ом. Начертить Т-образную схему замещения.

Ответ: $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 2$ Ом, $\underline{Z}_0 = 2$ Ом.

Литература: [1], § 4.1–6.8; [2], § 9.1–9.14; [6], § 8.1–8.8.

Занятие 13

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий нелинейных электрических и магнитных цепей постоянного тока, применение основных соотношений для расчета нелинейных цепей.

Основные положения и соотношения

1. Для расчета нелинейных цепей постоянного тока применяются графические, аналитические, графоаналитические и численные методы. При расчете целесообразно предварительно провести преобразование схемы таким образом, чтобы упростить уравнение цепи. В частности, для цепи с одним нелинейным элементом можно преобразовать линейную часть схемы, применяя теорему об активном двухполюснике.

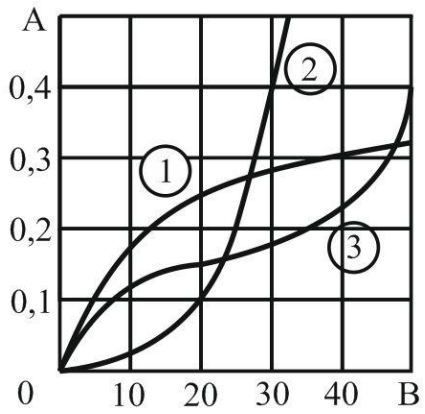


Рис. 13.1

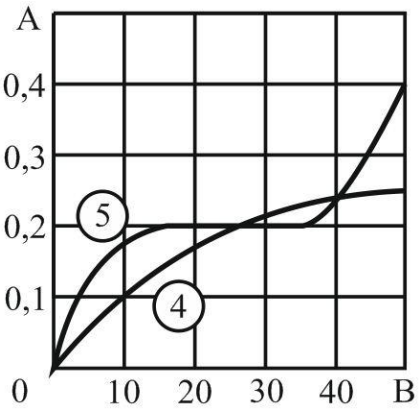


Рис. 13.2

Для графического расчета цепи нужно характеристики всех ветвей записать в функцию одного и того же аргумента. В этом случае система уравнений цепи приводится к одному уравнению с одним неизвестным. Решение часто целесообразно проводить методом пересечений, при котором нелинейное уравнение разбивается на две части

$$f_1(x) = f_2(x),$$

после чего строятся характеристики $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и решение определяется точкой их пересечения.

При аналитическом методе расчета можно рекомендовать аппроксимацию характеристик нелинейных элементов полиномом второй и третьей степени. В этом случае расчет сводится к решению квадратного или кубического уравнения.

Характеристики нелинейных элементов (резисторов), рассматриваемых в задачах приведены на рис. 13.1–13.2.

2. Для участка магнитной цепи магнитная индукция

$$B = \Phi/S,$$

где Ф – магнитный поток; S – поперечное сечение участка; магнитное напряжение

$$U_m = Hl = \Phi R_m,$$

где Н – напряженность магнитного поля; l – средняя длина участка; магнитное сопротивление участка

$$R_m = l/\mu_r\mu_0 S,$$

где μ_r – относительная магнитная проницаемость материала участка; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнитная постоянная, Гн/м.

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля участка связанны соотношением

$$B = \mu_r\mu_0 H.$$

При расчете магнитных цепей при постоянных потоках зависимость между B и H для ферромагнитных участков задается кривой намагничивания (приложение 3). Для воздуха и для воздушных зазоров $\mu_r = 1$, следовательно,

$$H = B/\mu_0 = 0{,}8 \cdot 10^6 \text{В},$$

где H в амперах на метр, а B в теслах.

Если H измеряется в квадратных единицах, А/см, то

$$H = 0{,}8 \cdot 10^3 \text{В}$$

Магнитодвижущая сила (МДС)

$$F = Iw,$$

где I – ток в обмотке; w – число витков обмотки.

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия:

Электрические цепи	Магнитные цепи
Ток I, А	Поток Ф, Вб
ЭДС E, В	МДС F, А
Сопротивление R, Ом	Магнитное сопротивление R_m 1/Гн
Проводимость g, См	Магнитная проводимость g_m, Гн
Напряжение U, В	Магнитное напряжение U_m, А

Эта формальная аналогия распространяется и на методы расчета магнитных цепей.

Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи

$$\sum \Phi = 0$$

и второй

$$\sum F = \sum U_m = \sum Hl = \sum \Phi R_m.$$

В большинстве случаев магнитные цепи – нелинейные, и их расчет аналогичен расчету нелинейных электрических цепей.

Аналогом вольт – амперной характеристики U (I) является вебер – амперная характеристика Ф (U_m), которая рассчитывается по заданным кривым намагничивания B (H) и геометрическим

размерам участков магнитной цепи.

Вебер – амперная характеристика (часто называют магнитной характеристикой) рассчитывается в следующем порядке: задают индукцию B, вычисляют поток Ф = BS, по кривой B (H) определяют H и находят $U_m = Hl$.

В слабых полях $\mu_r \approx const$, следовательно, и $R_m \approx const$, поэтому магнитная цепь рассчитывается как линейная.

Для наглядности можно составить эквивалентную электрическую схему, при помощи которой выполняется расчет.

Контрольные вопросы

1. Какая цепь называется нелинейной?
2. В чем заключается графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока?
3. Как определяются магнитная индукция, магнитное напряжение, магнитное сопротивление?
4. Каким соотношением связанны магнитная индукция и напряженность магнитного поля?
5. Сформулируйте законы Кирхгофа для магнитных цепей?

Задачи

Пример расчета нелинейной цепи графическим методом.

Задача 13.1. Нелинейный двухполюсник (рис. 13.3) состоит из последовательно включенных линейного резистора с сопротивлением $R = 8$ Ом и нелинейного резистора, характеристика которого приведен на рис 13.1.

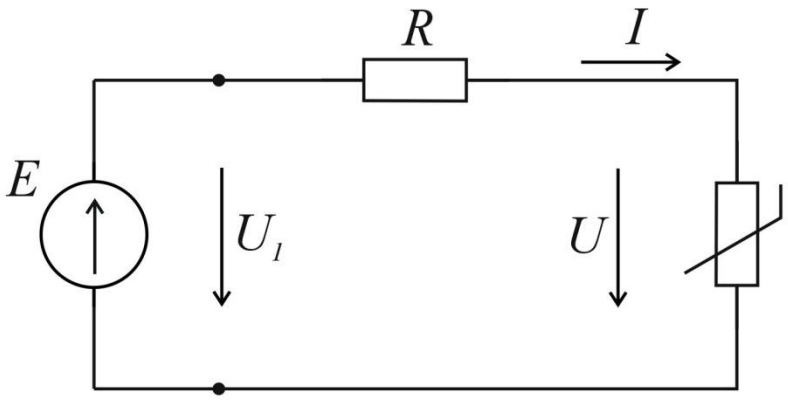


Рис. 13.3

Построить: 1) вольт – амперную характеристику двухполюсника $I\ (U_1)$; 2)Зависимость напряжения U на нелинейном элементе от входного напряжения U_1. Определить ток I при ЭДС $E = 40$ В.

Решение. 1) Цепь описывается уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа,

$$U_1(I) = rI + U(I) = U_r(I) + U(I), \qquad (1)$$

т. е. алгебраическим выражением вольт – амперной характеристики пассивного двухполюсника. Построение этой характеристики приведено на рис. 13.4, а. Здесь *1* – характеристика $U_r(I)$ линейного резистора; *2* – характеристика нелинейного резистора $U(I)$; *3* – характеристика, полученная суммированием характеристик согласно уравнению (1), которая является искомой вольт – амперной характеристикой двухполюсника $U_1(I)$.

2) Отмечая напряжение на входе цепи U_1 (кривая *3*) и на линейном элементе U (кривая *2*) при одинаковых значениях тока, строим зависимость $U\ (U_1)$, показанную на рис. 13.4, б.

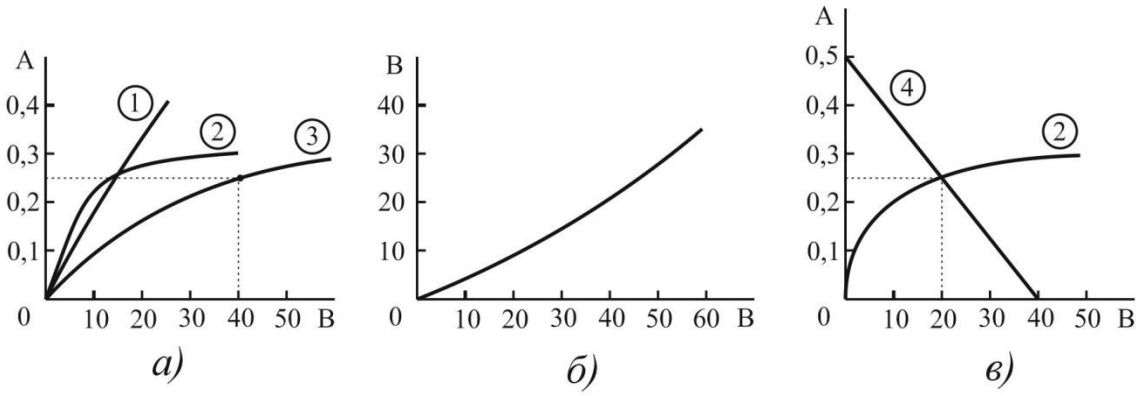


Рис. 13.4

При $E = U_1 = 40$ В ток $I = 0{,}25$ А определим непосредственно по построенной вольт – амперной характеристики двухполюсника – кривой *3* на рис 13.4,а.

Если вольт – амперная характеристика двухполюсника не строится, то ток может быть найден методом пересечений. Запишем уравнение цепи в виде

$$U(I) = E - rI$$

и построим (рис. 13.4,в) характеристики левой (кривая *2*) и правой (прямая *4*) частей этого уравнения. Равенство левой и правой частей соответствует точке их пересечения. В точке пересечения $I = 0{,}25$ А ($U = 20$ В).

Примеры расчета аналитическим методом.

Задача 13.2. Цепь состоит из последовательно соединенных линейного резистора с сопротивлением $R = 10$ Ом и нелинейного резистора, подключенных к источнику ЭДС $E = 18$ В (см. рис. 13.3). Вольт – амперная характеристика нелинейного резистора при положительных значениях тока и напряжения $I \geq 0$, $U \geq 0$ может быть аппроксимирована зависимостью:

а) $U = aI + bI^2$, где $a = 6$ В/А; $b = 2$ В/А^2;

б) $I = \alpha U + \beta U^2$, где $\alpha = 0{,}05$ А/В, $\beta = 0{,}003$ А/В^2.

Определить ток в цепи.

