МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. В. Прейс
Е. А. Волкова

МАТЕМАТИКА: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией
специальности 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств
в качестве электронного учебного издания
для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты

Волков В. М. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Чередниченко А. В. – кандидат технических наук, доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Прейс Елена Валерьевна
Волкова Екатерина Анатольевна
Математика: линейная алгебра [Электронный ресурс]: методические материалы для студентов технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)» всех форм обучения / сост. Е. В. Прейс, Е. А. Волкова; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)».

Назначение издания – помощь студентам в получении знаний по разделу «Линейная алгебра» и организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математика: линейная алгебра ».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Методические указания к самостоятельной работе студентов (I курс, 1 семестр)

1. Линейная алгебра

1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства.

1.2.Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса.

1.4. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица.

1.5. Матричный метод решения СЛАУ.

1.1. Определители второго и третьего порядка, их свойства

Матрицей называется упорядоченная таблица чисел (**2, гл. 5).** Матрицы обозначаются большими буквами: A, B, C ... Пусть задана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

a_{ij} − называется элементом матрицы A , i − номер строки,
j − номер столбца,

$i = 1,2, \dots m,\ \ j = 1,2, \dots n.$ $(m \times n)$ − называется размерностью матрицы.

Определителем второго порядка матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ размерности (2×2) является число, равное $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (**1, гл. 1**).

Пример. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-8) \cdot 1 = 12 + 8 = 20.$

Пусть задана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ размерности (3×3).

Минором элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы $\boldsymbol{A}$ называется определитель второго порядка, полученный из элементов матрицы при вычеркивании i-й строки и j-го столбца. **Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A_{ij}}$ к элементу $\boldsymbol{a_{ij}}$** называется число, равное $(-1)^{i+j}$, умноженное на соответствующий минор.

Пример. Найти алгебраические дополнения для элементов матрицы a_{11}, a_{23}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определителем третьего порядка матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ размерности (3×3) является число, равное сумме произведений элементов любой его строки, или столбца, на их **алгебраические дополнения (I, гл. 1).**

То есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- определитель третьего порядка, вычисленный разложением по первой строке. Тоже число получится при вычислении определителя разложением по второму (или любому) столбцу. Приведем разложение определителя по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

Разложим по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot A_{11} + 1\cdot A_{12} + 3\cdot A_{13} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(-6-10) - (24-15) + 3\big(8-(-3)\big) =$$
$$(-2)(-16) - 9 + 3\cdot 11 = 32 - 9 + 33 = 56.$$

Разложим по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 3A_{13} + 5A_{23} + 6A_{33} = 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 3\big(8-3(-1)\big) - 5(-4-3) + 6(2-4) = 33 + 35 - 12 = 56$$

Существуют и другие способы вычисления определителей третьего порядка: **метод треугольника, приведение определителя к треугольному виду (3, гл. 1, п. 1.1). Свойства определителей (1, гл. 1; 3, гл. 1, п. 1.1).**

Определителем *n*-го порядка матрицы *A* размерности $(n \times n)$ называется число, равное сумме произведений элементов любой его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A представляют собой определители $(n-1)$ порядка, взятые с определенным знаком. Разложим определитель четвёртого порядка по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{14}(-1)^5 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Если некоторые элементы строки или столбца, при вычислении определителя, являются нулями, то вычисления значительно упрощаются. Для этого воспользуемся свойством определителя: **определитель не изменится, если ко всем элементам строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на любое число.**

Пример: Вычислить определитель четвертого порядка, предварительно упростив его

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & \mathbf{1} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} .$$

Разложим определитель по третьему столбцу, т.к. элемент $a_{43} = 0$, а элемент $a_{33} = 1$. Получим нули над элементом $a_{33} = 1$. Для этого к первой строке прибавим третью, ко второй строке прибавим третью, умноженную на (-3).

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & \mathbf{1} & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} I + III \\ II + III \cdot (-3) \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 0 & 6 \\ -7 & -13 & 0 & -11 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} +$$

$0 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43}=$

$$= (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 9 & 6 \\ -7 & -13 & -11 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4A_{11} + 9A_{12} + 6A_{13} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} -13 & -11 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} -7 & -11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -7 & -13 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-39 + 22) -$$

$9(-21 + 11) + +6(-14 + 13) = 16.$

Алгебраическое дополнение – A_{33} это определитель третьего порядка, полученный вычеркиванием третьей строки и третьего столбца. Вычислим его разложением по первой строке.

Вычислить определитель четвертого порядка можно и приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}.$$

Для этого, используя свойства определителей, нужно получить нули ниже главной диагонали**(3, гл.1,п.1.1).**

1.2. Формулы Крамера для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Рассмотрим **систему трёх линейных уравнений** с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Решением системы называется тройка чисел (x, y, z), которая после подстановки их вместо переменных в уравнения системы, обращает эти уравнения в тождества. Система уравнений называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной.**

Решение системы можно найти **по формулам Крамера.** Обозначим определители системы следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда решение системы $\boldsymbol{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\boldsymbol{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $\boldsymbol{z} = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ **(1, гл. 1, п. 5).** Это единственное решение системы существует, если определитель $\Delta \neq 0$. Если определитель $\Delta = 0$, то необходимо дальнейшее исследование системы.

