МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Составители
Е. А. Николаева
Е. В. Прейс
Е. В. Гутова

МАТЕМАТИКА: ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические материалы

Рекомендовано учебно-методической комиссией направления подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств в качестве электронного учебного издания для использования в образовательном процессе

Кемерово 2018

Рецензенты
Фадеев Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»
Казунина Г. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Николаева Евгения Александровна
Прейс Елена Валерьевна
Гутова Елена Владимировна
Математика: интегральное исчисление: методические материалы [Электронный ресурс] для обучающихся направлений бакалавриата и всех специальностей всех форм обучения / сост. Е. А. Николаева, Е. В. Прейс, Е. В. Гутова; КузГТУ. – Электрон. издан. – Кемерово, 2018.

Приведен материал, необходимый для успешного изучения дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математика (общий курс)», «Математический анализ».

Назначение издания – помочь студентам в получении знаний по разделу интегральное исчисление и в организация самостоятельной работы.

Методические материалы предназначены для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов всех форм обучения, направлений и специальностей по разделу «Математика: Интегральное исчисление».

Практические занятия разбиты по темам согласно рабочей программе, приведены задания для решения на практических занятиях и задания для самостоятельной работы студентов.

Методические указания к самостоятельной работе студентов
(I курс, 2 семестр).

Интегральное исчисление.

1. Неопределенный интеграл.
1.1. Непосредственное интегрирование.
1.2. Метод замены переменной.
1.3. Интегрирование по частям.
1.4. Интегрирование рациональных дробей.
1.5. Интегрирование тригонометрических функций.
1.6. Интегрирование иррациональных функций.
2. Определенный интеграл.
2.1. Формула Ньютона-Лейбница:
2.2. Метод замены переменной в определенном интеграле.
2.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
2.4. Интегрирование тригонометрических функций в определенном интеграле.
2.5. Интегрирование рациональных дробей в определенном интеграле.
3. Несобственные интегралы.
4. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.
4.1. Площади фигур.
4.2. Длина дуги.
5. Кратные интегралы.
5.1. Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
5.2. Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла.
5.3. Приложения двойных и тройных интегралов.
5.3.1. Вычисление площади фигуры.
5.3.2. Масса плоской пластинки.
5.3.3. Вычисление объёма тела.

Интегральное исчисление.

1. Неопределенный интеграл.

1.1. Непосредственное интегрирование.

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $dF(x) = f(x)dx$, или по известной ее производной $F'(x) = f(x)$, называется операцией интегрирования. Это действие обратное дифференцированию. Искомая функция $F(x)$ называется первообразной функцией от функции $f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга на постоянную величину. Если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то и $F(x) + C$ ($C -$ произвольная постоянная) есть также первообразная от $f(x)$, так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Множество всех первообразных $F(x) + C$ называется неопределенным интегралом и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tgx + C.$

8. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -ctgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

13. $\int shxdx = chx + C.$

14. $\int chxdx = shx + C.$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = tgx + C.$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$, т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.
4. $\int\big(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$, т. е. интеграл от суммы, равен сумме интегралов от всех слагаемых.

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{3x^2-4x+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Воспользуемся свойствами неопределенного интеграла и представим его в виде суммы интегралов.

$$\int\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x}}-\frac{4x}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = 3\int x^{\frac{3}{2}}dx - 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{6}}dx =$$
$$3\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} = 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} +$$
$$\frac{12}{5}x^{\frac{5}{6}} + C.$$

Использовано свойство 3, и табличный интеграл 1.

Практическое занятие.

1. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x^4+2x^2+5}{x^3}dx$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+5}{\sqrt[3]{x}}dx$
3. $\int\left(\frac{5}{x}-\frac{10}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{x^2+9}\right)dx$
4. $\int\left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx$
5. $\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt[8]{x^2}-5}{\sqrt{x}}dx$
6. $\int \sqrt{x}\left(x^2-1\right)dx$
7. $\int \frac{3+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$
8. $\int\left(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx$
9. $\int\left(7^x-\frac{8}{x}+4\cos x\right)dx$
10. $\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$
11. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

13. $\int \frac{dx}{x^2+16}$

14. $\int \frac{x-2}{x+3}dx$

15. $\int \frac{x^2dx}{x^2-9}$

16. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

Самостоятельная работа

1. Используя таблицу интегралов и свойства неопределенного интеграла, найти:

1. $\int (3x^2-2x+5)dx$
2. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}dx$
3. $\int \left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx$
5. $\int \frac{3-\sqrt[3]{x^5}+4\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}dx;$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$
7. $\int 3^x e^x dx$.

1.2. Метод замены переменной.

Метод замены переменной является достаточно эффективным методом вычисления интегралов. В результате применения этого метода исходный интеграл заменяется другим, более простым интегралом. Найдем интеграл $\int f(x)dx$ заменой переменной x на новую переменную t, связанную с x формулой $x=\varphi(t)$. Найдем из этой формулы $dx=\varphi'(t)dt$и подставляя в интеграл, получим

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int F(t)dt.$$

Если полученный интеграл будет проще, чем исходный, то замена переменной, примененная к интегралу, верна. При замене переменной можно брать как формулу $x=\varphi(t)$, так и формулу $t=\vartheta(x)$. После вычисления последнего интеграла переходят снова к переменной x , пользуясь соотношением $x=\varphi(t)$ или $t=\vartheta(x)$, и выражая решение исходного интеграла через x.Например:

$$\int \sin(2x-3)dx = \begin{vmatrix} 2x-3=t \\ (2x+3)'dx=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{dt}{2} \end{vmatrix} = \int \sin t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t dt =$$

$12(-\cos t)+C=-12\cos 2x-3+C.$

Пример. Найти интеграл:$\int \frac{4x+1}{7-3x^2}dx.$

Распишем интеграл на сумму двух интегралов:

$\int \frac{4x+1}{7-3x^2}dx = \int \frac{4x}{7-3x^2}dx + \int \frac{1}{7-3x^2}dx.$

К первому интегралу применим метод замены переменной. Второй интеграл сведем к табличному интегралу №11.

$$\int \frac{4x}{7-3x^2}dx = 4\int \frac{xdx}{7-3x^2} = \left| \begin{matrix} 7-3x^2 = t \\ -6xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{6}dt \end{matrix} \right| = 4\int \frac{-\frac{1}{6}dt}{t} = -\frac{4}{6}\int \frac{dt}{t} =$$

$-\frac{2}{3}\ln|t| + C = -\frac{2}{3}\ln|7-3x^2| + C.$

$$\int \frac{1}{7-3x^2}dx = \int \frac{1}{-3(x^2-\frac{7}{3})}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2-\frac{7}{3}}dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{3}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{3}}}{x+\sqrt{\frac{7}{3}}}\right| +$$

$C = -\frac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right| + C.$

Следовательно:$\int \frac{4x+1}{7-3x^2}dx = -\frac{2}{3}\ln|7-3x^2| - \frac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right| + C.$

Пример. Найти интеграл:$\int \frac{1-3x}{\sqrt{3x^2-5}}dx.$

Распишем интеграл на сумму двух интегралов:

$\int \frac{1-3x}{\sqrt{3x^2-5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-5}}dx - \int \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}dx.$

Первый интеграл сведем к табличному интегралу №12, ко второму интегралу применим метод замены переменной.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-\frac{5}{3}}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{3}{5}}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x + \sqrt{x^2-\frac{3}{5}}\right| + C.$$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-5}}dx \left| \begin{matrix} \sqrt{3x^2-5} = t \\ 3x^2-5 = t^2 \\ 6xdx = 2tdt \\ xdx = \frac{1}{3}tdt \end{matrix} \right| = 3\int \frac{\frac{1}{3}tdt}{t} = \int dt = t + C =$$

3x2−5+C.