Решение. а) Запишем уравнение цепи по второму закону Кирхгофа

$$rI + U(I) = E.$$

После подстановки U (I) получим квадратное уравнение

$$bI^2 + (r + a)I - E = 0$$

или при заданных числовых значениях $2I^2 + 16I - 18 = 0$, откуда находим $I = 1$ А.

Решение $I = -9$ А не удовлетворяет условиям аппроксимации и поэтому не имеет смысла.

Пример расчета магнитной цепи.

Задача 13.3. Магнитная цепь, изображенная на рис. 13.5 выполнена из электротехнической стали 1211 и имеет следующие размеры: $l_1 = 60$ см; $l_2 = 20$ см; $l_в = 0{,}1$ см; $l_3 = 80$ см; $S_1 == S_2 = S_3 = 10$ см^2. Магнитные потоки в крайних стержнях $\Phi_1 = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$Вб и $\Phi_3 = 1{,}31 \cdot 10^{-3}$Вб.

Найти МДС $F_1 = I_1 w_1$ и $F_3 = I_3 w_3$; указать направление токов обмотках.

Решение. По первому закону Кирхгофа для магнитной цепи

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3 = 1{,}56 \cdot 10^{-3}\text{Вб}.$$

Индукция стержня

$$B_1 = \Phi_1/S_1 = 0{,}25\ \text{Тл};\ B_2 = \Phi_2/S_2 = 1{,}56\ \text{Тл};$$
$$B_3 = \Phi_3/S_3 = 1{,}31\ \text{Тл}.$$

По кривой намагничивания для стали 1211 (см. табл. 13.1) находим: $H_1 = 0{,}6$ А/см; $H_2 = 20$ А/см; $H_3 = 6$ А/см.

По второму закону Кирхгофа определяем МДС:

$$F_1 = I_1 w_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_в l_в \approx 1{,}56\ \text{А};$$
$$F_3 = I_3 w_3 = H_3 l_3 + H_2 l_2 + H_в l_в \approx 2130\ \text{А}.$$

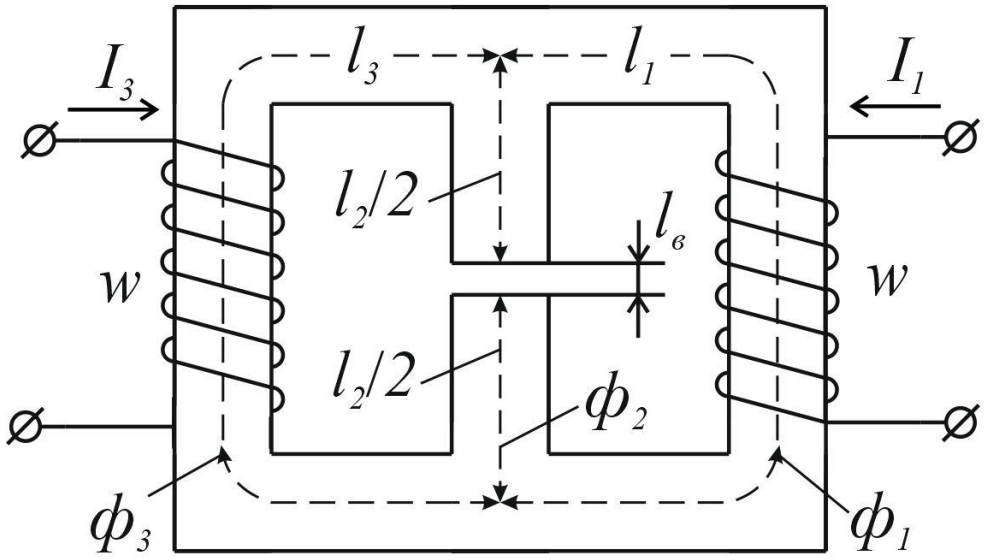


Рис. 13.5

Таблица 13.1

Кривые намагничивания сталей 1211, 1411, 1512, 1561

Марка стали, индукция	*H*, А/см																		
	0,	0,2	0,4	1	1,4	1,8	2,4	4	6	8	10	12	14	18	22	24	40	80	120
1211, *B*, Тл	0	0,03	0,11	0,53	0,73	0,90	1,10	1,23	1,32	1,38	1,42	1,45	1,48	1,54	1,57	1,59	1,64	1,75	1,83
1411, *B*, Тл	0	0,04	0,18	0,67	0,81	0,92	1,05	1,14	1,23	1,30	1,38	1,42	1,46	1,50	1,53	1,55	1,59	1,69	1,78
1512, *B*, Тл	0	0,11	0,35	0,73	0,87	0,96	1,06	1,16	1,25	1,32	1,37	1,40	1,44	1,48	1,50	1,51	1,57	1,68	1,78
1561, *B*, Тл	0	0,20	0,44	0,75	0,88	0,98	1,11	1,20	1,27	1,32	1,37	1,40	1,42	1,44	1,46	1,47	1,54	1,65	1,74

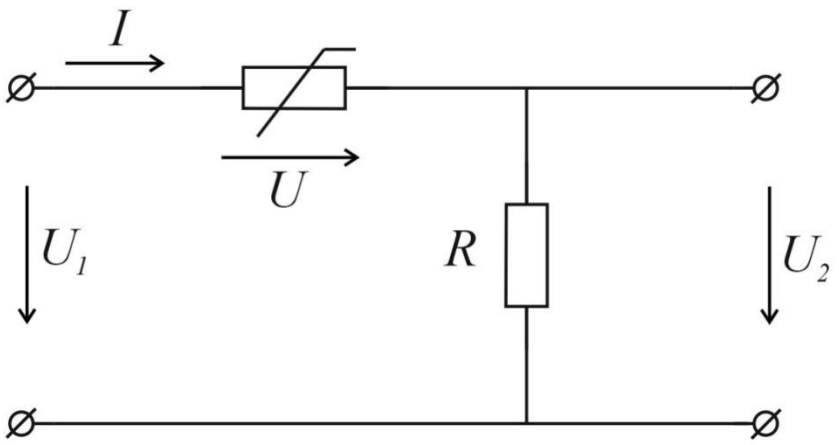


Рис. 13.6

Задача 13.4. В схеме рис. 13.6 $R = 100$ Ом, характеристика нелинейного элемента (симметричная) дана на рис. 13.2 (кривая 5).

Построить зависимость напряжения на выходе цепи U_2 от входного напряжения U_1.

Задача 13.5. В схеме рис. 13.7 $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 1{,}33$ Ом; $E = 6$ В. Вольт – амперная характеристика нелинейного резистора может быть при $U \geq 0$, $I \geq 0$ аппроксимирована зависимостью:

а) $I = aU^2$, где $a = 0{,}5$ Ф/В^2;

б) $U = bI^2$, где $b = 4$ В/А^2.

Определить все токи и напряжение на линейном резисторе U.

Ответ: 0,50 А; 1,25 А; 0,75 А; 1 В.

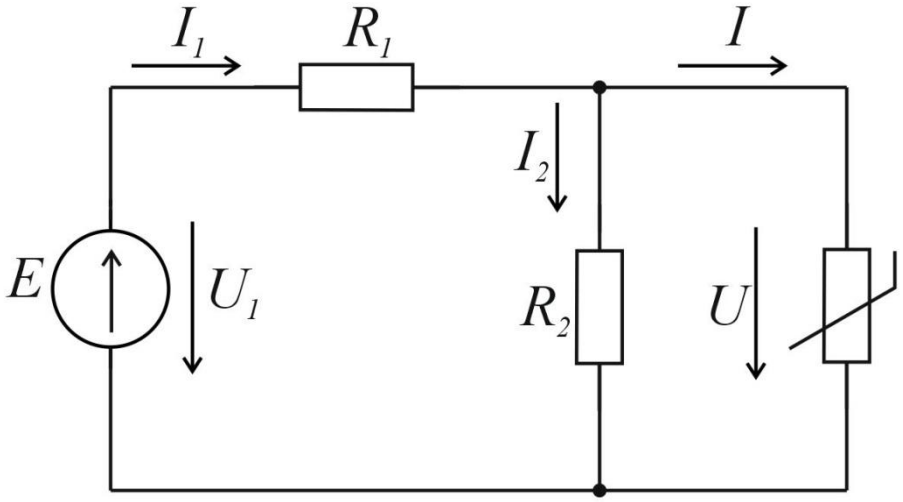


Рис. 13.7

Задача 13.6. В воздушном зазоре электромагнита, выполненного из стали 1411 (рис. 13.8), необходимо создать индукцию $B = 0{,}05$ Тл.

Определить МДС, необходимую для создания магнитного потока с заданной индукцией, если $l_c + l_я = 100$ см, суммарный воздушный зазор $2l_в = 1$ мм, сечение магнитопровода одинаково по всей длине электромагнита и равно 16 см^2.

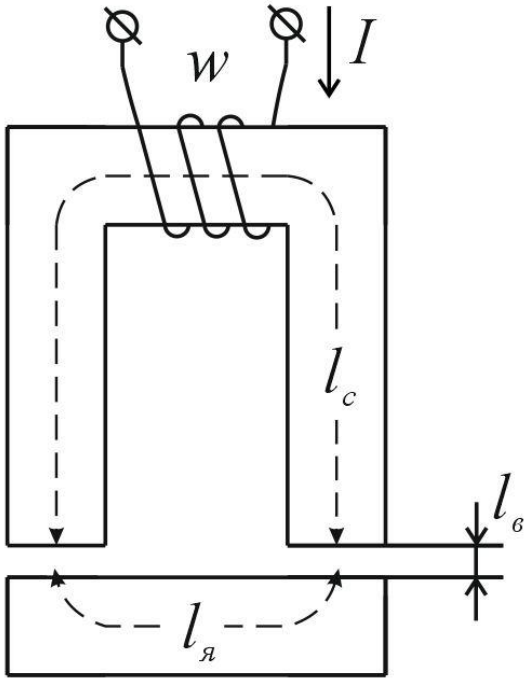


Рис. 13.8

Ответ: $F = 1080$ А

Задача 13.7. Магнитная цепь (рис. 13.9) выполнена из электротехнической стали 1561 и имеет следующие размеры: $l_1 = 40$ см; $l_2 = 12$ см; $l_3 = 30$см; $S_1 = S_3 = 4$ см^2; $S_2 = 2$ см^2. Магнитодвижущая сила $F = 1800$ А, поток в первом стержне

$$\Phi_1 = 5{,}94 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Определить длину воздушного зазора $l_в$.