Пример: Решить систему методом Крамера: $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ -x+2y+3z=12 \end{cases}$.

Найдем определители:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=15;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 12 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}=15;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 12 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}=30;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 12 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=45.$$

Так как $\Delta\neq 0$, решение существует и единственно. Найдем это решение: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{15}{15}=1$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{30}{15}=2$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{45}{15}=3$. Проверим правильность решения системы уравнений. Подставим значения $x=1, y=2, z=3$ в уравнения системы $\begin{cases} 1-2+3=2 \\ 2\cdot 1+2-3=1 \\ -1+2\cdot 2+3\cdot 3=12 \end{cases}$. Все равенства верны, следовательно, система решена верно. Ответ: $(1;2;3)$.

Практическое занятие

1. Найти определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Найти определители третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y-3z=-8 \\ x-4y+z=8 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти определители: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 7x + y = 15 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

1.3. Исследование систем линейных уравнений, метод Гаусса

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Система линейных уравнений называется **однородной,** если все свободные коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_m$ равны нулю. **Система** линейных уравнений называется **неоднородной,** если хотя бы один из коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_m$ не равен нулю. **Система** уравнений называется **совместной,** если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной.** Совместная система, имеющая одно решение, называется **определенной.** Совместная система, имеющая множество решений, называется **неопределенной.**

Для решения и исследования системы линейных уравнений составим матрицу коэффициентов: $\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n} \ | b_1 \\ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n} | \ b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ a_{m3} \ \dots a_{mn} | b_m \end{pmatrix}$, где a_{ij} —коэффициенты при неизвестных, b_i – свободные коэффициенты, и будем применять следующие элементарные **преобразования над уравнениями системы.** Решение системы не изменится, если:

1) поменять местами две любые строки матрицы;

2) умножить каждый элемент строки на один и тот же множитель, не равный нулю;

3) к элементам одной строки матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на один и тот же множитель.

Для решения системы будем элементарными преобразованиями приводить матрицу коэффициентов при неизвестных к треугольному виду, т. е. получать нули ниже коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ последовательно. В этих преобразованиях будут участвовать и свободные коэффициенты. В зависимости от вида полученной матрицы будем делать выводы о решении системы.

Пример. (Система имеет единственное решение). Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 14x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Выпишем коэффициенты при неизвестных и свободные коэффициенты в виде матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -14 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -14 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \cdot \\ II + I(-4) \\ III + I(-3) \\ IV + I(-2) \end{bmatrix} \to$$

и поменяем первую и четвертую строки местами, чтобы получить в первом уравнении коэффициент при x_1 равный 1. Исключим переменную x_1 из второго, третьего и четвёртого уравнения. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–4), к третьей – первую, умноженную на (–3), к четвертой – первую, умноженную на (–2). Получим матрицу, в которой переменная x_1 содержится только в первом уравнении. Больше это уравнение не участвует в вычислениях. Оставим переменную x_2 только во втором уравнении, исключив её из третьего и четвёртого. Для этого коэффициент при x_2 во втором уравнении, получим равным единице. Поменяем местами вторую и третью строки

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{5} & -26 & -16 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -7 & -5 \\ 0 & 5 & -26 & -16 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ III + II(-5) \\ IV + II(-1) \end{bmatrix}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Коэффициент при x_2 во второй строке равен 1. Исключим переменную x_2 из третьего и четвёртого уравнений. Для этого к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (-5), к четвертой строке прибавим вторую, умноженную на (-1).

Четвертая строка состоит из нулей, ее можно отбросить. Матрица коэффициентов при неизвестных приведена к **треугольному виду.** Следовательно, система уравнений имеет единственное решение. Найдем это решение. Запишем равносильную систему уравнений по полученной матрице коэффициентов.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ \qquad x_2 - 7x_3 = -5. \\ \qquad\qquad 9x_3 = 9 \end{cases}$$

Из третьего уравнения найдем $x_3 = 1$. Подставив во второе ние $x_3 = 1$, найдем $x_2 = -5 + 7x_3 = -5 + 7 \cdot 1 = 2$. Подставив $x_3 = 1$ и $x_2 = 2$ в первое уравнение, найдем $x_1 = 4 + x_2 - 3x_3 = 3$. Следовательно, $x_1 = 3, x_2 = 2 , x_3 = 1$ – решение системы уравнений.

Сделаем проверку. Подставим полученные значения в исходные уравнения системы.