Следовательно, $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3x^2-5}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x + \sqrt{x^2-\frac{3}{5}}\right| + \sqrt{3x^2-5} + C.$

Пример. Найти интеграл:$\int \frac{\sin 2x}{1+cos^2 2x}dx.$

Под интегралом имеется функция $\cos 2x$, которая стоит в знаменателе под знаком квадрата, и $\sin 2x$. Заметим, что $d(\cos 2x) = -2\sin 2xdx$, т. е. под знаком интеграла имеется функция и ее производная. Следовательно, вводим новую переменную $t = \cos 2x$.

$$\int \frac{\sin\,2x}{1+cos^2 2x}dx \left| \begin{matrix} \cos 2x = t \\ -2\sin 2xdx = dt \\ \sin 2xdx = \frac{-dt}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{-dt}{2}}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}arctg(t) + C = -\frac{1}{2}arctg(\cos 2x) + C.$$

Пример. Найти: $\int \frac{dx}{(7x-1)\cdot\sqrt{ln^3(7x-1)}} \left| \begin{matrix} \ln(7x-1) = t \\ \frac{7dx}{7x-1} = dt \\ \frac{dx}{7x-1} = \frac{dt}{7} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{7}}{\sqrt{t^3}} = \frac{1}{7}\int t^{-\frac{3}{2}}dt =$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{7\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{7\sqrt{\ln(7x-1)}} + C.$

Практическое занятие.

1. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \cos 2x\,dx$
2. $\int (9x+12)^{17}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{8x-1}$
4. $\int 4^{3-5x}\,dx$
5. $\int \sqrt{3x+4}dx$
6. $\int \sqrt[3]{(2+x)^2}\;dx$
7. $\int \sqrt[3]{(2-x)^5}\;dx$
8. $\int \frac{dx}{2x+9}$
9. $\int \sin(\frac{x}{3}-4)dx$
10. $\int \cos(5-3x)dx$
11. $\int e^{x+3}d\,x$
12. $\int 4^{3x}\,dx$
13. $\int 3^{2-9x}\,d\,x$
14. $\int \frac{dx}{2-11x}$
15. $\int \frac{2dx}{9x^2+7}$
16. $\int \frac{dx}{(2x-8)^5}$
17. $\int \frac{6dx}{\left(9-\frac{x}{3}\right)^7}$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+3}}$

2. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \left(4-3x^3\right)^7 \cdot x^2\,dx$;
2. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^6+7}}$;
3. $\int \frac{(2x+3)dx}{\left(x^2+3x-1\right)^4}$;
4. $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

5. $\int 4x\cdot\sqrt[3]{x^2+8}\,dx$;

6. $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$;

7. $\int e^{-x^3}\cdot x^2dx$;

8. $\int x\cdot(2x+1)^{35}dx$;

9. $\int x\cdot\sqrt{x+3}\,dx$;

10. $\int (x-2)\sqrt{x+4}\,dx$;

11. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$;

12. $\int \dfrac{\sqrt{tg\,x}dx}{\cos^2 x}$;

13. $\int 3^{2+3\cos x}\cdot\sin x dx$;

14. $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cos x\,dx$;

15. $\int \dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

16. $\int \dfrac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}$;

17. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[3]{ctg^2 x}}$

Самостоятельная работа

1. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(x+\dfrac{3}{x^2}\right)dx$

2. $\int \left(\dfrac{4}{x^2}+\sqrt{3x}\right)x^3dx$

3. $\int cos\left(\sqrt{x}+2\right)d\left(\sqrt{x}+2\right)$

4. $\int \dfrac{d\,x}{\sqrt{25-9x^2}}$

5. $\int \dfrac{d\,x}{\sqrt{7+4x^2}}$

6. $\int \dfrac{d\,x}{\sqrt{7-5x^2}}$

7. $\int 7^{\,2x\,-3}d\,x$

8. $\int e^{3x\,-5}dx$

9. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

10. $\int \cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

11. $\int x\cdot(2x-9)^6\,dx$.

12. $\int \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

13. $\int \dfrac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

14. $\int \dfrac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)}$

15. $\int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{dx}{1+x^2}$.

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{\arccos x\cdot\left(1-x^2\right)}}$.

2. Интегрировать путем подведения под знак дифференциала:

1. $\int (3x-1)^7\,dx$;
2. $\int e^{5x}dx$
3. $\int \sin 7x dx$
4. $\int \cos(2x-11)\,dx$
5. $\int \frac{dx}{4x-3}$
6. $\int \frac{dx}{(5-x)^4}$;
7. $\int ctgx dx$;
8. $\int \frac{x}{x^2+1}dx$;
9. $\int x\cdot 2^{x^2}\,dx$;
10. $\int \frac{e^x}{e^x-4}dx$;
11. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;
12. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$;
13. $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;
14. $\int sin^3x\cdot cosx dx$.

3. Интегрировать методом замены переменной:

1. $\int \frac{dx}{x\cdot(4+\ln x)}$
2. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$
3. $\int e^{sin^2x}\sin 2x\,dx$
4. $\int \frac{xdx}{x^4+3}$
5. $\int \frac{arcsin3x+x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$;
6. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$.

1.3. Интегрирование по частям.

Из формулы дифференциала произведения функций $d(uv)=udv+vdu$, интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям:

$\int udv = uv - \int v\,du.$

По этой формуле, отыскание интеграла $\int udv$ сводится к отысканию интеграла $\int vdu$. Ее применение целесообразно тогда, когда последний интеграл будет проще исходного.

Для применения формулы интегрирования по частям к интегралу $\int f(x)dx$, подынтегральное выражение $f(x)dx$ следует представить в виде произведения двух сомножителей: u и dv. За dv всегда выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого посредством интегрирования можно найти функцию v. За u, в большинстве случаев, принимается функция, которая при дифференцировании упрощается.

Пример. Найти $\int x\cos\frac{x}{7}dx$.

$$\int x\cos\frac{x}{7}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \cos\frac{x}{7}dx \\ du = dx \\ v = \int \cos\frac{x}{7}dx \\ v = 7\sin\frac{x}{7} \end{array} \right| = 7x\sin\frac{x}{7} - \int 7\sin\frac{x}{7}dx = 7x\sin\frac{x}{7} -$$

$$7\int \sin\frac{x}{7}dx = 7x\sin\frac{x}{7} - 7\left(-7\cos\frac{x}{7}\right) + C = 7x\sin\frac{x}{7} + 49\cos\frac{x}{7} + C.$$

Пример. Найти $\int xarctgxdx$.

$$\int x\cdot arctgxdx = \left| \begin{array}{c} u = arctgx \\ dv = xdx \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ v = \int xdx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}arctgx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx -$$

$$\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Практическое занятие.

1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\cdot\sin xdx$;

2) $\int (x^2+4)Lnxdx$;

3) $\int xe^{-2x}dx$;

4) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$;

5) $\int (2x+3)\cdot\cos xdx$;

6) $\int (x^2+2x-7)\cdot\ln x\,dx$;

7) $\int e^{3x}\cdot 5xdx$;

8) $\int \arcsin xdx$;

9) $\int x^2\ln xdx$;

10) $\int x\cdot\mathrm{arctg}\,2xdx$.

11) $\int (x^2-4x+1)\cdot e^x dx$

Самостоятельная работа

1. Применить метод интегрирования по частям:

1. $\int x\cos x\,dx$

2. $\int xe^{-2x}dx$

3. $\int arcsinxdx$ 6. $\int xarctgxdx$;

4. $\int x\ln x\,dx$ 7. $\int ln^2xdx$

5. $\int x^2e^{3x}\,dx$

1.4. Интегрирование рациональных дробей.

Интеграл от дробной рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены, можно найти путем разложения подынтегрального выражения на слагаемые, которые всегда преобразуются к формулам интегрирования.