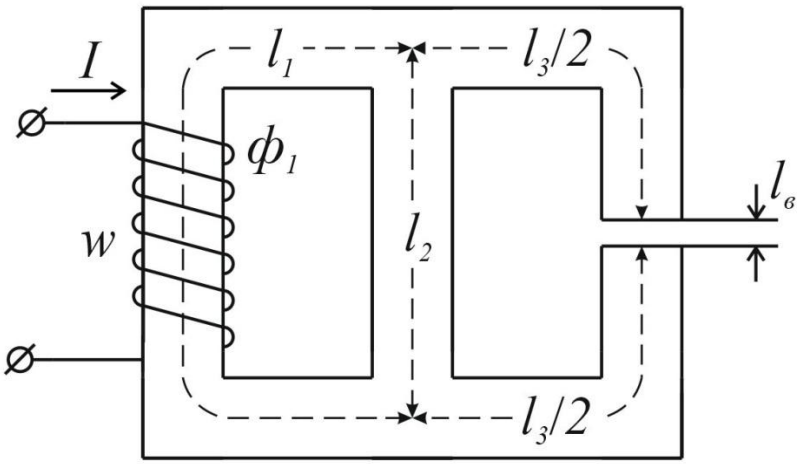


Рис. 13.9

Ответ: $l_в = 1{,}3$ мм.

Литература: [1, §13.1 – 13.13; 3, §1.1–1.7; 6, §23.1; 5, § 2.1–2.6].

Занятие 14

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий нелинейных цепей переменного тока, применение основных соотношений для расчета нелинейных цепей переменного тока.

Основные положения и соотношения

1. Установившиеся процессы в нелинейных цепях переменного тока рассчитываются графическими, аналитическими и графо – аналитическими методами.

Графические и графо – аналитические методы целесообразно применять для решения задач, в которых характеристики нелинейных элементов могут быть приближенно представлены в виде кусочно-линейных функций. При этом на каждом из линейных участков характеристики задача решается как линейная, и определяются координаты точек перехода с одного линейного участка на другой (углы отсечки).

Применение аналитических методов расчета требует аппроксимации характеристики нелинейного элемента какой-либо

достаточно простой функцией – чаще всего полиномом. Простейший аналитический метод состоит в непосредственном решении уравнения цепи (когда это возможно).

2. Сущность *метода гармонической линеаризации* заключается в том, что при воздействии на нелинейный элемент гармонического сигнала в отклике учитывается только основная гармоника, высшие гармоники отбрасываются, и для расчета можно применять комплексный метод. Нелинейный элемент характеризуется нелинейным комплексным сопротивлением-отношением комплексов первых гармоник напряжения и тока нелинейного элемента, причем в общем случае нелинейное комплексное сопротивление зависит от амплитуды и частоты тока. Например, при вольт-амперной характеристике нелинейного резистора

$$u(i) = ai + bi^3$$

нелинейное комплексное сопротивление (активное)

$$\underline{Z}_{\text{Н}} = R_{\text{Н}} = a + \frac{3}{4} b I_m^2,$$

где I_m – амплитуда синусоидального тока. После определения сопротивления нелинейного элемента уравнения цепи решаются алгебраическими методами.

3. Расчет нелинейных цепей переменного тока *по действующим значениям* токов и напряжений дает возможность приближенно учесть гистерезис и вихревые токи в магнитопроводах. Несинусоидальные токи и напряжения заменяются эквивалентными синусоидами. Потери на гистерезис и вихревые токи определяются по экспериментальным данным – либо непосредственно по показаниям ваттметра, либо по экспериментально полученным кривым удельных потерь в стали. Для эквивалентных синусоид тока и напряжения уравнения цепи можно записать и решать в комплексной форме и пользоваться векторными диаграммами.

При известном амплитудном значении потока в магнитопроводе Φ_m действующее значение соответствующего напряжения рассчитывается по формуле

$$\dot{U}_{\Phi} = j4{,}44 f w \Phi_m,$$

где f – частота; w – число витков.

4. Анализ нелинейных цепей по мгновенным значениям. При заданном напряжении на линейном элементе $u(t) = e(t)$ ток может быть найден путем переноса изображающей точки из временной диаграммы напряжения $u(t)$ посредством характеристики $u(i)$ на временную диаграмму тока $i(t)$, (см. рис. 14.1). Указанную операцию отображения обозначим записью

$$u(t) \to u(i) \to i(t).$$

Если задан ток $i(t) = J(t)$, то осуществляется обратное отображение.

В цепи с нелинейной индуктивностью или емкостью такому отображению предшествует или сопутствует аналитическое или графическое дифференцирование либо интегрирование.

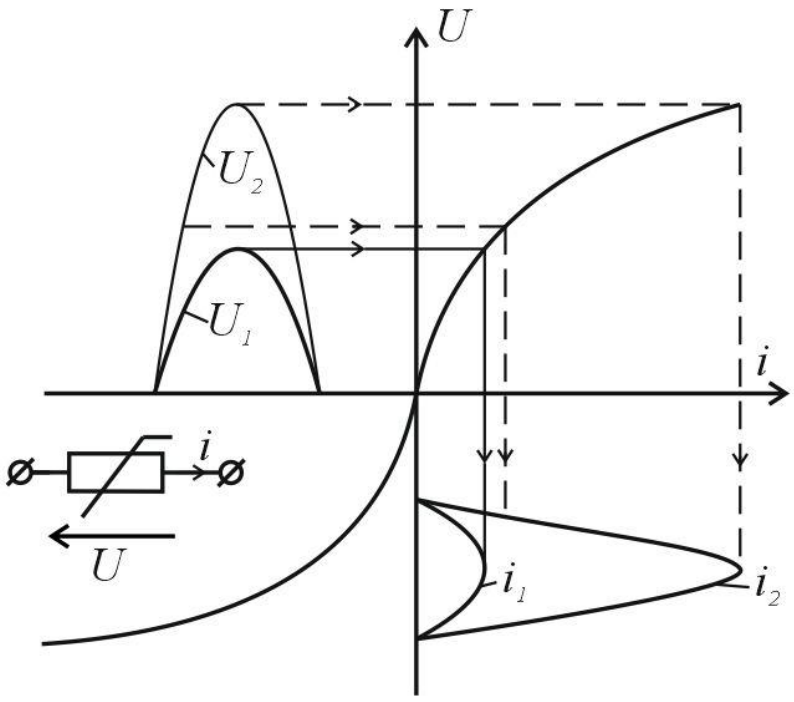


Рис. 14.1

а). В частности, если задано напряжение на индуктивности $a\Psi/dt = e(t)$, то потокосцепление и ток находятся в результате интегрирования и отображения

$$\Psi(t) = \int e(t)dt,\ \Psi(t) \to \Psi(i) \to i(t).$$

При заданном токе индуктивности отображением находиться потокосцепление, затем путем дифференцирования – напряжение:

$$i_L(t) \to \Psi(i) \to\ \Psi(t), u_L = d\Psi/dt.$$

б). Аналогично при заданном напряжении на емкости $U(t) = e(t)$ заряд и ток находятся отображением и дифференцированием

$$u(t) \to q(u) \to q(t), i = dq/dt.$$

Если же задан ток через емкость $i_c(t) = J(t)$, то заряд и напряжение определяется интегрированием и отображением.

$$q(t) = \frac{1}{C}\int idt, q(t) \to q(u) \to u(t).$$

Из рис. 14.1 видно, что изменение только амплитуды воздействия приводит к изменению формы реакции и ее гармонического состава: при большей амплитуде напряжения $(U_{2m} > U_{1m})$ кривая тока i_2 оказалось более вытянутой, чем i_1, процент высших гармоник в ней выше.

Контрольные вопросы

1. Перечислите существующие методы расчета цепей переменного тока.
2. В чем заключается графический метод расчета цепей переменного тока?
3. В чем заключается расчет нелинейных цепей по действующим значениям?
4. Как проводится анализ нелинейных цепей по мгновенным значениям?

Задачи

Графический и графоаналитический методы расчета

Задача 14.1. Резистор с сопротивлением R = 1 кОм подключен к источнику синусоидальной ЭДС $e = 150 sin\omega t$, В (рис. 14.2, а) через диод *Д*, вольт – амперная характеристика которого дана на рис. 14.2, *б*.

Построить график тока *i(t)*, определить среднее I_0 и действующее I значения тока цепи; найти мощность Р источника и мощность P_r потерь в резисторе.

Решение. При расчете диод может быть представлен резистором, эквивалентное сопротивление $R_{экв}$ которого различно при прямом и обратном направлении тока. Эквивалентная схема цепи приведена на рис. 14.3, *а*.

Эквивалентное сопротивление диода определяется по характеристике рис. 14.2, *б* и равно в прямом направлении $100/0{,}2 = 500$ Ом и в обратном направлении $200/0{,}05 = 4000$ Ом. Ток в цепи в прямом i_1 и обратном i_2 направлениях представляет собой отрезки синусоид, амплитуды которых $I_m = E_m/(R + R_{эк})$ и равны соответственно 0,1 А в прямом и 0,03 А в обратном направлении. Зависимость *i(t)* показана на рис. 14.3, *б*.

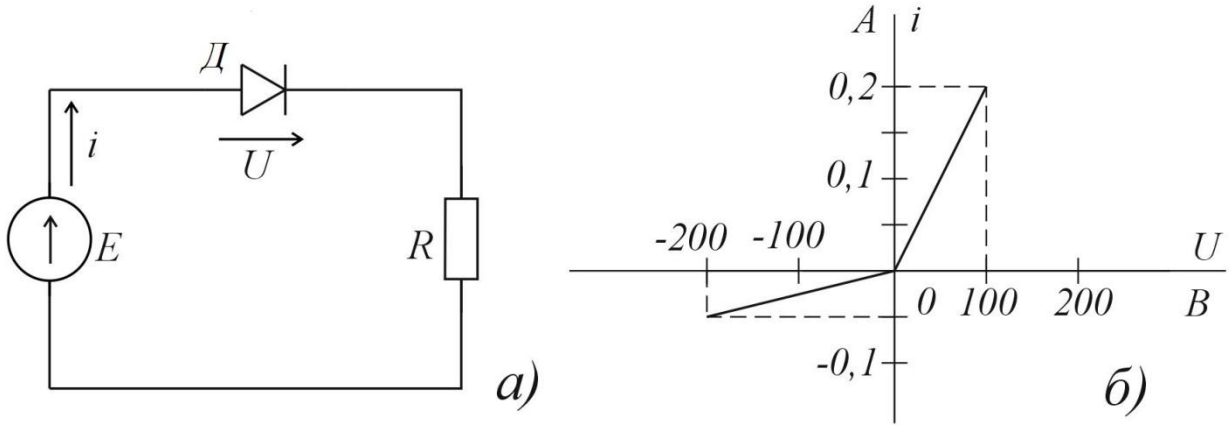


Рис. 14.2

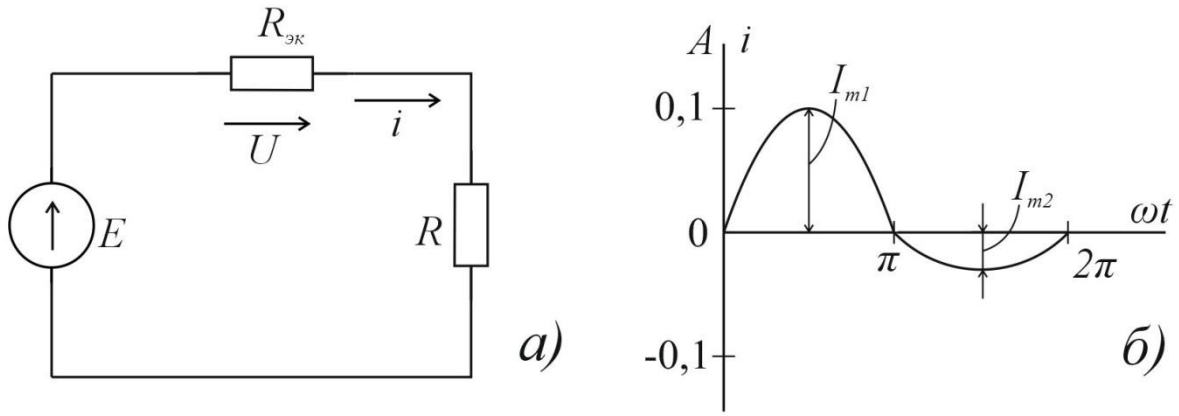


Рис. 14.3

Среднее значение тока $I_0 = I_{01} - I_{02}$, где $I_{01} = I_{m1}/\pi$; $I_{02} = I_{m2}/\pi$. Таким образом, $I_0 = (0{,}1 - 0{,}03)/\pi$=0,0222 А.