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 2 - 1 = 3 \\ 4 \cdot 3 + 2 - 14 \cdot 1 = 0 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 7 \\ 3 - 2 + 3 \cdot 1 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} 3 = 3 \\ 0 = 0 \\ 7 = 7 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Получили тождества. Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2 , x_3 = 1$.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса **(случай множества решений**). $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$

Составим матрицу коэффициентов и получим вместо коэффициента 4 при переменной x_1 в первом уравнении единицу. Для этого к первому уравнению прибавим третье, умноженное на (-1). Исключим переменную x_1 из второго и третьего уравнений.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 & | & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I + III(-1) \\ . \\ . \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} . \\ II + I(-2) \\ III + I(-3) \end{bmatrix} \to$$

Далее, получим коэффициент, равный единице, при переменной x_2 во втором уравнении и исключим эту переменную из третьего уравнения.

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & | & 2\\ 0 & 3 & -2 & 7 & | & -2\\ 0 & 2 & -3 & 10 & | & -5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\\ II+III(-1)\\ \cdot\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & | & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3 & | & 3\\ 0 & 2 & -3 & 10 & | & -5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ III+II(-2)\end{bmatrix}\to$$

Получим коэффициент при x_3 в третьем уравнении равный 1. Для этого умножим третье уравнение на $\left(-\frac{1}{5}\right)$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & | & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3 & | & 3\\ 0 & 0 & -5 & 16 & | & -11\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & | & 2\\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -3 & | & 3\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{16}{5} & | & \frac{11}{5}\end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов при неизвестных приведена к виду трапеции (т.е. в последнем уравнении системы осталась не одна переменная). Это означает, что система имеет множество решений. Количество оставшихся уравнений соответствует количеству зависимых (базисных) переменных. В данном случае их три. Всего четыре неизвестных, следовательно, одна переменная свободная. Пусть это будет x_4 (может быть любая). Выразим зависимые переменные x_1 , x_2 , x_3 через свободную переменную x_4. Вернемся к системе уравнений по преобразованной матрице коэффициентов

$$\begin{cases} x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3-2x_4=2\\ x_2+x_3-3x_4=3\\ x_3-\dfrac{16}{5}x_4=\dfrac{11}{5}\end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим x_3 через x_4

$x_3=\frac{11}{5}+\frac{16}{5}x_4.$

Подставим x_3 во второе уравнение системы и выразим x_2 через x_4.

$x_2=3-x_3+3x_4=3-\left(\frac{11}{5}+\frac{16}{5}x_4\right)+3x_4=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_4.$

Выразим x_1 из первого уравнения через x_4

$x_1=2+2x_4.$

Итак, придавая x_4 любые значения, будем получать множество значений $x_1=2+2x_4,$

$x_2=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_4$, $x_3=\frac{11}{5}+\frac{16}{5}x_4.$

Сделаем проверку. Для этого в исходную систему подставим выражения для x_1, x_2, x_3. Подставим в последнее уравнение, т.к.оно участвовало во всех преобразованиях.

$$3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1$$

$$3(2+2x_4)+2\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_4\right)-3\left(\frac{11}{5}+\frac{16}{5}x_4\right)+4(x_4)=1$$

$$6+6x_4+\frac{8}{5}-\frac{2}{5}x_4-\frac{33}{5}-\frac{48}{5}x_4+4x_4=1$$
$$\left(6+\frac{8}{5}-\frac{33}{5}\right)+\left(6-\frac{2}{5}-\frac{48}{5}+4\right)x_4=1$$
$1+0\cdot x_4=1.$

Получилось тождество. Следовательно, система уравнений решена верно.

Ответ: $\begin{cases} x_4\in R \\ x_1=2+2x_4 \\ x_2=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_4 \\ x_3=\frac{11}{5}+\frac{16}{5}x_4 \end{cases}$.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса (случай, когда **система не имеет решения).**

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3 \\ 4x_1-3x_2+x_3=0 \\ 5x_1-x_2\qquad=4 \end{cases}.$$

Составим матрицу коэффициентов и будем приводить к треугольному виду матрицу коэффициентов при неизвестных. После исключения переменной x_1 из второго и третьего уравнений, коэффициенты в этих уравнениях в правой части стали одинаковыми.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)\begin{bmatrix} \cdot \\ II+I(-4) \\ III+I(-5) \end{bmatrix}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & -12 \\ 0 & -11 & 5 & -11 \end{array}\right)\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ III+II(-1) \end{bmatrix}\to$$

Из третьей строки вычтем вторую и получим
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Перейдем к системе уравнений: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=3 \\ 0\cdot x_1-11x_2+5x_3=-12 \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=1 \end{cases}.$

Левая часть третьего уравнения обращается в нуль при любых значениях x_1, x_2, x_3, а правая часть отлична от нуля. Следовательно, равенство не может быть выполнено ни при каких значениях переменных и система не имеет решения.

Рассмотрим **однородную систему уравнений.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, т.е. $x_1 = 0, x_2 = 0 \ldots x_n = 0$ всегда являются решением этой системы. Если по методу Гаусса матрица коэффициентов при неизвестных свелась к треугольному виду, то система имеет только одно решение $x_1 = 0, x_2 = 0 \ldots x_n = 0$. Если матрица коэффициентов при неизвестных свелась к виду трапеции, то система имеет множество решений.