Неправильную рациональную дробь, у которой степень числителя выше или равна степени знаменателя, можно делением числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{x^5+x^2-3}{x^2+1}dx.$

Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель и получим: $\frac{x^5+x^2-3}{x^2+1} = x^3 - x + 1 + \frac{x-4}{x^2+1}$.

$$\int \frac{x^5+x^2-3}{x^2+1}dx = \int\left(x^3 - x + 1 + \frac{x-4}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int x^3dx - \int xdx + \int dx + \int \frac{x-4}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{xdx}{x^2+1}\left|\begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right| - 4\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \int\frac{dt}{2t} - 4arctgx =$$

$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\ln|t| - 4arctgx + C = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - 4arctgx + C.$

Для отыскания интегралов, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе, нужно выделить полный квадрат трехчлена и заменой переменной выражения, стоящего под квадратом, свести к табличному интегрированию.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\mp k^2\right).$$

Пример. Найти: $\int\frac{dx}{2x^2-3x+1}$.

Выделим полный квадрат в знаменателе: $2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\right.$ *12=*

$2\left(x^2-2x\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\right.$ *116* .

$$\int\frac{dx}{2x^2-3x+1}=\int\frac{dx}{2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{3}{4}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|+C=\ln\left|\frac{x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|+C.$$

Любую правильную рациональную дробь можно разложить на элементарные слагаемые, которые легко интегрируются. Эти слагаемые имеют следующий вид: $\frac{A}{(x-a)^m}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, где m и n целые положительные числа.

Для разложения правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на элементарные слагаемые нужно:

а) Разложить знаменатель $Q(x)$ на простейшие действительные множители. Согласно основной теореме алгебры, это разложение может содержать линейные и квадратные множители:

$$Q(x)=a_0(x-a)^m(x-b)^k\dots(x^2+px+q)^n\dots$$

б) Написать схему разложения данной дроби на элементарные слагаемые в следующем виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots\frac{A_m}{(x-a)^m}+\dots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots$$

$$+\frac{B_K}{(x-b)^k}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{C_nx+D_n}{(x^2+px+q)^n}+\dots$$

, где $A_1,A_2,\dots A_m,B_1,B_2,\dots B_k,C_1,C_2,\dots C_n,D_1,D_2,\dots D_n,\dots$ неопределенные коэффициенты, которые определяются приведением правой части равенства к общему знаменателю, и приравниванием числителей этого равенства.

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые.

а) разложим знаменатель на простейшие множители:

$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2$;

б) напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые и приведем к общему знаменателю:

$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx}{x(x+2)^2}$;

Знаменатели равны, следовательно, равны и числители. Получаем равенство:

$3x^2+8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$.

Придавая x произвольные значения, получаем систему уравнений относительно A, B, C.

$x = 0, 8 = 4A\ , A = 2$;

$x = -2, 20 = -2C\ , C = -10$;

$x = 1,\ 11 = 9A + 3B + C\ ,\ \ B = 1$.

Подставим найденные значения в схему разложения б) и получим:

$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{(-10)}{(x+2)^2}$.

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей, и интегрируя каждое слагаемое отдельно, получим:

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{10}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+2} + 10\int (x+2)^{-2} d(x+2) =$$

$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C$.

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx$.

Разложим подынтегральную правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4 + x = x(x^3+1) = x(x+1)(x^2-x+1)$;

б)

$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} =$

$\frac{A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Cx+D)(x(x+1))}{x(x+1)(x^2-x+1)}$;

$x^3+4x^2-2x+1 = A(x^3+1) + B(x^3-x^2+x) + C(x^3+x^2) +$

$D(x^2+x)$;

Определим A, B, C, D приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях xв правой и левой части уравнения:

$x^3: 1 = A + B + C;$
$x^2: 4 = -B + C + D;$
$x: -2 = B + D;$
$x^0: 1 = A;$

Решаем систему линейных уравнений и получаем: $A = 1, B = -2, C = 2, D = 0$.

Следовательно, $\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} = \frac{1}{x} + \frac{(-2)}{x+1} + \frac{2x}{x^2-x+1}$.

Подставляем под знак интеграла полученное выражение и интегрируем:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{xdx}{x^2 - x + 1} = \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2\int \frac{xdx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$\left| \begin{array}{c} x^2 - x + 1 = \\ = x^2 - 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \\ = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = t^2 + \frac{3}{4} \\ x - \frac{1}{2} = t \\ x = t + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right| = \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2\int \frac{t + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt =$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2\int \frac{tdt}{t^2 + \frac{3}{4}} + \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \ln|x| + \ln|x+1| + \int \frac{d(t^2 + \frac{3}{4})}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} =$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln\left|t^2 + \frac{3}{4}\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\frac{x}{(x+1)^2} + \ln|x^2 - x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C\ .$$

Практическое занятие.

1. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$

2) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

4) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

5) $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$

6) $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$

7) $\int \frac{(21x^2+26)\,dx}{\left(x^2-5x+4\right)\left(x+3\right)}$

8) $\int \frac{3x-2\,dx}{5x^2-3x-2}$.

9) $\int \frac{(x+1)\,dx}{-x^2+4x-3}$

10) $\int \frac{\left(x^2+x+2\right)dx}{x^2\left(x-1\right)}$.

11) $\int \frac{\left(5x+3\right)dx}{\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-3\right)}$

12) $\int \frac{\left(1-2x^2\right)dx}{\left(x+3\right)\left(x^2+4\right)}$.

Самостоятельная работа

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

в) $\int \frac{\left(x+2\right)dx}{3x^2-x+5}$ г) $\int \frac{(3x^2+24)dx}{\left(x^2+x-2\right)\left(x+1\right)}$

2. Найти интегралы от рациональных дробей:

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

2. $\int \frac{dx}{3x^2-x-1}$;

3. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;

4. $\int \frac{x^5+3x+5}{x^2-1}dx$;

5. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$;

6. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$;

7. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$;

1.5. Интегрирование тригонометрических функций.

1) Интегралы вида $\int sin^m xdx$, $\int cos^n x\,dx$, $\int sin^m x\cdot cos^n xdx$, $m>0, n>0$.

Если m или n – нечетные, то используем формулу $sin^2x+cos^2x=1$ и подстановку $\sin x=t$, если m – нечетное, и $\cos x=t$, если n – нечетное.

Если m и n четные, то применяем формулы: $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; $sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

2) Интегралы вида $\int tg^m\,xdx$, $\int ctg^n xdx$, $\int \frac{dx}{cos^n x\cdot sin^m x}$, $m>0, n>0$.

При нахождении таких интегралов применяются формулы: $tg^2x=\frac{1}{cos^2x}-1$, $ctg^2x=\frac{1}{sin^2x}-1$.

3) Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция.

Интегралы такого вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=t$. Тогда

$x=2arctgt$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Если функция R – четная, т. е. $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то применяют подстановку $tgx=t$. Тогда

$x=arctgt, dx=\frac{dt}{1+t^2}, \sin t=\frac{tgt}{\sqrt{tg^2t+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \cos t=\frac{1}{\sqrt{tg^2t+1}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

Пример. Найти интеграл $\int(1+\cos x)^3\,dx$.

Воспользуемся формулой полного куба и распишем интеграл от суммы.

$$\int(1+\cos x)^3\,dx=\int(1+3\cos x+3cos^2x+cos^3x)dx=\int dx+3\int\cos x\,dx++3\int cos^2xdx+\int cos^3xdx=x+3\sin x+3\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx+\int cos^2x\cdot\cos xdx=$$

$=$

$x + 3\sin x + \frac{3}{2}\int dx + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx + \int (1 - sin^2 x)\cdot \cos x dx \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ \cos x\, dx = dt\end{matrix}\right| =$

*x+3*sin*x+32x+34*sin*2x+1−t2dt=x+3*sin*x+ 32x+34*sin*2x+t−t33+C=*

$= \frac{5}{2}x + 3\sin x + \frac{3}{4}\sin 2x + \sin x - \frac{sin^3 x}{3} + C = \frac{5}{2}x + 4\sin x + \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{sin^3 x}{3} + C.$

Пример: Найти интеграл $\int ctg^5 x dx$.