Действующие значения тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} I_{m1}^2 sin^2\,\omega t\, d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} I_{m2}^2 sin^2\,\omega t\, d\omega t\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}03^2} = 0{,}052 \text{ А}.$$

Мощность источника

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} ei\, d\omega t = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} ei_1\, d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} ei_2\, d\omega t\right) =$$

$$= \frac{E_m}{4}(I_{m1} + I_{m2}) = \frac{150}{4}(0{,}1 + 0{,}03) = 4{,}9 \text{ Вт}.$$

Мощность потерь в резисторе

$$P_r = RI^2 = 1000 \cdot 0.052^2 = 2{,}7 \text{ Вт}.$$

Примечание. Мощность источника нельзя определить как произведение действующих значений напряжение и тока, поскольку ток несинусоидален.

Задача 14.2. Две катушки с числом витков $w_1 = 2000$ и $w_2 = 400$ намотаны на магнитопровод, сечение которого S = 0,2 см^2 и средняя длина магнитной линии l = 10 см (рис. 14.4, *а*). Кривая намагничивания материала дана на рис. 14.4, *б*.

Построить зависимость потока Ф в магнитопроводе и напряжения u на вторичной обмотке от времени при питании цепи от источника синусоидального тока $i = 0{,}6 \sin 1000t$, А.

Решение. Построим кривую намагничивания в координатах Ф и i (рис. 14.5, *а*), учитывая, что поток (в веберах) $\Phi = BS = B \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ и ток (в амперах)
$i = Hl/w_1 = H \cdot 5 \cdot 10^{-5}$(закон полного тока).

Построение зависимости потока от времени (от ωt) приведено на рис. 14.5, *а – в*.

Напряжение на вторичной обмотке

$$u = w_2 \, d\Phi/dt = w_2 (\partial\Phi/\partial i) \, di/dt. \qquad (1)$$

Зависимость магнитного потока от тока получена в виде кусочно – линейной функции (рис. 14.5, *а*), поэтому можно рассчитать напряжение на отдельных участках. На первом участке $(0 \le \Phi \le 0{,}03$ мВб), как следует из рис. 14.5, *а*, производная $\partial\Phi/\partial i = 3 \cdot 10^{-4}$ Вб/А и напряжение

$$u = 400 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}6 \cdot 1000 \cos 1000t = 72 \cos 1000t, \text{В}. \qquad (2)$$

Угол отсечки θ, соответствующий точке перелома кривой намагничивания при токе i = 0,1 А, определяется из соотношения 0,1 = 0,6 *sin* θ, откуда θ = 0,17 и $t = \theta/\omega = 0{,}17 \cdot 10^{-3}$ с. В момент t = 0 по (2) напряжение $u = 72$ В и в момент $t = 0{,}17 \cdot 10^{-3}$ с напряжением $u = 72 \cos 0{,}17 = 71$ В.

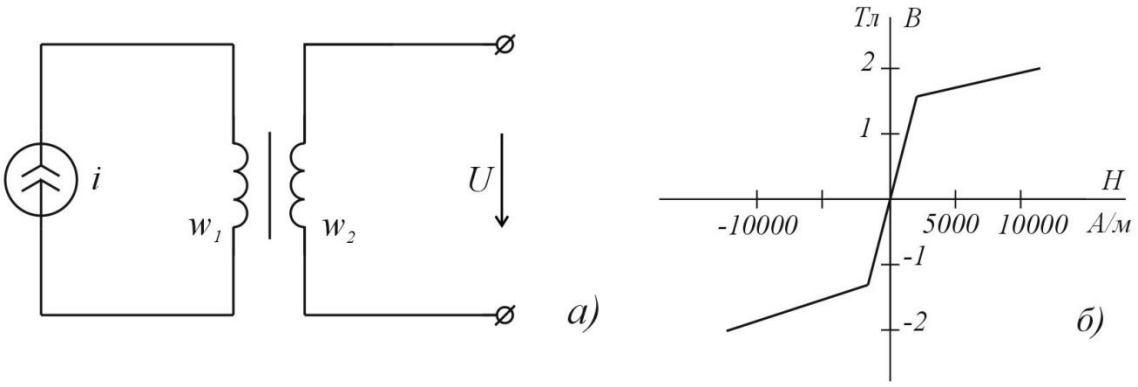


Рис. 14.4

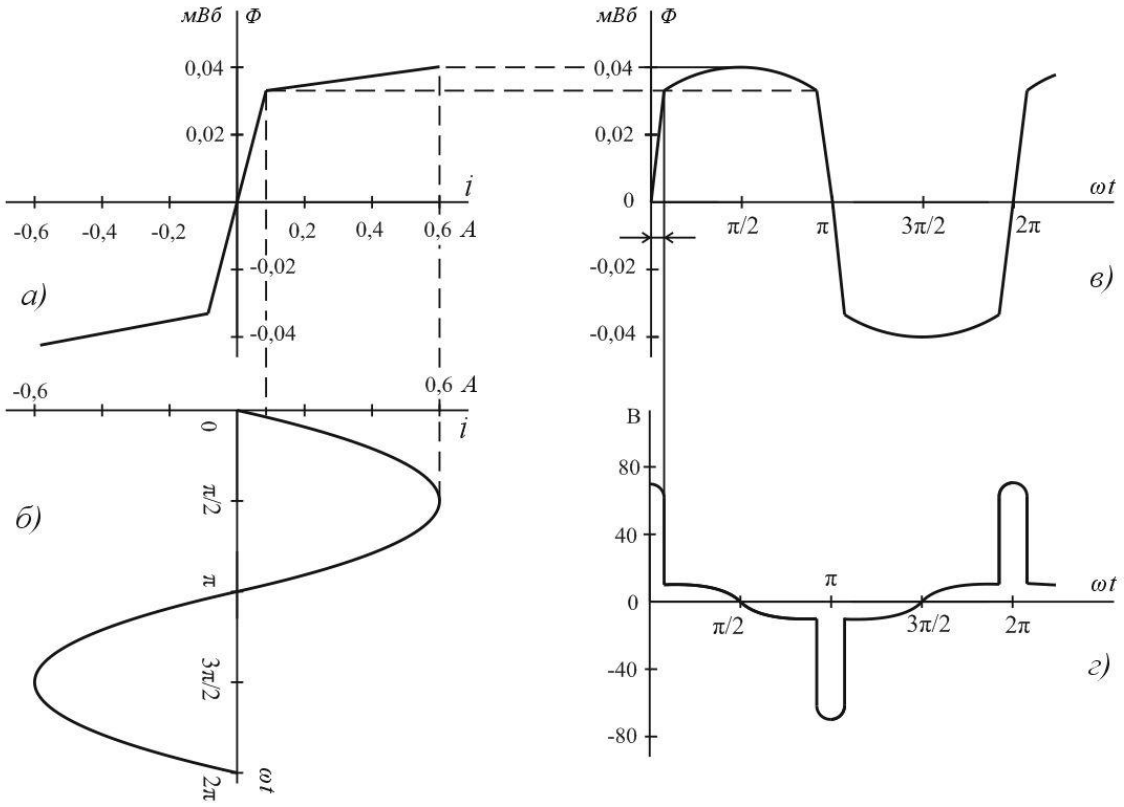


Рис. 14.5

На втором участке $(0{,}03 < \Phi \leq 0{,}04$ мВб$)$ производная $\partial\Phi/\partial i = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ Вб/А и напряжение

$$u = 400 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 \cos 1000t = 4{,}8 \cos 1000t \text{ В}. \quad (3)$$

В момент времени $t = 0{,}17 \cdot 10^{-3}$ с по (3) напряжение $u = 4{,}8 \cos 0{,}17 = 4{,}7$ В и в момент $t = (\pi/2) \cdot 10^{-3}$ с напряжение $u = 0$. Зависимость $u\ (\omega t)$ показана на рис. 14.5, г.

Аналитический метод расчета

Задача 14.3. Катушка, имеющая 500 витков, намотана на стальной магнитопровод, кривая намагничивания которого может быть аппроксимирована полиномом $H = 100\ \text{В} + 200\ \text{В}^3$, где напряженность магнитного поля в амперах на метр, магнитная индукция в теслах. Сечение магнитопровода $S = 10^{-3}\ \text{м}^2$, средняя длинна $l = 0{,}5\ \text{м}$.

Катушка соединена параллельно с конденсатором емкостью 4 мкФ и подключена к источнику синусоидального напряжения и с частотой 50 Гц.

Определить, при каком действующем значении напряжения в цепи возможен резонанс токов на частоте первой гармоники, найти действующее значение всех токов в этом режиме.

Решение. Составляем по заданной кривой H (B) зависимость $i_L(\Psi)$, где Ψ – потокосцепление, учитывая, что

$$B = \frac{\Psi}{wS} = \frac{\Psi}{500 \cdot 10^{-3}} = 2\Psi;\quad H = \frac{wi_L}{l} = \frac{500}{0{,}5} i_L = 1000 i_L$$

(закон полного тока).

Подставив эти зависимости в заданное выражение кривой намагничивания, получим:

$$i_L = 0{,}2\Psi + 1{,}6\Psi^3, \qquad (1)$$

где ток в амперах, потокосцепление в веберах.