Пример: Решить **однородную систему линейных уравнений.**

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса. Составим матрицу коэффициентов. Поменяем местами первую и вторую строки и поочерёдно исключим переменные.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 5 & | & 0 \\ 4 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 0 \\ 3 & 4 & -1 & | & 0 \\ 4 & 1 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ II + I(-3) \\ III + I(-4) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 13 & -16 & 0 \\ 0 & 13 & -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ III + II(-1) \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 13 & -16 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось два уравнения, а переменных три, следовательно, система имеет множество решений. Найдем их.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 13x_2 - 16x_3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 3x_2 - 5x_3 \\ x_2 = \dfrac{16}{13}x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 3\left(\dfrac{16}{13}x_3\right) - 5x_3 \\ x_2 = \dfrac{16}{13}x_3 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = -\dfrac{17}{13}x_3 \\ x_2 = \dfrac{16}{13}x_3 \end{cases}$$

Сделаем проверку. Подставим x_1, x_2 в третье уравнение исходной системы. Получаем

$$4\left(-\frac{17}{13}x_3\right) + \left(\frac{16}{13}x_3\right) + 4x_3 = 0; -\frac{68}{13}x_3 + \frac{16}{13}x_3 + 4x_3 = 0; \frac{-68 + 16 + 52}{13}x_3 = 0;$$

$0\cdot x_3=0$, следовательно, x_3 может принимать любые значения и система решена верно.

Ответ: $\begin{cases} x_3\in R \\ x_1=-\frac{17}{13}x_3 \\ x_2=\frac{16}{13}x_3 \end{cases}$.

Практическое занятие

1. Исследовать и решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x-y+z=8 \\ x+2y-3z=-3 \\ 4x+y+2z=9 \end{cases}$,

б) $\begin{cases} 2x-3y-z=3 \\ x+2y+3z=-2 \\ 3x-y+2z=1 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x-4y+5z=1 \\ 3x+y+z=-3 \\ 5x-7y+11z=-3 \end{cases}$.

г) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+6x_3=-6 \end{cases}$.

1.4. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю **(1, гл. 4, п. 2):**

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойство матрицы: $A+O=O+A=A$.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, остальные нули:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойство матрицы: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Суммой двух матриц $\boldsymbol{A + B}$ называется матрица, элементами которой является сумма соответствующих элементов матриц A и B, причем $A + B = B + A$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix};$$

складывать можно матрицы только одинаковой размерности.

Произведением числа $\boldsymbol{m}$ на матрицу $\boldsymbol{A}$ называется матрица, в которой каждый элемент матрицы A умножается на число m, причем $m \cdot A = A \cdot m$.

$$m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} \\ ma_{21} & ma_{22} \\ ma_{31} & ma_{32} \end{pmatrix}.$$

Пример: Найти $3A - 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$3A - 2B = 3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -10 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ -4 & 6 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется матрица, элементы которой равны сумме произведений соответственных элементов $i-$ой строки матрицы A и $j-$ого столбца матрицы B, причем $A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Операцию умножения матриц можно провести только тогда, когда количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B, т.е. если матрица A имеет размерность $(m \times n)$, то матрица B должна иметь размерность$(n \times k)$.

Пример: Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Матрица A имеет размерность $(2\times\mathbf{2})$, матрица B $(\mathbf{2}\times 3)$. Операцию выполнить можно.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ -2 & -1 & 6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\cdot 0+(-3)(-2) & 2\cdot 4+(-3)(-1) & 2\cdot 3+(-3)\cdot 6\\ 1\cdot 0+5\cdot(-2) & 1\cdot 4+5\cdot(-1) & 1\cdot 3+5\cdot 6\end{pmatrix}$$
$$A\cdot B=\begin{pmatrix}6 & 11 & -12\\ -10 & -1 & 33\end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ называется обратной матрицей к матрице A, если выполняются условия $\boldsymbol{A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E}$.

Обратная матрица существует только для квадратных матриц, определители которых не равны нулю. Пусть задана матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\ \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Тогда обратная матрица равна

$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}.

Пример: Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Найдем определитель $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=$

$$=2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=2(-2-(-1)\cdot 3)-3(1-3\cdot 3)-1(-1-(-2)\cdot 3)=$$
$$=2\cdot 1-3(-8)-1\cdot 5=21.$$

Найдем алгебраические дополнения для всех элементов матрицы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=11$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=7,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-7$$

Запишем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 8 & 5 & -7\\ 5 & 11 & -7\end{pmatrix}$.

Сделаем проверку.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 8 & 5 & -7\\ 5 & 11 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 1+7\cdot 3 & 1\cdot 3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 3+7 \\ 8\cdot 2+5\cdot 1+(-7)\cdot 3 & 8\cdot 3+5\cdot(-2)+(-7)\cdot(-1) & 8\cdot(-1)+5\cdot 3+(-7) \\ 5\cdot 2+11\cdot 1+(-7)\cdot 3 & 5\cdot 3+11\cdot(-2)+(-7)\cdot(-1) & 5\cdot(-1)+11\cdot 3+(-7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица найдена верно. $A^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 8 & 5 & -7 \\ 5 & 11 & -7 \end{pmatrix}$.