Распишем подынтегральную функцию на произведение четных и нечетных степеней $ctgx$.

$$\int ctg^5 x dx = \int ctg^3 x \cdot ctg^2 x dx = \int ctg^3 x \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$\int ctg^3 x \frac{1}{sin^2 x} dx - \int ctg^3 x dx = \int ctg^3 x \frac{1}{sin^2 x} dx - \int ctg^2\, x \cdot ctgx dx =$$

$$\int ctg^3 x \frac{1}{sin^2 x} dx - \int \left(\frac{1}{sin^2 x} - 1\right) ctgx dx =$$

$$= \int ctg^3 x \frac{1}{sin^2 x} dx - \int ctgx \frac{1}{sin^2 x} dx \left|\begin{matrix} ctgx = t \\ \frac{dx}{sin^2 x} = dt \end{matrix}\right| + \int ctgx dx =$$

$$= \int t^3 dt - \int t\, dt + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \left|\begin{matrix}\sin x = z \\ \cos x dx = dz\end{matrix}\right| =$$

$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \int \frac{dz}{z} = \frac{ctg^4 x}{4} - \frac{ctg^2 x}{2} + \ln|z| + C = \frac{ctg^4 x}{4} - \frac{ctg^2 x}{2} + +\ln|\sin x| + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2\sin\, x - \cos\, x}$.

Под знаком интеграла стоит рациональная функция от синуса и косинуса. Применим универсальную тригонометрическую подстановку.

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x} = \left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t \\ x = 2arctgt \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 4t - 1} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4 - 4 - 1} = 2\int \frac{dt}{(t+2)^2 - 5} =$$

$$= 2\int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2-5} = 2\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Практическое занятие.

1. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \cos(3x)\cdot\sin(2x)dx$
2. $\int \sin(4x)\cdot\sin(5x)dx$
3. $\int \cos(4x)\cdot\cos x dx$
4. $\int \sin^3 x\cdot\cos x dx$
5. $\int \cos^4 x\cdot\sin^3 x dx$
6. $\int \cos^3 x\cdot\sin^5 x dx$
7. $\int \cos^4 x\cdot\sin^2 x dx$
8. $\int \mathrm{tg}^4 x\cdot\sec^2 x dx$
9. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx$
10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$
11. $\int \frac{dx}{3+\sin x}$
12. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

Самостоятельная работа

1. Найти интегралы от тригонометрических функций:

1. $\int \sqrt[3]{\cos x}\sin x\, dx;$
2. $\int cos^3 x dx;$
3. $\int sin^2 x cos^2 x dx;$
4. $\int \left(tg^2\frac{x}{3} + ctg^3\frac{x}{2}\right)dx;$
5. $\int \frac{dx}{sin^5 x cos^3 x};$
6. $\int \frac{dx}{sinx + cosx};$
7. $\int \frac{dx}{1+3cos^2 x};$
8. $\int \frac{sin2x}{1+sin^2 x}dx$

1.6. Интегрирование иррациональных функций.

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях.

1. Интеграл $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{l}{k}}, \dots)\, dx$, где $R-$ рациональная функция, сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $x = t^r$, где $r-$ общий знаменатель всех дробных показателей.

2. Интегралы от иррациональных функций следующего вида:

$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx -$ подстановка $x = a \cdot \sin(t)$;

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx -$ подстановка $x = \frac{a}{\cos(t)}$;

$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx -$ подстановка $x = a \cdot tg(t)$;

сводятся указанными подстановками к рациональным функциям от тригонометрических функций.

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+9}}dx$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+9}}dx = \left|\begin{matrix} \sqrt{x+9} = t \\ x = t^2 - 9 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{(t^2-9)^2}{t} 2tdt = 2\int (t^4 - 18t^2 + 81)\,dt =$$

$$= 2\frac{t^5}{5} - 36\frac{t^3}{3} + 162t + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x+9)^5} - 12\sqrt{(x+9)^3} + 162\sqrt{x+9} + C.$$

Пример. Найти интеграл: $\int \frac{4\sqrt{x-2} + \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}}dx$.

$$\int \frac{4\sqrt{x-2} + \sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x-2}}dx \left|\begin{matrix} x - 2 = t^6 \\ x = t^6 + 2 \\ dx = 6t^5dt \end{matrix}\right| = \int \frac{(4t^3 + t)\cdot 6t^5dt}{t^3 + 2t^2}$$

$$= 6\int \frac{(4t^3+t)t^5dt}{t^2(t+2)} = 6\int \frac{4t^6 + t^4}{t+2}dt =$$

Делим числитель на знаменатель, получаем:

$$= 6\int \frac{4t^6 + t^4}{t+2}dt = 6\int \left(4t^5 - 8t^4 + 17t^3 - 34t^2 + 68t - 136 + \frac{272}{t+2}\right)dt =$$

$$=6\left(4\frac{t^6}{6} - 8\frac{t^5}{5} + 17\frac{t^4}{4} - 34\frac{t^3}{3} + 68\frac{t^2}{2} - 136t + 272\ln(t+2)\right) + C =$$

$$= 4(x-2) - \frac{6\cdot 8}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{3\cdot 17}{2}\sqrt[6]{(x-2)^4} - 2\cdot 34\sqrt[6]{(x-2)^3} + 3$$

$$\cdot 68\sqrt[6]{(x-2)^2} - 6\cdot 136\sqrt[6]{x-2} + 6\cdot 272\ln\left(\sqrt[6]{x-2} + 2\right) + C =$$

$$= 4(x-2) - \frac{48}{5}\sqrt[6]{(x-2)^5} + \frac{51}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} - 68\sqrt{x-2} + 204\sqrt[3]{x-2}$$

$$- 816\sqrt[6]{x-2} +$$

$$+1632\ln\left(\sqrt[6]{x-2} + 2\right) + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Так как подынтегральное выражение содержит $\sqrt{9-x^2}$, применяем подстановку $x = 3\sin t$, $dx = 3\cos t \cdot dt$, получим:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9sin^2t \cdot 3\cos tdt}{\sqrt{9-9sin^2t}}$$
$$= 27\int \frac{sin^2t \cdot \cos tdt}{3\cos t} = 9\int sin^2tdt = 9\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt$$
$$= \frac{9}{2}\int dt - \frac{9}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t + C = \frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3}$$
$$-\frac{9}{4}\sin 2\left(arcsin\frac{x}{3}\right) + C$$
$$= \frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{4}\left(2\sin arcsin\frac{x}{3}\cos arcsin\frac{x}{3}\right) + C =$$
$$= \frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} + C.$$

Практическое занятие.

1. Найти интегралы от иррациональных функций:

1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$
2. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$
3. $\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x}$
4. $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$
6. $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2}dx$
7. $\int \sqrt[3]{x^3-4} \cdot x^2dx$
8. $\int x \cdot \sqrt[5]{x-2}\,dx$
9. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$

Самостоятельная работа

1. Найти интегралы от иррациональных функций:

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$; 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$; 3. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

2. Определенный интеграл.

2.1. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок произвольным образом на n частичных отрезков, $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$. Выберем на каждом отрезке по одной произвольной точке $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$. Вычислим значение функции в этих точках и составим интегральную сумму:

$$f(\omega_1)\Delta x_1 + f(\omega_2)\Delta x_2 + f(\omega_3)\Delta x_3 + \dots + f(\omega_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)\Delta x_i.$$

Если существует предел от этой интегральной суммы при $n \to \infty, \Delta x_i \to 0$, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки Δx_i, и от выбора точек ω_i, то он называется определенным интегралом от $f(x)$ в пределах от a до b, и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;
5. $\int_a^b (f(x) + \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$;

Для вычисления определенного интеграла служит ***формула Ньютона-Лейбница***:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример: Вычислить $\int_2^3 (3x^2 - 1 + e^{x-2})dx$.

$$\int_2^3 (3x^2 - 1 + e^{x-2})dx = 3\int_2^3 x^2dx - \int_2^3 dx + \int_2^3 e^{x-2}\,dx$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}|_2^3 - x|_2^3 + \int_2^3 e^{x-2}d(x-2) =$$

$= (3^3 - 2^3) - (3 - 2) + e^{x-2}|_2^3 = (27 - 8) - 1 + (e^{3-2} - e^{2-2}) = 18 + e - 1 = 17 + e$.