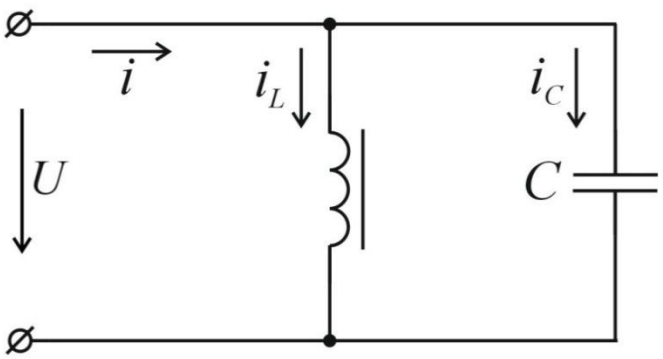


Рис. 14.6

При резонансе токов в контуре 1-ая гармоника i_1 общего тока i должна равняться нулю:

$$i_1 = i_{L1} + i_{C1} = 0. \quad (2)$$

При несинусоидальном напряжении u потокосцепление катушки также синусоидальное, так как $u = d\psi/dt$, и может быть выбрано с нулевой начальной фазой

$$\Psi = \Psi_m \sin \omega t. \quad (3)$$

Ток катушки найдем по (1):

$$i_L = \left(0{,}2\Psi_m + \frac{3}{4}1{,}6\Psi_m^3\right) \sin \omega t - \frac{1}{4}1{,}6\Psi_m^3 \sin 3\omega t = \quad (4)$$
$$= (0{,}2\Psi_m + 1{,}2\Psi_m^3) \sin \omega t - 0{,}4\psi\Psi_m^3 \sin 3\omega t.$$

Ток конденсатора:

$$i_C = C\, du/dt = C\, d^2\Psi/dt^2 = -\omega^2 C\Psi_m \sin \omega t = \quad (5)$$
$$= -0{,}394\Psi_m \sin \omega t$$

Из условия резонанса (2) получим:

$$(0{,}2\Psi_m + 1{,}2\Psi_m^3) \sin \omega t - 0{,}4\Psi_m^3 \sin 3\omega t = 0,$$

откуда: а) $\Psi_m = 0 -$ тривиальное решение или б)$1{,}2\Psi_m^2 + +0{,}2 - 0{,}394 = 0$ и $\Psi_m - 0{,}402$ Вб.

Напряжение $u = d\Psi/dt = \omega\Psi_m \cos \omega t.$ Поэтому в режиме резонанса токов действующее значение напряжения

$$U = \omega\Psi_m/\sqrt{2} = 314 \cdot 0{,}402/\sqrt{2} = 89 \text{ В}.$$

Мгновенное значение тока в катушке по (4)

$$i_L = 0{,}1584 \sin \omega t - 0{,}026 \sin 3\omega t \text{ , А}.$$

Действующее значение тока в катушке

$$L_L = \sqrt{0{,}1584^2/2 + 0{,}026^2/2} = 0{,}114 \text{ А}.$$

Действующее значение тока в конденсаторе по (5)

$$I_c = 0{,}394\,\psi_m/\sqrt{2} = 0{,}394 \cdot 0{,}402/\sqrt{2} = 0{,}112 \text{ А}.$$

Мгновенное значение тока источника

$$i = i_L + i_C = -0{,}04\psi_m^3 \sin 3\omega t = -0{,}026 \sin 3\omega t, \text{ А}.$$

Действующее значения тока с источника

$$I = 0{,}026/\sqrt{2} = 0{,}0184 \text{ А}.$$

Задача 14.4. Цепь состоит из катушки со стальным магнитопроводом, имеющей 100 витков, соединенной последовательно с конденсатором емкостью 8 мкФ и подключенной к источнику синусоидального тока $i = I_m \sin 1000t$ А. Зависимость магнитного потока от тока катушки аппроксимирована полиномом $\Phi = 2 \cdot 10^{-3} i - 10^{-3} i^3$, где поток в веберах, ток в амперах.

Цепь настроена в резонанс на частоте первой гармоники изменением амплитуды тока.

Определить, при какой амплитуде тока наблюдается резонанс.

Ответ: $I_m = 1$ А.

Задача 14.5. Катушка с ферримагнитным сердечником подсоединена к источнику синусоидального напряжения $u == U_m \cos \omega t$, $U_m = 1100$ В, $\omega = 314$ сек$^{-1}$, число витков обмотки $w = 1000$, сечение магнитопровода $S = 25$ см^2, длина средней силовой линии $l = 1$ м. Характеристика намагничивания материала сердечника задана таблицей:

B, Вб/м^2	*0*	*0,5*	*1,0*	*1,5*	*1,6*
H, а/м	*0*	*500*	*2000*	*8000*	*12000*

Определить: 1-ю и 3-ю гармоники тока в цепи, пренебрегая активным сопротивлением обмотки и потерями энергии в стали. Решить задачу графически и аналитически.

Ответ: $i \approx 4{,}1 \sin \omega t - 1{,}4 \sin 3\omega t$ А.

Указание. Сначала следует построить вебер-амперную характеристику катушки $\Psi(i)$, используя характеристику материала и размеры катушки: $\Psi(t)$ из соотношения $d\Psi/dt = U_m \cos \omega t$. Наконец, найти $i(t)$, по $\Psi(t)$ и $\Psi(i)$.

Литература: [1, § 15.4 – 15.8, 15.57 – 15.60; 3, § 4.1 – 4.6; 5, § 3.4– 3.12].

Занятие 15

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий электростатических полей, применение основных соотношений для расчета электростатических полей.

Основные положения и соотношения.

Для статических, стационарных и квазистатических электрических полей справедливы уравнения:

$$rot\bar{E} = 0;$$

$$\oint \bar{E}\, dl = 0;$$

$$div\bar{D} = \rho;$$

$$\oint \bar{D}\, dS = \sum q, \qquad (15.1)$$

где l – контур интегрирования; S – поверхность интегрирования; ρ – объемная плотность свободных зарядов; $\sum q$ – сумма свободных зарядов.

Скалярный потенциал φ определяется

$$\bar{E} = -grad\ \varphi. \qquad (15.2)$$

В однородной среде (с постоянной относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = const$) для потенциала справедливо утверждение Пуассона:

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0, \qquad (15.3)$$

и, в частности, уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = 0. \qquad (15.4)$$

Граничные условия

Для всех электрических полей

$$E_{1t} = E_{2t} \text{ или } \varphi_1 = \varphi_2; \qquad (15.5)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = q_S, \qquad (15.6)$$

Для статических полей на границе раздела двух диэлектриков:

$$D_{1n} = D_{2n} \text{ или } \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -q_{\text{связ}}.$$

При этом

$$\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P}.$$

Для стационарных полей на границе раздела двух проводников

$$J_{1n} = J_{2n} \text{ или } \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n},$$

Для квазистатических полей на границе раздела двух диэлектриков с проводимостью

$$J_{1n} + \partial D_{1n}/\partial t = J_{2n} + \partial D_{2n}/\partial t,$$

на границе раздела двух диэлектриков с вязкостью

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

В приведенных выше формулах E_t – составляющая вектора напряженности поля, касательная к границе раздела сред; D_n, P_n и J_n – составляющие векторов смещения, поляризации и плотности тока проводимости, нормальные к границе раздела, при условии, что нормаль направлена из первой среды во вторую; q_S и $q_{S_{\text{связ}}}$ – поверхностные плотности свободных и связанных зарядов; ε_1 и ε_2 – относительные диэлектрические проницаемости; σ_1 и σ_2 – удельные проводимости.

Электростатическое поле

Для линейной среды по методу наложения

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \cdots = \sum_n \overline{E}_n;$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots = \sum_n \varphi_n.$$

Для системы заряженных проводов формулы Максвелла с потенциальными коэффициентами имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 + \cdots;\\
\varphi_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 + \cdots;\\
\varphi_3 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 + \cdots;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}; \qquad (15.7)$$

где φ_k и q_k – потенциалы и заряды проводов, причем собственный потенциальный коэффициент $\alpha_{nn} = \varphi_n/q_n$ при всех остальных q_k (кроме q_n) равных нулю. Взаимный потенциальный коэффициент $\alpha_{nm} = \varphi_n/q_m$ при всех остальных q_k (кроме q_m) равных нулю.

Формулы Максвелла с емкостными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \cdots;\\
q_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \cdots;\\
q_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \cdots;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\};$$

где собственный емкостный коэффициент $\beta_{nn} = q_n/\varphi_n$ при всех остальных φ_k (кроме φ_k) равных нулю. Взаимный емкостный коэффициент $\beta_{nm} = q_n/\varphi_m$ при всех остальных φ_k (кроме φ_m) равных нулю.

Формулы с частичными емкостями:

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \cdots;\\
q_2 &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + \cdots;\\
q_3 &= C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2) + C_{33}(\varphi_3 - \varphi_0) + \cdots;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\};$$

где собственная частичная емкость $C_{nn} = q_{nn}/(\varphi_n - \varphi_0)$ при $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots \neq \varphi_0$, взаимная частичная емкость $C_{nm} = q_n/(\varphi_n - \varphi_m)$ при $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_0 = 0$ (кроме $\varphi_n \neq \varphi_m$).

Потенциал поля диполя

$$\varphi = p\cos\theta/4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R^2,$$

где p – дипольный момент; R и θ – сферические координаты.

Потенциал поля двухпроводной линии в вакууме:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{r_-}{r_+}, \qquad (15.8)$$

где τ – заряд на единицу длины линии; r_- и r_+ – расстояния от точки наблюдения до отрицательно и положительно заряженных проводов соответственно.

Для расчета электростатического поля заряда вблизи плоской границы раздела диэлектрика и проводника или двух диэлектриков можно применить метод отражений. При отражении точечного заряда q у плоской границы проводника отраженный заряд $q_1 = -q$. При отражении у границы двух диэлектриков (рис. 15.1а) поле в той среде, где задан точечный заряд q (рис. 15.1б), определяется зарядом q и зарядом

$$q_1 = q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = k_1 q;$$

поле по другую сторону границы (рис. 15.1в) определяется зарядом

$$q_2 = q \cdot 2\varepsilon_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = k_2 q,$$

где ε_{r1} – относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряд q; ε_2 – относительная диэлектрическая проницаемость среды по другую сторону границы.