1.5. Матричный метод решения СЛАУ.

Решим систему линейных уравнений **матричным способом (1, гл. 4, п. 2).**

Пусть задана система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Запишем систему линейных уравнений в виде равенства матриц. Матрица A составлена из коэффициентов при неизвестных. Матрица X − матрица неизвестных. Матрица B − матрица свободных коэффициентов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде $\boldsymbol{A\cdot X = B}$. Выразим матрицу X. Домножим слева обе части уравнения на A^{-1}, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$. По определению обратной матрицы $A^{-1}\cdot A = E$. Тогда $E\cdot X = \boldsymbol{X = A^{-1}\cdot B}$.

Пример. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 2x+3y-z=9 \\ x-2y+3z=-6. \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$

Составим матрицы системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы $X = A^{-1}\cdot B$, где A^{-1} найдено в предыдущем разделе.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1&-2&7\\8&5&-7\\5&11&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\-6\\0\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1\cdot 9+(-2)(-6)+7\cdot 0\\8\cdot 9+5(-6)+(-7)\cdot 0\\5\cdot 9+11\cdot(-6)+(-7)\cdot 0\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}21\\42\\-21\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x=1, y=2, z=-1$. Сделаем проверку. Подставим значения переменных в уравнения системы:

$$\begin{cases}2\cdot 1+3\cdot 2-(-1)=9\\1-2\cdot 2+3(-1)=-6\\3\cdot 1-2+(-1)=0\end{cases};\begin{cases}9=9\\-6=-6\\0=0\end{cases}$$

Систем решена верно.

Ответ: $x=1, y=2, z=-1$.

Пример: Решить матричное уравнение.

$$X\cdot\begin{pmatrix}0&3&-4\\-2&1&1\\4&5&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&-1&6\\2&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&9&-7\\8&11&0\end{pmatrix}.$$

Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix}0&3&-4\\-2&1&1\\4&5&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7&-1&6\\2&0&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7&9&-7\\8&11&0\end{pmatrix}.$$

Запишем матричное уравнение в обозначениях и выразим неизвестную матрицу X:

$X\cdot A+B=C$, $X\cdot A=C-B$, $X\cdot A\cdot A^{-1}=(C-B)\cdot A^{-1}$, $X\cdot E=(C-B)\cdot A^{-1}$, $X=(C-B)\cdot A^{-1}$, где E – единичная матрица. Матрица $(C-B)$ имеет размерность (2×3), матрица A^{-1} имеет размерность (3×3), следовательно, у матрицы X будет размерность (2×3).

Найдем матрицу $(C-B)$.

$$C-B=\begin{pmatrix}7&9&-7\\8&11&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&-1&6\\2&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&10&-13\\6&11&-5\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу к матрице A.

$$A=\begin{pmatrix}0&3&-4\\-2&1&1\\4&5&-3\end{pmatrix},|A|=\begin{vmatrix}0&3&-4\\-2&1&1\\4&5&-3\end{vmatrix}=(-3)\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\4&-3\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-2&1\\4&5\end{vmatrix}$$

$$=-6+56=50$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\5&-3\end{vmatrix}=-8;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-2&1\\4&-3\end{vmatrix}=-2,\ A_{13}=\begin{vmatrix}-2&1\\4&5\end{vmatrix}=-14$$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -11$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 16$, $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 12$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7, A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8, A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$

$$A^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & -11 & 7 \\ -2 & 16 & 8 \\ -14 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку $A^{-1} \cdot A = E$.

$$\frac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & -11 & 7 \\ -2 & 16 & 8 \\ -14 & 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисления выполнены верно.

Найдем матрицу X.

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & -13 \\ 6 & 11 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & -11 & 7 \\ -2 & 16 & 8 \\ -14 & 12 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -112 - 20 + 182 & -154 + 160 - 156 & 98 + 80 - 78 \\ -48 - 22 + 70 & -66 + 176 - 60 & 42 + 88 - 30 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 50 & -150 & 100 \\ 0 & 50 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Практическое занятие

1. Выполнить действия над матрицами. Найти $(2A + 5B)$, $(A - B)$, если заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить систему матричным способом: $\begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ 2x + y + 3z = 9. \\ -x + z = 2 \end{cases}$

4. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 11 & 4 & 11 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 1\\ 3 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 11 & 3\\ 20 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Выполнить действия над матрицами. Найти $(A-3B)\cdot C$, $A\cdot(B+C)$, если заданы матрицы: $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-7 & 11\\ 0 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & 8\end{pmatrix}.$

2. Найти произведение матриц: $\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2 & -3\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}.$

3. Решить систему матричным способом: $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\ 2x_1-x_2+2x_3=-4.\\ 4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