2.2. Метод замены переменной в определенном интеграле.

В определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$ применяется метод замены переменной. Пусть $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi^{'}(t)dt$. При переходе к переменной t, пределы интегрирования $x_1 = a, x_2 = b$ заменяются новыми пределами t_1 и t_2, которые определяются из уравнений $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$.

$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi^{'}(t)dt$.

Интеграл, полученный после подстановки, вычисляется без перехода к первоначальной переменной.

Пример. Вычислить $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} \left| \begin{matrix} \sqrt{1+3x}=t \\ x=\dfrac{t^2-1}{3} \\ dx=\dfrac{2t}{3}dt \\ x=0, t_1=1 \\ x=5, t_2=4 \end{matrix} \right| = \int_1^4 \frac{t^2-1}{3t}\cdot\frac{2t}{3}dt = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{4^3}{3}-4-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1\right) = 4\ .$$

2.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла получается так же интегрированием равенства $(uv)' = u'v + uv'$, где $u(x), v(x)$ $-$ дифференцируемые функции, в пределах от a до b:

$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$

Пример. Вычислить: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin xdx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin xdx = \left| \begin{matrix} x+3=u \\ dx=du \\ \sin xdx = dv \\ v=\int \sin x\,dx = -\cos x \end{matrix} \right| = -(x+3)\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}+3\right)\cos\frac{\pi}{2} + (0+3)\cos 0 + \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{\pi}{2}+3\right)\cdot 0 + 3 + \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4.$$

2.4. Интегрирование тригонометрических функций в определенном интеграле.

Пример. Вычислить $\int_0^{2\pi} sin^4 3x \cdot cos^4 3xdx.$

Воспользуемся тригонометрическими формулами для преобразования подынтегральных выражений:

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, $sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

$$\int_0^{2\pi} sin^4 3x\cdot cos^4 3xdx=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\sin 3x\cos 3x}{2}\right)^4 dx=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 6x}{2}\right)^4 dx$$

$$=\frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi} sin^4 6xdx= =\frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi}(sin^2 6x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2^4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 12x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{2^6}\int_0^{2\pi}(1-2\cos 12x+cos^2 12x)\,dx$$

$$=$$

$\frac{1}{2^6}\int_0^{2\pi}dx-\frac{2}{2^6}\cdot\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\cos 12xd(12x)+\frac{1}{2^6}\int_0^{2\pi}cos^2 12xdx=\frac{1}{64}(2\pi-0)-\frac{1}{2^5\cdot 12}\sin 12x|_0^{2\pi}+\frac{1}{2^6}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\,24x}{2}dx=\frac{\pi}{32}-\frac{1}{2^5\cdot 12}(\sin 24\pi-\sin 0)+\frac{1}{2^7}\int_0^{2\pi}dx+\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\cos 24xd(24x)=\frac{\pi}{32}-0+\frac{1}{2^7}x|_0^{2\pi}+\frac{1}{2^7\cdot 24}\sin 24x|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{2^6}+\frac{1}{2^7 24}(\sin 48\pi-\sin 0)=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{64}+0=\frac{3\pi}{64}.$

Пример. Вычислить $\int_0^{arccos\frac{1}{\sqrt{6}}}\frac{3tg^2x-1}{tg^2x+5}dx.$

Функция, стоящая под знаком интеграла является рациональной, четной функцией от синуса и косинуса (см. случай 3. в интегрировании тригонометрических функций). Следовательно, применим подстановку: $tgx=t\,,x=arctgt\,,dx=\frac{dt}{1+t^2}$. При переходе к переменной t изменим пределы интегрирования: $tg0=t_1$, следовательно $,t_1=0$. $tg\left(arccos\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=t_2$, вычислим t_2. Воспользуемся формулой, связывающей тангенс и косинус одного угла $\frac{1}{cos^2\alpha}=tg^2\alpha+1$. Выразим $tg\alpha=\sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha}-1}$. Подставим вместо α, $arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. Получим $t_2=tg(arccos\frac{1}{\sqrt{6}})=\sqrt{\frac{1}{cos^2(arc\,cos\frac{1}{\sqrt{6}})}-1}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-1}=\sqrt{5}$. Следовательно,

$\int_0^{arccos\frac{1}{\sqrt{6}}}\frac{3tg^2x-1}{tg^2x+5}dx=\int_0^{\sqrt{5}}\frac{3t^2-1}{t^2+5}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$

2.5. Интегрирование рациональных дробей в определенном интеграле.

Под знаком интеграла стоит рациональная, правильная дробь. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{3t^2-1}{(t^2+5)(1+t^2)}=\frac{At+B}{t^2+5}+\frac{Ct+D}{t^2+1}=\frac{(At+B)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2+5)}{(t^2+5)(t^2+1)},$$

$$3t^2-1=At^3+At+Bt^2+B+Ct^3+5Ct+Dt^2+5D$$

$$t^3\!:A+C=0$$

$$t^2: B + D = 3$$
$$t: A + 5C = 0$$

$t^0: B + 5D = -1$.

Решая систему уравнений, получаем: $A = 0, B = 4, C = 0, D = -1$. Следовательно, выражение под знаком интеграла можно заменить на сумму простейших рациональных дробей.

$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{3t^2-1}{t^2+5} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{5}} \left(\frac{4}{t^2+5} + \frac{-1}{t^2+1}\right) dt = \left(4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{t}{\sqrt{5}} - arctgt\right)\Big|_0^{\sqrt{5}} =$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{5}} arctg \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - arctg\sqrt{5}\right) - \left(\frac{4}{\sqrt{5}} arctg \frac{0}{\sqrt{5}} - arctg0\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\pi}{4} - arctg\sqrt{5} - 0 =$$

$= \frac{\pi}{\sqrt{5}} - arctg\sqrt{5}$.

Практическое занятие.

1. Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$

2. $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$

3. $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$

4. $\int_1^5 \frac{x}{1+x^2} dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos_2 x} - \frac{3}{4}\cos x\right) dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot (3 - \cos 2x) dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 6x}$

8. $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$

9. $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$

10. $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x} dx$

11. $\int_1^{e^2} \ln x \, dx$

12. $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$

13. $\int_{0,5}^{1} x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$

14. $\int_{-0,4}^{0} (2+5x)^4\,dx$

15. $\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx$

16. $\int_{-1}^{0} x\ln(x+2)dx$

17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\,dx$

18. $\int_{0}^{1} (2x+3)3^x\,dx$

19. $\int_{0}^{0,2} xe^{5x}\,dx$

Самостоятельная работа

1. Методы интегрирования в определенном интеграле. Вычислить:

1. $\int_{-1}^{5} (3x-x^2-1)dx$

2. $\int_{0}^{1} \frac{dt}{(2t+3)^3}$

3. $\int_{0}^{2} \frac{x+3}{x^2+4}dx;$

4. $\int_{1}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}};$

5. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx;$

6. $\int_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx;$

7. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$

8. $\int_{0}^{2} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$

10. $\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$

3. Несобственные интегралы.

Интегралы с бесконечными пределами (I) или от разрывных функций называются несобственными интегралами(II).

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются посредством предельного перехода:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$.

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx$,

где $c \in [a, b]$.

II. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами также определяются посредством предельного перехода.

Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, где $c \in [a, b]$, и непрерывна во всех остальных точках этого отрезка, тогда

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to+0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx$.

Несобственные интегралы называются сходящимися, если пределы существуют и они конечны. Если пределы не существуют, или равны бесконечности, то интеграл называют расходящимся. Для существования исходного интеграла должны существовать оба интеграла в правой части равенства.

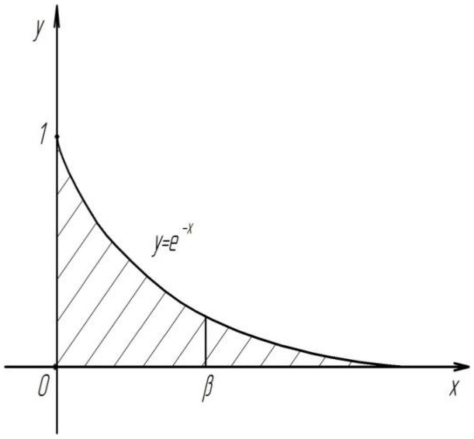


Рис. 1

Пример.

Найти несобственный интеграл: $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$ (рис. 1).

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} dx =$$

$$-\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, d(-x) = -\lim_{b\to\infty} e^{-x} \,|_0^b =$$

$$-\lim_{b\to\infty}(e^{-b} - e^0) = -\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{e^b} - 1) =$$

$$-\frac{1}{e^\infty} + 1 = 1.$$

Интеграл сходится.

Пример. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} arctgx|_a^b =$ $\lim_{b\to\infty} arctgb - \lim_{a\to-\infty} arctga = arctg(\infty) - arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

Интеграл сходится.

Пример. Найти несобственный интеграл от разрывной функции. (рис. 2)

$\int_{-1}^{2}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}dx =$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}dx=$$

$$=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1}+(-1)\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}3\left((1-1+\varepsilon_1)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\right)-$$

$$-\lim_{\varepsilon_2\to 0}3\left((-1)^{\frac{1}{3}}-(1-1-\varepsilon_2)^{\frac{1}{3}}\right)=3\cdot 2^{\frac{1}{3}}+3$$

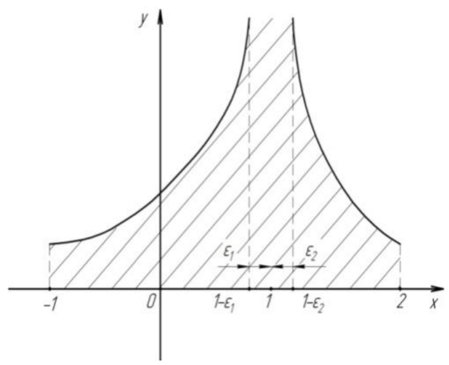


Рис. 2

Интеграл сходится

Практическое занятие.

1. Найти значения несобственных интегралов или установить их расходимость:

1. $\int_{0}^{+\infty} e^{-4x}dx$;
2. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;
3. $\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$;
4. $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;
5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$;
6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$;
7. $\int_{0}^{+\infty}2x\sin x\,dx$.

2. Исследовать сходимость несобственного интеграла:

1. $\int_{-\infty}^{0}\cos 3x\,dx$;
2. $\int_{-\infty}^{0}x\cos x\,dx$.

Самостоятельная работа

1.Вычислить несобственные интегралы:

1. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$;
2. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{3x^2+1}$

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

4. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x}$

4. Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

4.1. Площади фигур.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $f(x) > 0$ на этом отрезке. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, т. е. площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = f(x), x = a, x = b, y = 0$ (рис. 3).

$S = \int_a^b f(x)dx$.

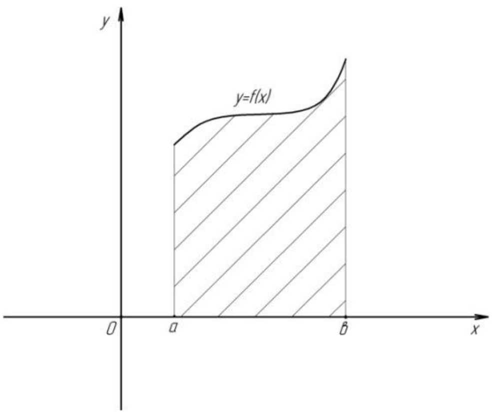


Рис. 3

Если площадь фигуры, ограничена снизу и сверху кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, и прямыми $x = a, x = b$ (рис. 4), то площадь фигуры находится по формуле

$S = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx.$

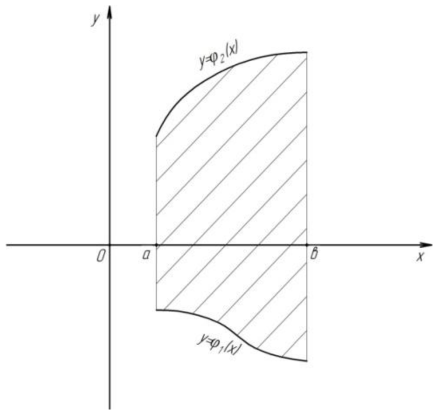


Рис. 4

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченная этой кривой, прямыми $x = a, x = b$ и осью OX, определяется выражением

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt ,$$

где t_1 и t_2 значения параметра, которые определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = y(t_2)$, и $y(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$.

Площадь фигуры, заключенной между двумя лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и ограниченной между этими лучами функцией, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2 d\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$4y = 8x - x^2, 4y = x + 6 .$$

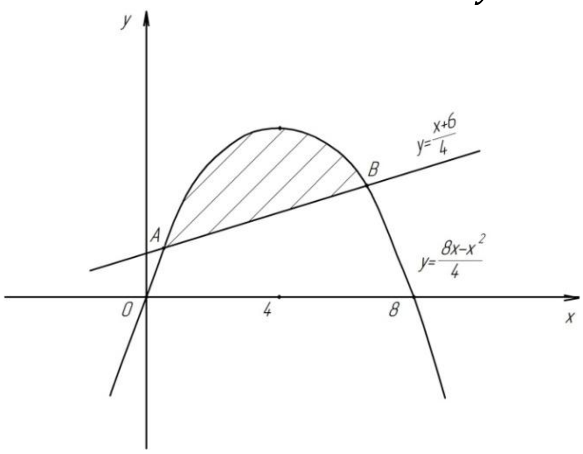


Рис. 5

Построим графики функций: $y = \frac{8x-x^2}{4} -$ парабола , $y = \frac{x+6}{4} -$ прямая линия (рис. 5).

Для определения площади заштрихованной фигуры найдем точки A и B пересечения параболы и прямой линии. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} 4y = 8x - x^2 \\ 4y = x + 6 \end{cases}$.

$8x - x^2 = x + 6$, $x^2 - 7x + 6 = 0, x_1 = 1, x_2 = 6.$

Следовательно, площадь заштрихованной фигуры определяется интегралом:

$$\int_1^6 \left(\frac{8x - x^2}{4} - \frac{x + 6}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\int_1^6 (8x - x^2 - x - 6)\, dx = \frac{1}{4}\int_1^6 (7x - x^2 - 6)\, dx =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{7x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-6x\right)\Big|_1^6=\frac{1}{4}\left(\frac{7\cdot 6^2}{2}-\frac{6^3}{3}-6\cdot 6\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{3}-6\right)=\frac{1}{4}(18)-\frac{1}{4}\left(-\frac{17}{6}\right)=\frac{125}{24}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4-x^2, y=x^2-2x.$$

Построим графики парабол. Найдем площадь заштрихованной фигуры (рис. 6).

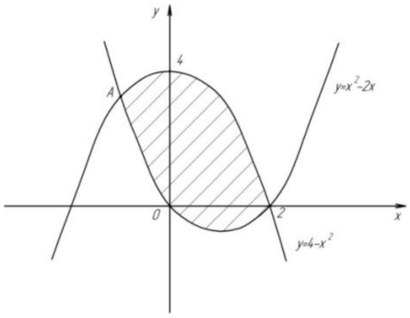


Рис. 6

Найдем точки пересечения парабол.

Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=x^2-2x \end{cases}$.

$$4-x^2=x^2-2x, 2x^2-2x-4=0,$$

$x_1=-1, x_2=2.$

Площадь заштрихованной фигуры равна определенному интегралу

$$\int_{-1}^{2}(4-x^2-(x^2-2x))dx=\int_{-1}^{2}(4-2x^2+2x)\,dx =$$

$$=\left(4x-\frac{2x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(8-\frac{16}{3}+4\right)-\left(-4-\frac{(-2)}{3}+1\right)=\left(\frac{20}{3}\right)-\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{27}{3}=9.$$

Пример. Найти площадь фигуры, заданной параметрическими уравнениями линии: $\begin{cases} x=acos^3t \\ y=asin^3t \end{cases}$. Придавая значения параметру t, найдем x и y, и построим график этой линии (рис .7).

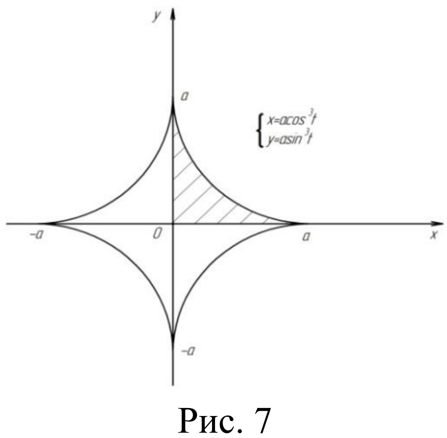


Рис. 7

t		30^o	45^o	60^o	90^o
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{2\sqrt{2}}{8}a$	$\frac{a}{8}$	0
y	0	$\frac{a}{8}$	$\frac{2\sqrt{2}}{8}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	a

Площадь фигуры представляет собой четыре симметричные части. Найдем площадь одной такой части. Параметр t изменяется в пределах от $t=\frac{\pi}{2}$ до $t=0$.

$x'(t) = -3acos^2t\sin t$.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} asin^3t\cdot 3a\cdot cos^2t\cdot \sin tdt =$$

$$-4\cdot 3a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^4tcos^2dt =$$

$= -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(sin^2t\cdot cos^2t)\cdot sin^2tdt = -12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{sin^2 2t}{4}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt =$
$-\frac{3a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 2tdt + \frac{3a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 2t\cdot cos2tdt =$
$-\frac{3a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt + \frac{3a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sin^2 2t\, d(sin2t) = -\frac{3a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} dt + \frac{3a^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 4tdt + \frac{3a^2}{4}\cdot$
$\frac{sin^3 2t}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{3a^2}{4}t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{3a^2}{4\cdot 4}\sin 4t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{3a^2}{12}(sin^3 0 - -sin^3\pi) = -\frac{3a^2}{4}\left(0-\frac{\pi}{2}\right) +$
$\frac{3a^2}{16}(sin0 - sin2\pi) = \frac{3a^2\pi}{8}$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат: $r=a$, $r=2a\sin\varphi$.

Построим эти линии в полярной системе координат (рис.8). Заштрихованная фигура поделилась линией $\varphi=\frac{\pi}{6}$ на две части. Первая часть фигуры находится между лучами

$\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, и ограничена функцией $r=2a\sin\varphi$. Вторая часть фигуры находится между лучами $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\pi$, и ограничена функцией $r=a$.

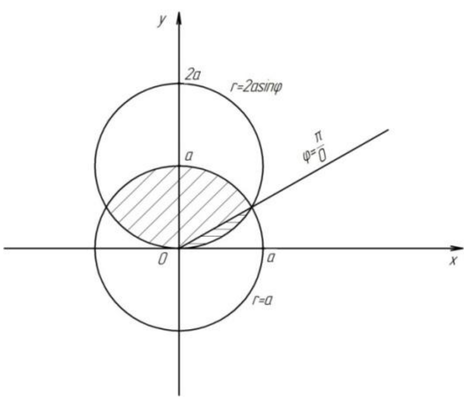


Рис. 8

Используя формулу площади фигуры для

функций, заданных в полярных координатах, получим

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a\sin\varphi)^2\,d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}(a)^2d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}sin^2\varphi d\varphi+\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}d\varphi=$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi+\frac{a^2}{2}\cdot\varphi|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi-a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2\varphi d\varphi+\frac{a^2}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=a^2\varphi|_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{5a^2\pi}{12}=$$

$$=a^2\left(\frac{\pi}{6}-0\right)-\frac{a^2}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin 0\right)+\frac{5a^2\pi}{12}=\frac{a^2\pi}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{5a^2\pi}{12}=\frac{7a^2\pi}{12}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

.

Практическое занятие.

1. Вычислить площадь фигуры

а) $y=4x-x^2, y=0$.
б) $y^3=x, y=1, x=8$.

в) $\begin{cases}x=a(2\cos t-\cos 2t)\\ y=a(2\sin t-\sin 2t)\end{cases}$.
г) $r=a\cos 2\varphi$.

Самостоятельная работа

1. Вычислить площадь фигуры

а) $2y=x^2-3,\ y=0;$

б) $y=0,\ y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ x=4;$

в) $y=x^2-6,\ y=-x^2+5x-6;$

г) $y=-x+6,\ y=\dfrac{x}{2},\ y=2x,$

д) $y=cosx,\ x=-\pi,\ x=\pi,\ y=0;$

е) $y=x^2-2x+3,\ y=3x-1;$

ж) $y=\ln x,\quad y=1-x,\quad x=2$
.

з) $y=-x^2+3x,\ y=5x-8.$

4.2. Длина дуги.

Рассмотрим плоскую кривую в декартовой системе координат, которая задана уравнением $y=f(x)$ (рис. 9).

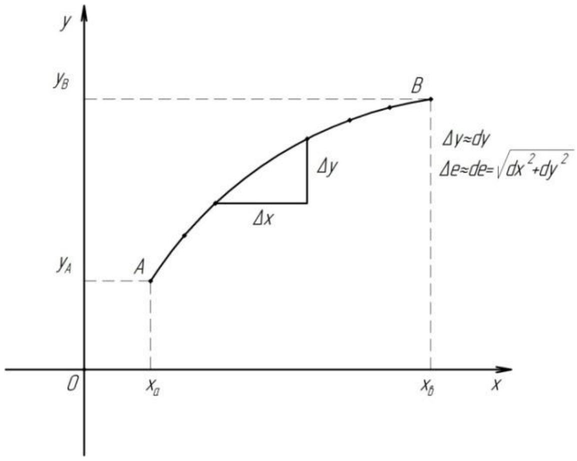


Рис. 9

Дифференциал dl длины ее дуги, выражается формулой $dl \approx \Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x \approx \sqrt{1 + (y')^2}dx$,

а длина дуги от точки A до точки B определяется как

$$L = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \; .$$

Если плоская кривая задана в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t_a < t < t_b$, то длина дуги определяется интегралом

$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{({x_t}')^2 + (y_t')^2}\, dt.$

Если плоская кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi), \varphi_a < \varphi < \varphi_b$, то длина дуги выражается интегралом

$$L = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sqrt{(r)^2 + \left({r'}_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Пример. Найти длину дуги кривой $y^2 = (x-1)^3$, заключенной между точками $A(2{,}1)$ и $B(5,-8)$.

Выразим функцию y и найдем ее производную: $y = \pm\sqrt{(x-1)^3}$, $y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$.

$$L = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{2}^{5} \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)}\, dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{5} \sqrt{9x-5}\, dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}}\; d(9x-5) = \frac{1}{18}\cdot\frac{(9x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = \frac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right) \approx 7{,}63 \; .$$

Пример. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды: $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a\sin t$.