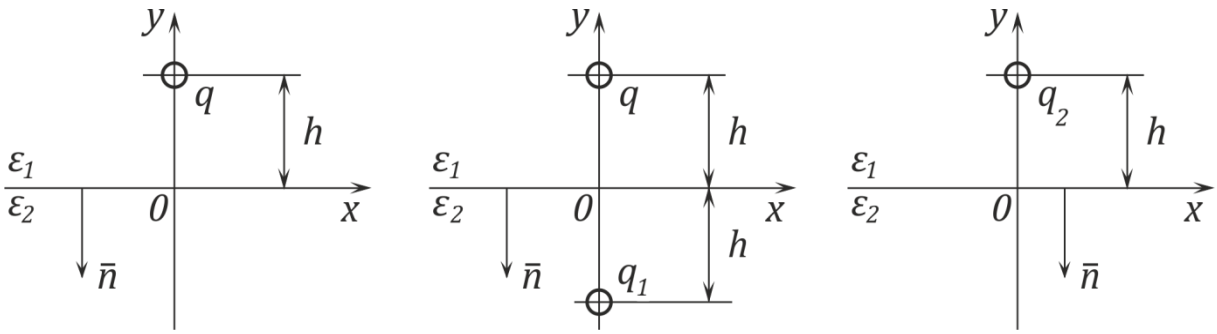
Дополнительные заряды должны находиться на том же расстоянии от границы, что и заданный.

Для неоднородного диэлектрика ($\varepsilon \neq const$):

$$div\,\overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} - \overline{E}\frac{grad\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\rho + \rho_{связ}}{\varepsilon_0},$$

$$div\,\overline{P} = -\rho_{связ}.$$

где $\rho_{связ}$ – объемная плотность связанных зарядов.



а) *б)* *в)*

Рис. 15.1

Контрольные вопросы.

1. Запишите уравнение для статических электрических полей.
2. Каким соотношением связаны напряженность электрического поля и потенциал?
3. Запишите уравнение Пуассона и Лапласа.
4. Как определяется потенциал поля диполя?
5. Чему равен потенциал поля двухпроводной линии в вакууме?
6. Запишите уравнения Максвелла с потенциальными коэффициентами.

Задачи

Задача 15.1. Точечные заряды $+2q$ и $-q$ находятся на расстоянии l = 10 см (рис. 15.2) в вакууме.

1) Считая потенциал бесконечно удаленной точки равной нулю, найти положение, размеры и потенциал эквипотенциальной поверхности, имеющей сферическую форму.

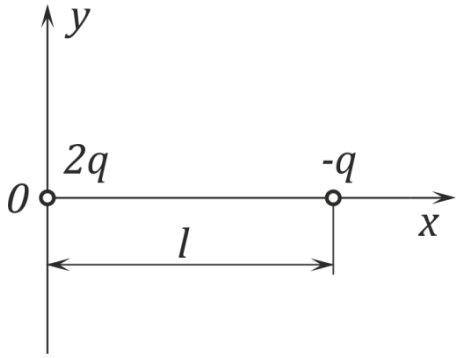


Рис. 15.2

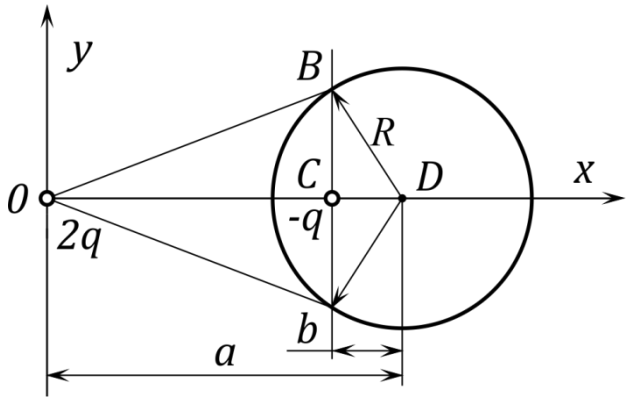


Рис. 25.3

2) Доказать, что заряд $-q$ лежит в плоскости, которая проходит через точки касания лучей, проведенных к сфере из точки расположения заряда $+2q$.

Решение. 1) При выбранных осях координат (рис 15.2) для любой точки, находящейся в плоскости, где находятся заряды, потенциал

$$\varphi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$$

Уравнение окружности $\left(x-\frac{4}{3}l\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}l^2$, т. е. эквипотенциаль в плоскости xy, получится, если положить потенциал φ=0. Следовательно, форму окружности (рис 15.3) имеет эквипотенциаль, потенциал которой равен потенциалу бесконечно уда-

ленной точки. Радиус окружности $R = 2l/3 = 6{,}7$ см, центр ее лежит на оси *x* на расстоянии $a = 4l/3 = 13{,}3$ см от начала координат. Отметим, что остальные эквипотенциали имеют более сложную форму.

2) Проведем касательные из точки расположения заряда $2q$ (начала координат) к сфере и плоскость через точки касания (рис. 15.3). Так как треугольник *OBD* подобен треугольнику *BCD*, то $b/R = R/a$ или $b = R^2/a$; кроме того, $b = a - OC$. Откуда $OC = a - R^2/a = 4l/3 - l/3 = l$; таким образом, заряд $-q$ находится в точке C и действительно лежит в плоскости, проходящей через точки касания.

Задача 15.2. Определить потенциалы и заряды системы проводов, изображенной на рис. 15.4, если рубильники проводов 1 и 2 замкнуть, а рубильник провода 3 оставить разомкнутым. Выяснить, как изменится решение, если сначала провод 2 отключить от земли, затем провод 1 отключить от источника и, наконец, провод 3 соединить с землей.

Дано: $U = 10$ кВ; радиус проводов $r_0 = 10$ мм; $h_1 = h_3 = 3$ м; $h_2 = 4{,}5$ м; $d = 2$ м.

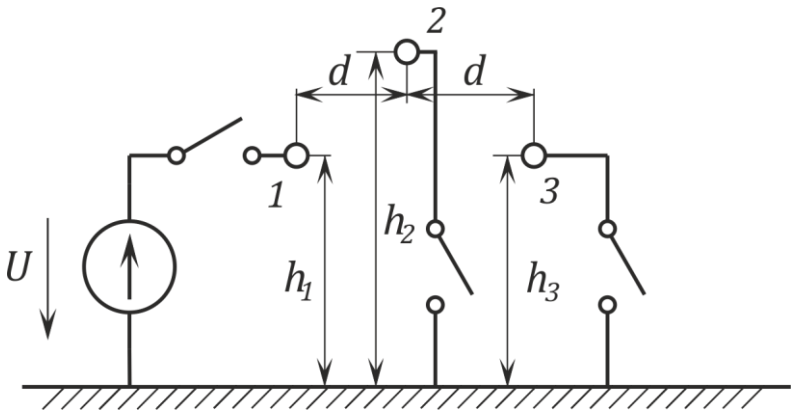


Рис. 15.4

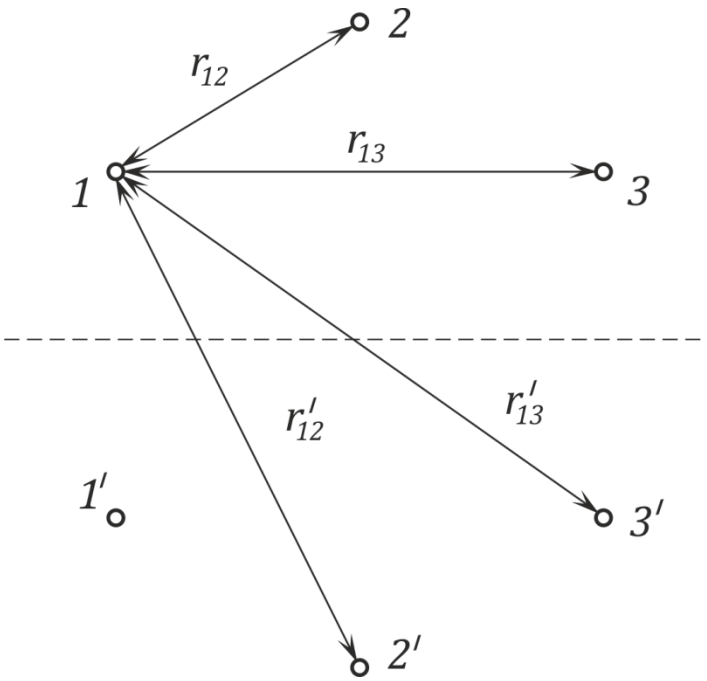


Рис. 15.5

Решение. Заданную систему проводов по методу зеркальных изображений заменим системой шести проводов (рис. 15.5).

Потенциалы проводов 1 и 2 заданы условиями задачи:

$$\varphi_1 = 10 \text{ кВ};\ \varphi_2 = 0;\ \text{заряд } \tau_3 = 0.$$

Остальные потенциалы и заряды определим из системы трех уравнений с потенциальными коэффициентами (15.7) после замены q на τ, причем при заданных условиях:

$$10^4 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2; \quad (1)$$

$$0 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2; \quad (2)$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2, \quad (3)$$

где $\alpha_{11} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{h_1}{r_0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} ln600 = 115 \cdot 10^9$ м/Ф;

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{h_2}{r_0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} ln900 = 123 \cdot 10^9 \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{r'_{12}}{r_{12}} = 20 \cdot 10^9 \text{ м/Ф};$$

$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} ln \frac{r'_{13}}{r_{13}} = 10{,}6 \cdot 10^9$ м/Ф, записаны в соответствии с (15.7) с учетом (15.8).

Решив совместно (1) и (2), получим: $\tau_1 = 80$ мкКл/км; $\tau_2 = -12$ мкКл/км. Из (3) находим $\varphi_3 = 605$ В.

После переключений $\tau'_1 = \tau_1$, $\tau'_2 = \tau_2$, $\varphi_2 = 0$. Далее из системы уравнений с потенциальными коэффициентами определим: $\varphi'_1 = 9950$ В; $\varphi'_2 = -88$ В; $\tau'_3 = -4676$ мкКл/км.

Задача 15.3. Определить частичные емкости системы проводов задачи 15.2.

Ответ: $C_{11} = 7{,}05$ пФ/м; $C_{22} = 5{,}8$ пФ/м; $C_{33} = 7{,}05$ пФ/м; $C_{12} = 1{,}38$ пФ/м; $C_{13} = 0{,}59$ пФ/м; $C_{23} = 1{,}38$ пФ/м.

Задача 15.4. Двухпроводная линия состоит из двух мощных цилиндров с радиусами 6 и 10 мм, находящихся на расстоянии 25 мм друг от друга.

Определить емкость системы.

Ответ: $C = 26{,}6$ пФ/м.

Литература: [1, § 15.57 – 15.60; 3, § 4.6; 5, § 6.1–6.7].

Занятие 16.

СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Цель занятия: изучение и закрепление основных понятий стационарных полей, переменного электромагнитного поля, применение основных соотношений для расчета таких полей.

Стационарное поле

В стационарном поле основные уравнения и соотношения (15.1)–(15.6) дополняются следующими:

$$div\,\bar{J} = 0;$$

$$\oint \bar{J}\,dS = 0; \qquad (16.1)$$

$$\bar{J} = \sigma E,$$

где $\bar{J}$ – плотность тока проводимости; σ – удельная проводимость среды.