<u>Задача №1.</u> Вычислить определитель

1.1 $\begin{vmatrix}2 & 3 & -6 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ -1 & 2 & 5 & 7\end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix}1 & 4 & -3 & 8\\ 5 & -6 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 1 & 2\\ 3 & -6 & 1 & 7\end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix}4 & -3 & 1 & 6\\ 0 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -2\\ 7 & 9 & 0 & 4\end{vmatrix}$ 1.4 $\begin{vmatrix}2 & -1 & 6 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & -5 & 6 & 9\end{vmatrix}$

1.5 $\begin{vmatrix}5 & -3 & 2 & 2\\ 0 & 4 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$ 1.6 $\begin{vmatrix}2 & 0 & 4 & 5\\ 6 & 1 & 0 & 3\\ -3 & 5 & 0 & 7\\ 9 & -3 & 1 & 4\end{vmatrix}$

1.7 $\begin{vmatrix}3 & 4 & -1 & 2\\ 5 & -6 & 0 & 4\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 6 & -3\end{vmatrix}$ 1.8 $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & -6 & 8 & 1\\ 12 & 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$

1.9 $\begin{vmatrix} 6 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

1.10 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

1.11 $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

1.12 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.13 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

1.14 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

1.15 $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

1.16 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

1.17 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

1.18 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

1.19 $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

1.20 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

1.21 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 1.22 $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

1.23 $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 1.24 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

1.25 $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 1.26 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

1.27 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ 1.28 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Задача №2. Найти решение системы линейных уравнений а) методом Крамера, б) матричным способом.

2.1 $\begin{cases} 4x+2y+2z=8, \\ 3x+2z=6, \\ x+y-z=1. \end{cases}$ 2.2 $\begin{cases} 5x+3y+2z=12, \\ 3x+2y+2z=7, \\ 2x+y+2z=7. \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 2x+3y-z=7, \\ 3x+5y-2z=11, \\ x+2y+z=6. \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 2x+3y-z=6, \\ x+y-z=2. \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} 4x+5y+z=8, \\ 2x+3y+z=4, \\ 2x+2y+z=3. \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 4x+3y-z=0, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 5x+6y+z=2, \\ 3x+4y+z=2, \\ 2x+2y+z=1. \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} 7x+4y+3z=15, \\ 5x+3y+2z=11, \\ 2x+y+2z=3. \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} 3x+5y+2z=3, \\ 4x+7y+3z=4, \\ x+2y+2z=2. \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 5x+4y-z=-4, \\ 6x+5y-z=-5, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

2.11 $\begin{cases} 4x+5y+z=7, \\ 5x+7y+2z=8, \\ x+2y+2z=-1. \end{cases}$

2.12 $\begin{cases} 7x+6y+z=-3, \\ 8x+7y+z=-4, \\ x+y-2z=-5. \end{cases}$

2.13 $\begin{cases} 2x+y+z=2, \\ 5x+3y+2z=7, \\ 3x+3y+z=7. \end{cases}$

2.14 $\begin{cases} 7x-4y+3z=5, \\ 6x-3y+3z=6, \\ x-y+2z=3. \end{cases}$

2.15 $\begin{cases} 6x-5y+3z=10, \\ 5x-4y+3z=7, \\ 3x-3y+2z=5. \end{cases}$

2.16 $\begin{cases} 4x+3y+4z=3, \\ 5x+4y+4z=6, \\ 2x+2y+3z=0. \end{cases}$

2.17 $\begin{cases} 3x+4y-z=7, \\ 5x+7y-z=11, \\ x+2y+3z=12. \end{cases}$

2.18 $\begin{cases} 6x-5y+3z=0, \\ 7x-6y+3z=-1, \\ x-y-2z=-3. \end{cases}$

2.19 $\begin{cases} 2x+3y-3z=9, \\ x+y-2z=9, \\ x+3y-z=8. \end{cases}$

2.20 $\begin{cases} 2x+2y+z=3, \\ 4x+5y+3z=5, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$

2.21 $\begin{cases} 3x+y+2z=6, \\ x+2y+3z=-1, \\ 2x+3y+5z=-1. \end{cases}$

2.22 $\begin{cases} 2x+y+z=2, \\ 3x-y-2z=7, \\ 5x-2y-3z=13. \end{cases}$

2.23 $\begin{cases} 3x+2y+2z=17, \\ x+4y+5z=20, \\ x+2y+3z=12. \end{cases}$

2.24 $\begin{cases} 2x+y+z=4, \\ x+3y+2z=-4, \\ x+4y+3z=-6. \end{cases}$

2.25 $\begin{cases} 3x+2y+2z=1, \\ x+5y+6z=18, \\ x+3y+4z=-10. \end{cases}$

2.26 $\begin{cases} 3x+3y+2z=4, \\ 2x+7y+5z=-5, \\ x+4y+3z=-3. \end{cases}$

2.27 $\begin{cases} 3x+2y+4z=17, \\ 2x+3y+5z=15, \\ 3x+4y+7z=22. \end{cases}$

2.28 $\begin{cases} 3x+2y+4z=11, \\ x+4y+5z=8, \\ 2x+5y+7z=13. \end{cases}$

Задача №3. Выполнить действия над матрицами.

3.1 $2A-3C\times B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 15 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & 6 & 11 & -1 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

3.2 $5A+4C\times B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ 6 & 8 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.3 $2A-4B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4 $3A+7B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & 4\\ 7 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 5\\ 7 & 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

3.5 $7A-3B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 6 & 8\\ 9 & -7 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 2 & 4\\ -3 & 8\end{pmatrix}$$

3.6 $2A+5B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 5\\ 6 & 11 & 2\\ -3 & 4 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 6 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -8 & 3\\ 1 & 6 & 4\\ 5 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

3.7 $3A-4B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & 5\\ 7 & -6 & 9 & 4\\ 3 & 2 & -7 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 8\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3.8 $7A+2B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ 7 & -1 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7 & -1 & 6\\ 2 & -3 & 8\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

3.9 $5A-3B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 2 & -8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 7 & 9 & 12\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6 & 2\\ 8 & -7 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

3.10 $2A+4B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 6\\ 2 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -6\\ 9 & 1 & 8\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & -7\\ 6 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

3.11 $7A-B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 8 & -5 & 9\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -8 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 7 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

3.12 $3A+5B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 8\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 4 & 7 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & -8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & -8 & 1 & 6\\ 4 & 2 & 5 & 11\end{pmatrix}$$

3.13 $A+3B\times 2C$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

3.14 $2A-B\times 3C$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 8 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & 4\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & 5\\ 4 & 8 & -3 & 7\\ 6 & -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

3.15 $9A+B\times 2C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3.16 $A+B\times 5C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 8 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.17 $-2A+4B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3.18 $-A+3B\times 4C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.19 $5A+B\times(-2)C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & -8 & 11 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

3.20 $2A+3B\times 4C$, где

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\\ 7 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 5 & 6 & -8\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

3.21 $2A-3B\times 5C$, где

$$A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 6 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 1 & 5\\ 6 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

3.22 $2A-4C\times B$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 3\\ 5 & 6 & 4 & 11\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

3.23 $A-3B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ 5 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 6\\ 4 & 9 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

3.24 $2A+B\times(-3)C$, где

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 8 & 0\\ 6 & -4 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -8 & 1\\ 6 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -5\\ 2 & -3 & 1 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 11\end{pmatrix}$$

3.25 $A+3B\times 4C$, где

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 0\\ 4 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 6 & -3 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 6 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}$$

3.26 $3A-4B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 7 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

3.27 $2A+B\times 3C$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 6\\ 4 & 2 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ 1 & 2\\ 6 & 8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4 & 8 & -3 & 1\\ 0 & 6 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

3.28 $-A+2B\times C$, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 8 & -1 & 9\\ 1 & 2 & 4\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -7 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 9\\ 6 & 5 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 3\\ -9 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

Задача №4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

4.1 а) $\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3-x_4=1,\\ 7x_1+3x_2-5x_3+5x_4=10,\\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3.\end{cases}$ б) $\begin{cases}-x_1+2x_3=1,\\ -2x_1+2x_2+x_3=4,\\ x_1-3x_2+2x_3=-6.\end{cases}$

4.2 а) $\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3=7,\\ x_1-x_2+x_3=-2,\\ 2x_1+3x_2-3x_3=11,\\ 4x_1+x_2-x_3=7.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=27,\\ -2x_1+x_2+2x_3=9,\\ x_1-2x_2+2x_3=18.\end{cases}$

4.3 а) $\begin{cases}x_1-x_3+x_4=3,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2,\\ 5x_1-3x_4=-6,\\ x_1+x_2+x_3+x_4=2.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1+5x_2+6x_3=2,\\ 10x_1+x_2-3x_3=1,\\ x_1+2x_2=1.\end{cases}$

4.4 а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9, \\ 3x_1+4x_2+5x_3=12, \\ x_1-x_2-x_3=-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1+2x_2=6, \\ -2x_1+x_2+2x_3=7, \\ x_1+2x_2-3x_3=2. \end{cases}$

4.5 а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1, \\ x_1+3x_2+2x_3=5, \\ 5x_1+8x_2+3x_3=11, \\ x_1+x_2=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=7, \\ 2x_2+x_3=-1, \\ 7x_1+4x_2+3x_3=1. \end{cases}$

4.6 а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-6, \\ 3x_2+x_3=12, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=3. \end{cases}$

4.7 а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7, \\ x_1+4x_2+2x_3=-1, \\ x_1-4x_2=-5. \end{cases}$

4.8 а) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=-3, \\ x_1+3x_2-5x_3=0, \\ -x_1+4x_2+x_3=3, \\ 3x_1+x_2-13x_3=-6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7, \\ 2x_1+x_2-x_3=-5. \end{cases}$

4.9 а) $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-x_4=1, \\ 7x_1+3x_2-5x_3+5x_4=10, \\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=3, \\ -2x_1+x_2+3x_3=3, \\ x_1+x_2+5x_3=8. \end{cases}$