Мощность потерь в единице объема

$$p = \bar{J} \cdot \bar{E} = \sigma E^2 = J^2/\sigma.$$

Для расчета поля провода с током *I* вблизи плоской границы двух проводящих сред можно применить метод отражений (см. расчет поля точечного заряда у границы раздела диэлектриков и рис 15.1). Дополнительные токи

$$I_1 = I(\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2) = n_1 I; \quad I_2 = I \cdot 2\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2) = n_2 I.$$

Для неоднородной ($\sigma \neq const$) проводящей среды:

$$div\,\bar{E} = -\bar{E}\,\frac{grad\,\sigma}{\sigma}.$$

Существует аналогия между электростатическим полем без объемного заряда и стационарным полем в области, где нет сторонних сил, при этом аналогичны параметры:

Электростатическое поле . . .	E	φ	D	q	$\varepsilon_r\varepsilon_0$	C
Стационарное поле	E	φ	J	I	σ	G

Проводимость G между двумя электродами в проводящей среде определяется через емкость C между теми же электродами в диэлектрике (или наоборот):

$$G = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} C.$$

Магнитное поле

Основные уравнения:

$$\begin{aligned} &rot\,\overline{H} = \bar{J}; \\ &\oint \overline{H}\, d\bar{l} = \int \bar{J}\, d\bar{s} = \bar{I}; \\ &div\,\overline{B} = 0; \\ &\oint \overline{B}\, d\bar{s} = 0, \end{aligned} \qquad (16.2)$$

где l – контур интегрирования; S – поверхность интегрирования; J – плотность тока проводимости.

Векторный потенциал A вводится соотношением

$$rot\,\overline{A} = \overline{B}.$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int \overline{B}\, d\bar{S} = \oint \overline{A}\, d\bar{l}.$$

В однородной среде уравнение Пуассона для векторного потенциала:

$$\nabla^2 \overline{A} = -\mu\mu_0 \bar{J}.$$

Граничные условия:

$$H_{2t} - H_{1t} = J_S,$$

где H_t – составляющая вектора напряженности поля, касательная к границе раздела сред; J_S – поверхностная плотность тока;

$$B_{1n} = B_{2n},$$

где B_n – составляющая вектора индукции, нормальная к границе раздела.

В области, где отсутствуют токи, для описания магнитного поля может быть введен скалярный потенциал φ_m, определяемый соотношением:

$$\overline{H} = -grad\ \varphi_m.$$

В неоднородной среде скалярный потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\nabla^2 \varphi_m = div\ \overline{M},$$

где $\overline{M}$ – вектор намагниченности.

В однородной среде скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_m = 0.$$

Существует формальная аналогия между постоянным магнитным полем и электростатическим, в котором отсутствуют заряды. Аналогичными параметрами являются:

Магнитное поле	$\overline{H}$	φ_m	$\overline{B}$	$\mu\mu_0$	Φ
Электростатическое поле	$\overline{E}$	φ	$\overline{D}$	$\varepsilon\varepsilon_0$	Φ_D

Здесь $\overline{\Phi}_D$ – поток вектора электрического смещения.

Электромагнитное поле

Распределение электромагнитного поля в пространстве находится как решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} rot\,\overline{H} &= \bar{J} + \partial\overline{D}/\partial t\,; \\ rot\,\overline{E} &= -\,\partial\overline{B}/\partial t\,; \\ div\,\overline{D} &= \rho; \\ div\,\overline{B} &= 0. \end{aligned} \qquad (16.3)$$

и уравнений связи между векторами:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \sigma\overline{E}; \\ \overline{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\overline{E}; \\ \overline{B} &= \mu\mu_0\overline{H}. \end{aligned} \qquad (16.4)$$

где J – плотность тока проводимости; ρ – объемная плотность свободного заряда; σ – удельная проводимость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c_0^2$; $c_0 = 3 \cdot 10^8$ м/с^2 – скорость света в вакууме.

При расчете гармонических полей, как и при расчете цепей синусоидального тока, целесообразно применять комплексный метод. В комплексной форме:

$$rot\,\dot{H} = \dot{J} + j\omega\dot{D} = \sigma\dot{E} + j\omega\varepsilon\varepsilon_0\dot{E};$$

$$rot\,\dot{E} = -j\omega\dot{B} = -j\omega\mu\mu_0\dot{H};$$

$$div\,\dot{D} = \dot{\rho};$$

$$div\,\dot{B} = 0.$$

Векторы поля в неподвижной среде можно выразить через электродинамические потенциалы – векторный магнитный $\overline{A}$ и электрический скалярный φ:

$$\overline{B} = rot\,\overline{A};$$

$$\overline{E} = -grad\,\varphi - \partial\overline{A}/\partial t.$$

Электродинамические потенциалы удовлетворяют соответственно векторному и скалярному уравнениям

$$\nabla^2\overline{A} - \frac{1}{c^2}\partial^2\overline{A}/\partial t^2 = -\mu\mu_0\overline{J};$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\partial^2\varphi/\partial t^2 = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0.$$

и связаны зависимостью:

$$div\,\overline{A} = -\frac{1}{c^2}\partial\varphi/\partial t,$$

где $c = c_0/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

В комплексной форме

$$\dot{B} = rot\,\dot{A};$$

$$\dot{E} = -grad\,\dot{\varphi} - j\omega\dot{A};$$

$$\nabla^2\dot{A} + \frac{\omega^2}{c^2}\dot{A} = -\mu\mu_0\dot{j};$$

$$\nabla^2\dot{\varphi} + \frac{\omega^2}{c^2}\dot{\varphi} = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0.$$

Из системы (16.3)–(16.4) можно получить одно уравнение для любого вектора поля, например для вектора $\overline{H}$:

$$\nabla^2\overline{H} - \mu\mu_0\sigma\,\partial\overline{H}/\partial t - \frac{1}{c^2}\,\partial^2\overline{H}/\partial t^2 = 0.$$

В комплексной форме:

$$\nabla^2\dot{H} - j\omega\mu\mu_0\sigma\dot{H} - \frac{\omega^2}{c^2}\,\dot{H} = 0$$

или

$$\nabla^2\dot{H} - \underline{\gamma}^2 H \doteq 0.$$

где $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\sigma - k_0^2\mu\varepsilon}$ – коэффициент распространения; α – коэффициент ослабления; β – коэффициент фазы; $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число для вакуума.

У плоской электромагнитной волны векторы $\dot{E}$ и $\dot{H}$ ортогональны и находятся в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Для волны в проводящей среде, распространяющейся вдоль оси z при напряженности электрического поля

$$\dot{E} = i\dot{E}_x;\ \dot{E}_x = \dot{E}_0 e^{-\underline{\gamma}z},$$

напряженность магнитного поля

$$\dot{H} = j\dot{H}_y;\ \dot{H}_y = \dot{H}_0 e^{-\underline{\gamma}z},$$

где $\dot{E}_0$ и $\dot{H}_0$ – напряженности поля при $z = 0$, а $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\sigma}$.

Отношение $\dot{E}/\dot{H} = \dot{E}_0/\dot{H}_0 = \underline{Z_в}$ – волновое сопротивление

$$\underline{Z_в} = \sqrt{\omega\mu\mu_0/\sigma}\, e^{j45^\circ}.$$

Глубина проникновения плоской волны

$$z_0 = 1/\alpha;$$

длина волны

$$\lambda = 2\pi/\beta.$$

Для плоской волны в диэлектрике без потерь

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 e^{-jkz};\ \dot{H}_y = \dot{H}_0 e^{-jkz},$$

где $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/c$ – волновое число.

Волновое сопротивление

$$\underline{Z_в} = z_в = \sqrt{\mu\mu_0/\varepsilon\varepsilon_0} = 120\pi\sqrt{\mu/\varepsilon}\,, \text{Ом}$$

Длина волны

$$\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi c/\omega.$$

Движение энергии в электромагнитном поле характеризуется вектором Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \left[\overline{E}\cdot\overline{H}\right].$$

В комплексной форме

$$\underline{\vec{\Pi}} = \left[\dot{E}\dot{H}^*\right].$$

По теореме Умова–Пойнтинга

$$-\oint \vec{\Pi}\, dS = P + \int \frac{\partial W_э}{\partial t}\, dV + \int \frac{\partial W_м}{\partial t}\, dV,$$

где S – замкнутая поверхность интегрирования; P – мощность преобразования энергии электромагнитного поля в другие виды энергии в объеме V, ограниченного поверхностью S; $W_э$ и $W_м$ – плотности энергии электрического и магнитного полей в том же объеме.

В комплексной форме

$$-\oint \underline{\vec{\Pi}}\, dS = P + jQ,$$

где P и Q – активная и реактивная мощности в объеме, ограниченном поверхностью S.

Задачи

Задача 16.1. Сферический заземлитель радиусом $R_0 = 2$ м находится в земле ($\sigma_1 = 2 \cdot 10^4$ См/см) на расстоянии $h = 10$ м от ее поверхности (рис. 16.1). Ток заземлителя $I = 1000$ А.

Определить распределение шагового напряжения и поверхностного заряда на границе.

Решение. Для расчета поля в земле (первая среда) введем фиктивный ток (рис. 16.2.а) $I = n_1 I = I = 1000$ А (считая удельную проводимость воздуха $\sigma_2 = 0$); для расчета поля в воздухе (вторая среда) введем фиктивный заряд (рис 16.2,б) $q_2 = 2I\,\varepsilon_0/\sigma_1 = 0{,}886 \cdot 10^{-6}$ Кл [выражение заряда q_2 через ток I получается из граничных условий].

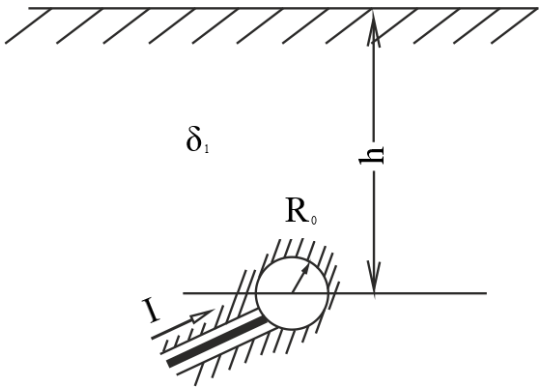


Рис. 16.1

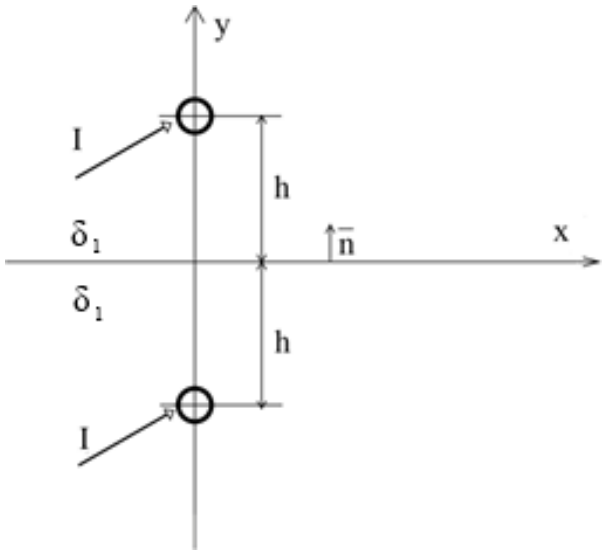


Рис. 16.2 *а)*

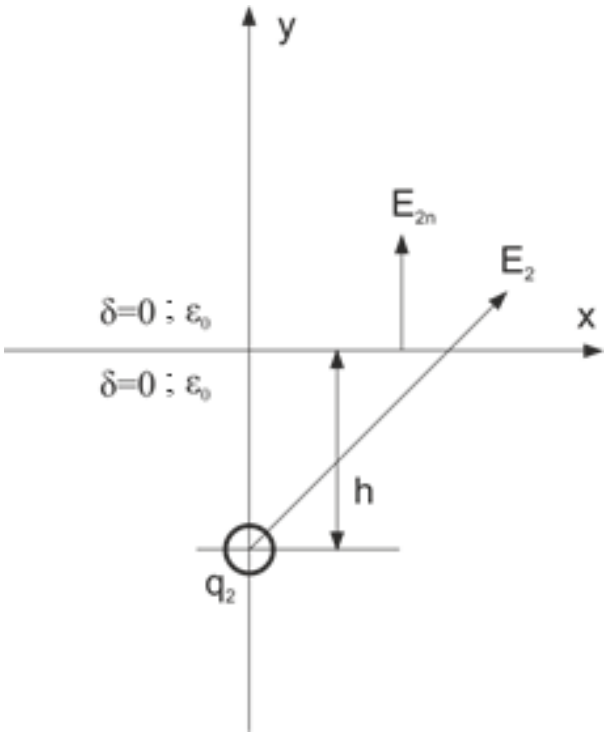


Рис. 16.2 *б)*

В однородной проводящей среде при растекании тока I напряженность поля $E = J/\sigma = I/4\pi\sigma R^2$ и

$$\varphi = \int E\, dR + C = \frac{I}{4\pi\sigma R},$$

если принять $\varphi = 0$ при $R \to \infty$.

Шаговое напряжение (разность потенциалов на поверхности земли между точками, находящимися на расстоянии 0,8 м) с учетом токов I и I_1

$$U_{\text{ш}} = \frac{I}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+0{,}8)^2+h^2}}\right\} =$$

$$= 8\cdot 10^3\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+100}} - \frac{1}{\sqrt{(x+0{,}8)^2+100}}\right\} \text{ В},$$

где x – в метрах.

Поверхностный заряд $q_S = \varepsilon_0 E_{2n}$, так как $J_{1n} = J_{2n} = 0$ (тока во второй среде нет) и в первой среде (земле) $E_{1n} = J_{1n}/\sigma_1 = 0$.

Выразив во второй среде E_{2n} через q_2, получим:

$$q_S = \frac{q_2 h}{4\pi(h^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2l\varepsilon_0 h}{4\pi\sigma_1(h^2+x^2)^{3/2}} = \frac{0{,}7}{(x^2+100)^{3/2}}\ \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2},$$

где x – в метрах.

Задача 16.2. Тонкое диэлектрическое немагнитное кольцо, заряженное с объемной плотностью заряда ρ, вращается вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 16.3). Частота вращения кольца в секунду равна n. Радиусы кольца равны r_1 и r_2, толщина его Δy. Относительная магнитная проницаемость окружающей кольцо среды равна единице.

Определить магнитную индукцию в точке M, лежащей на оси вращения на расстоянии y от плоскости кольца.

Решение. Плотность тока движущихся зарядов

$$J = \rho v = \rho\omega r = \rho 2\pi n r,$$

где ω – угловая скорость вращения.

Ток, приходящийся на элемент длины радиуса dr,

$$dI = J\,dr\,(\Delta y) = (\Delta y)\rho 2\pi n r\,dr.$$

По закону Био–Савара напряженность поля на оси, обусловленная элементарным кольцевым током *dI*,

$$dH = dH_y = dI\,\frac{2\pi r}{4\pi R^2}\sin\beta = dI\,\frac{\sin^3\beta}{2r} = (\Delta y)\rho\pi\sin^3\beta\,dr.$$

Искомая напряженность поля кольца на его оси

$$H = H_y = \int (\Delta y)\rho\pi\sin^3\beta\,dr.$$

Так как $r = y\,\mathrm{tg}\,\beta$ (рис. 16.3) и $\mathrm{dr} = \mathrm{y}\,d\beta/\cos^2\beta$, то

$$H = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\Delta y)\rho\pi n y\,\frac{\sin^3\beta}{\cos^2\beta}\,d\beta =$$

$$= 2\pi(\Delta y)\rho n\left(r_2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_2}{2}\sin^2\frac{\beta_2}{2} - -r_1\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_1}{2}\sin^2\frac{\beta_1}{2}\right);$$

$$B = \mu_0 H.$$

Если $r_1 = 0$, т. е. кольцо превращается в диск радиусом r_2, то

$$H = 2\pi(\Delta y)\rho n r_2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta_2}{2}\sin^2\frac{\beta_2}{2}.$$

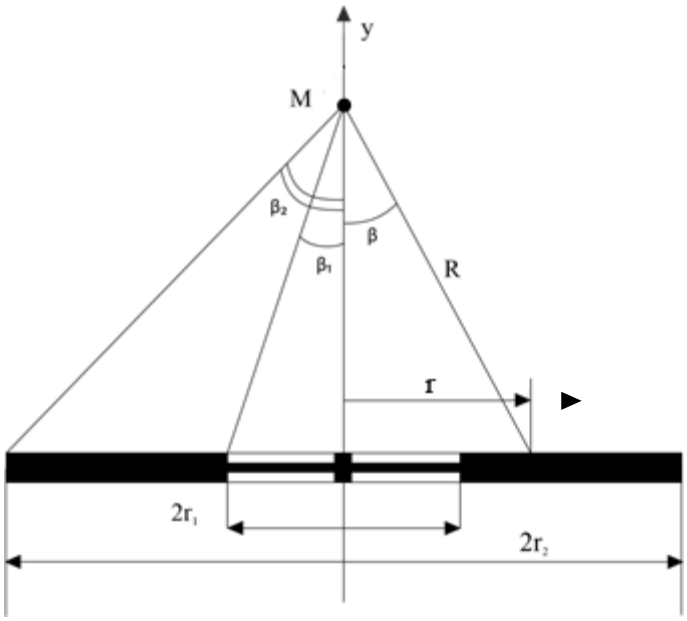


Рис. 36.3

Задача 16.3. По двухпроводной линии постоянного тока передается мощность *P* при напряжении *U* и токе *I*.

Пренебрегая сопротивлением проводов, радиус которых r_0, найти зависимость вектора Пойнтинга от координаты *x* вдоль линии, соединяющей оси проводов (рис. 16.4).

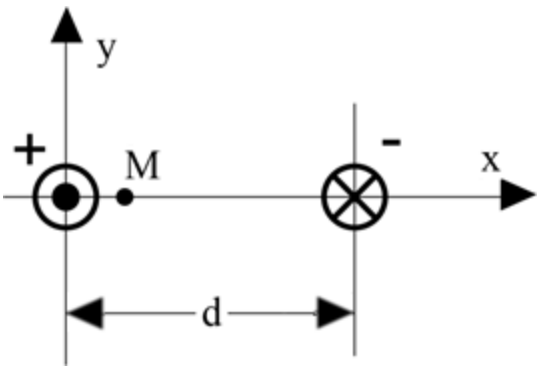


Рис. 16.4

Решение. На линии, соединяющей оси проводов (ось *x*), составляющие векторов как $\overline{E}$, так и $\overline{H}$, обусловленные каждым проводом в отдельности, или совпадают по направлению, или направлены противоположно.

На основании теоремы Гаусса вне проводов получим для вектора $\overline{E}$, имеющего на оси *x* только составляющую E_x,0

$$E_x = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right),$$

где $\tau = C_0 U$ и $C_0 = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r_0)}$ – емкость линии на единицу длины.

По закону полного тока не проводов получим для вектора $\overline{H}$, имеющего на оси только составляющую H_y,

$$H_y = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-d}\right).$$

Вектор Пойнтинга вне проводов на оси *x* имеет только составляющую

$$\Pi_z = E_x H_y = \frac{UI}{4\pi \ln(d/r_0)} \frac{d^2}{x^2(x-d)^2}.$$

Внутри проводов $\Pi = 0$, так как $E = 0$.

Задача 16.4. Ток короткого замыкания 1000 А проходит в землю через фундамент опоры, который можно рассматривать как полусферический заземлитель. Удельная проводимость земли $2 \cdot 10^4$ См/см.

Найти шаговое напряжение на расстоянии 5 м от центра опоры (длина шага 0,8 м).

Ответ: U=220 В.

Задача 16.5. Пренебрегая сопротивлением проводников коаксиального кабеля (рис 16.5), найти зависимость мощности, передаваемой внутри цилиндрической поверхности радиусом *r*, от значения этого радиуса.

Ответ: $P = \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1)$.

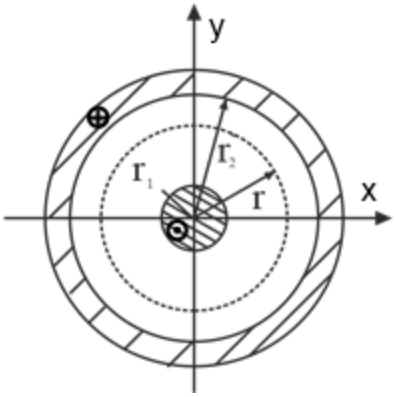


Рис. 16.5

Литература: [1, § 18.1 – 18.7; 19.1–19.4, 3, § 4.6; 5, § 7.1–7.4].

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов.– Москва: Гардарики, 2007. – 701 с.

2. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи / Г. И. Атабеков. – Санкт-Петербург: Лань, 2009.– 592 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=90

3. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле / Г. И. Атабеков [и др.]. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 432 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=644

4. Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин. – Санкт-Петербург: Питер, 2009.– Т.1. – 512 с.

5. Демирчян, К. С. Теоретические основы электротехники / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин. – Санкт-Петербург: Питер, 2009.– Т.2. – 431 с.

6. Зевеке, Г. В. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин. – Ленинград: Энергия, 1989. – 528 с.

7. Электрические измерения / под ред. А. В. Фремке, Е. М. Душина. – Ленинград: Энергия, 1980. – 392 с.

8. Теоретические основы электротехники / под ред. П. А. Ионкина. Т. 1. – Москва: Высш. шк. 1976. – 544 с.