4.10 а) $\begin{cases} x_1-x_3+x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ 5x_1-3x_4=-6, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=7, \\ 2x_2+x_3=-1, \\ 7x_1+4x_2+3x_3=1. \end{cases}$

4.11 а) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4=1, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2, \\ 5x_1-5x_2+8x_3-7x_4=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=-6, \\ 3x_2+x_3=12, \\ 4x_1+2x_2+5x_3=3. \end{cases}$

4.12 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

4.13 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

4.14 а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

4.15 а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 23, \\ 9x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 34. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

4.16 а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -1, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 9, \\ 8x_1 - 6x_2 + x_3 + 8x_4 = 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$

4.17 а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 11, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 24. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

4.18 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 11, \\ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 29. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 27, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18. \end{cases}$

4.19 а) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1, \\ 11x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

4.20 а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

4.21 а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 27, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 18. \end{cases}$

4.22 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -3, \\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 12x_4 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$

4.23 а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$

4.24 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -3, \\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 12x_4 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 18, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

4.25 а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2, \\ 10x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

4.26 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 13, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4.27 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -3, \\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 12x_4 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$

4.28 а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -3, \\ 3x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 12x_4 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -18, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -10. \end{cases}$

Задача №5. Решить однородную систему линейных уравнений.

5.1 $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$ 5.2 $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.3 $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 5.4 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

5.5 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ 5.6 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

5.7 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

5.8 $\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.9 $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.10 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

5.11 $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

5.12 $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.13 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

5.14 $\begin{cases} 12x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ 24x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.15 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

5.16 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.17 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

5.18 $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.19 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

5.20 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

5.21 $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

5.22 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

5.23 $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 5.24 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5.25 $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 11x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 5.26 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

5.27 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 5.28 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Задача №6. Решить матричное уравнение.

6.1 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$

6.2 $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix}$

6.3 $\begin{pmatrix} -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 32 \end{pmatrix}$

6.4 $\begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -19 & 13 \end{pmatrix}$

6.5 $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 28 & 55 \end{pmatrix}$

6.6 $$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

6.7 $$\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot X-4\cdot\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\ 15\\ -13\end{pmatrix}$$

6.8 $$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ -4 & 5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9 & -25\\ 2 & -5 & -34\end{pmatrix}$$

6.9 $$\begin{pmatrix}7\\ -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}-X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -14 & 9\\ -3 & -5 & -12\end{pmatrix}$$

6.10 $$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 9 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot X+6\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 7\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 1\\ 35 & 39\\ 73 & -6\end{pmatrix}$$

6.11 $$X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 1\\ -1 & 8 & 0\end{pmatrix}-8\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-25 & -38 & 16\\ -28 & 6 & -7\end{pmatrix}$$

6.12 $$\begin{pmatrix}0 & 9 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 9 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & 15\\ 44 & 4\\ 12 & 6\end{pmatrix}$$

6.13 $$\begin{pmatrix}6 & 5\\ 1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 8 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}23 & 12\\ 24 & 20\\ 15 & 5\end{pmatrix}$$

6.14 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix}$

6.15 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix}$

6.16 $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

6.17 $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

6.18 $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 17 & -33 \end{pmatrix}$

6.19 $8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 41 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$

6.20 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + 10 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -81 \\ -23 \end{pmatrix}$

6.21 $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 10 & 2 \\ 9 & -33 & 17 \end{pmatrix}$

6.22 $X\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\-3&2&1\\4&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41&-9&3\\13&-2&-25\end{pmatrix}$

6.23 $\begin{pmatrix}-4&1&3\\2&0&5\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot X-5\cdot\begin{pmatrix}0&4\\2&3\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33&-21\\21&-8\\18&-20\end{pmatrix}$

6.24 $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&3\\7&4&0\end{pmatrix}\cdot X+11\cdot\begin{pmatrix}-3&1&2\\4&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-43&14&40\\43&4&20\end{pmatrix}$

6.25 $\begin{pmatrix}-1&-2\\4&1\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&-2\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&2\\4&2&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-5&3\\20&-11\\2&-15\end{pmatrix}$

6.26 $\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&4\\5&0&3\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}2&0\\1&9\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&1\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&3\\-39&29\\-9&6\end{pmatrix}$

6.27 $\begin{pmatrix}2&3&-1\\4&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot X-\begin{pmatrix}3&8&4\\1&-1&2\\0&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-1&-11\\21&7&-10\\2&1&-7\end{pmatrix}$

6.28 $\begin{pmatrix}-4&1&2\\0&1&0\\2&3&5\end{pmatrix}+X\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&1&0\\4&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&8&-1\\-1&8&-4\\-6&3&13\end{pmatrix}$

Литература

1. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.
http://www.alleng.ru/d/math/math148.htm

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для студентов вузов. – Москва: Физматлит, 2008. – 312 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2109

3. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 1: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учеб. пособие для студентов техн. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 304 с.
http://www.alleng.ru/d/math/math792.htm