Находим дифференциал дуги

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + (a^2\sin t)^2}\,dt =$$
$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + (\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$$
$$a\sqrt{4sin^2\frac{t}{2}dt} = 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

Одна арка циклоиды получается при изменении параметра T от 0 до 2π, поэтому

$L = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi -$ $\cos 0 = 8a$.

Пример. Вычислить длину дуги кривой $r = acos^3\frac{\varphi}{3}$, $0 < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

Из уравнения кривой находим производную по переменной φ , и дифференциал дуги:

$$r' = 3a\cdot cos^2\frac{\varphi}{3}\cdot\left(-\sin\frac{\varphi}{3}\right)\frac{1}{3}\;, dl = \sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi$$
$$= \sqrt{a^2cos^6\frac{\varphi}{3} + a^2cos^4\frac{\varphi}{3}sin^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi =$$
$$= a\sqrt{cos^4\frac{\varphi}{3}\left(cos^2\frac{\varphi}{3} + sin^2\frac{\varphi}{3}\right)}d\varphi = acos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi\ .$$

$$L = a\int_0^{\frac{3\pi}{2}} cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(1 + \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)|_0^{\frac{3\pi}{2}}$$
$$= \frac{a}{2}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}\sin\pi\right) = \frac{3\pi a}{4}$$

Практическое занятие.

1. Найти длину дуги кривой:

а) $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

б) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y = 1$ до $y = e$.

в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$.

г) $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$.

д)найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

е)$r = a(1 + \cos\varphi)$.

Самостоятельная работа

1. Найти длину дуги кривой:

а) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$, отсеченной осью Ox

б) $y = -x^2 + 2x$от вершины до точки с абсциссой $x = 2$

в) длину астероиды $\begin{cases} x = a\, cos^3 t \\ y = a\, sin^3 t \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases}$, одной арки

д) $r = 3{,}5(1 - \cos\varphi)$

е) $r = \sqrt{2}\, sin\varphi$

5. Кратные интегралы.

5.1. Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

Пусть функция $f(x, y)$ определена в ограниченной, замкнутой области D на плоскости XOY . Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$ и диаметрами $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_i(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$. Найдем значение функции в точке $P_i(x_i, y_i)$. Составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i = f(x_1, y_1)\Delta s_1 + f(x_2, y_2)\Delta s_2 + \dots + f(x_n, y_n)\Delta s_n.$$

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы при $n \to \infty, max d_i \to 0$, если он не зависит от способа разбиения области D , и от выбора точек P_i внутри области и обозначается

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\, d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i.$$

Свойства двойного интеграла совпадают со свойствами определенного интеграла.

В декартовых координатах двойной интеграл записывают, заменяя $ds = dx \cdot dy$.

Вычисление двойного интеграла $\iint_D f(x, y) dxdy$ сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов. Все зависит от области D. Различают два основных вида области интегрирования.

1.Область интегрирования D ограничена слева и справа прямой: $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, а снизу и сверху – непрерывными функциями $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, (рис. 10), каждая из которых пересекается прямыми $x = a, x = b$ только в одной точке.

Для вычисления двойного интеграла по такой области применяется формула перехода к повторному интегралу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

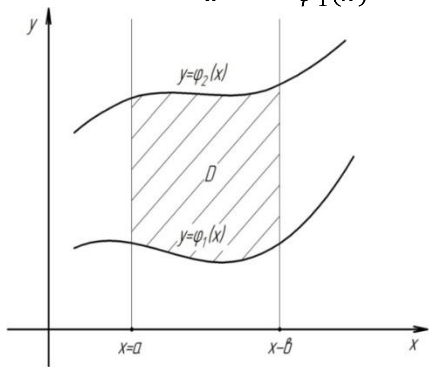


Рис. 10

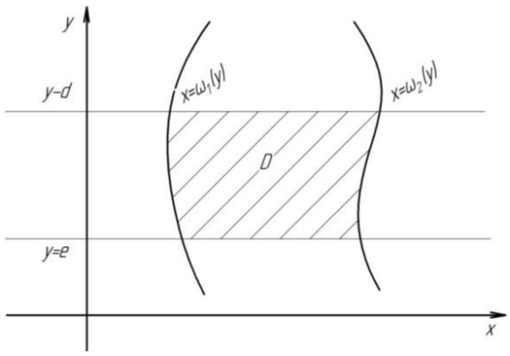


Рис. 11

Сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, в котором переменная x считается постоянной. Результат вычисления зависит только от переменной x . Полученное выражение вносится под знак внешнего интеграла и операция интегрирования проводится еще раз.

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми линиями $y = c$ и $y = d$ $(c < d)$, а слева и справа – кривыми $x = \omega_1(y)$ и $x = \omega_2(y)$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке (рис.11). Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\omega_1(y)}^{\omega_2(y)} f(x,y)dx.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{\omega_1(y)}^{\omega_2(y)} f(x,y)dx$, в котором переменная y считается постоянной. Результат вычисления зависит только от переменной y . Полученное выражение вносится под знак внешнего интеграла и операция интегрирования проводится еще раз.

Если область интегрирования представляет собой круг или часть круга, или заключена между двумя лучами, то вычисление интеграла значительно упрощается переходом к полярным координатам. Декартовые координаты и полярные связаны формулами перехода $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi, r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Элемент площади в полярных координатах $dxdy = rdrd\varphi$. Тогда, имеет место формула перехода от декартовых координат к полярным координатам:

$\iint_D f(x,y)dxdy =$
$Dfr\cos\varphi,r\sin\varphi rdrd\varphi{=}\alpha\beta d\varphi r1(\varphi)r2(\varphi)fr,\varphi rdr$.

Пример. Расставить пределы интегрирования и вычислить
$\iint_D (x-y+1)dxdy,$
где область D определяется линиями: $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

Область D представляет собой фигуру, заключенную между прямыми линиями $x = 0$, $x = 1$, и ограниченную снизу прямой линией $y = x$, а сверху линией $y = 2x$ (рис. 12).

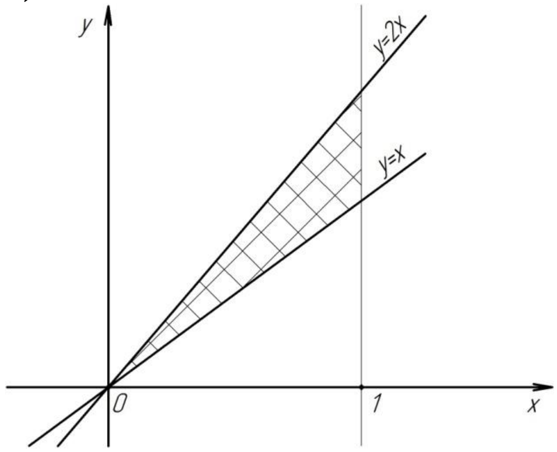


Рис. 12.

Область интегрирования подходит к виду 1. Вычисляем сначала внутренний интеграл, считая x величиной постоянной, затем полученное выражение вносим под знак внешнего интеграла и вычисляем его.

$$\iint\limits_D (x-y+1)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} (x-y+1)dy = \int\limits_0^1 dx\left(\int\limits_x^{2x} xdy - \int\limits_x^{2x} ydy + \int\limits_x^{2x} dy\right) =$$

$$\int\limits_0^1 dx\left(xy|_x^{2x} - \frac{y^2}{2}|_x^{2x} + y|_x^{2x}\right)$$

$$= \int\limits_0^1 dx\left(x(2x-x) - \frac{1}{2}((2x)^2 - x^2) + (2x-x)\right) =$$

$$\int_0^1 dx\left(x^2 - \frac{1}{2}\cdot 3x^2 + x\right) = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Пример: Расставить пределы интегрирования и вычислить $\iint_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$, где область D определяется линиями: $y = 2$, $y = x$,

$y = 4, x = 0.$

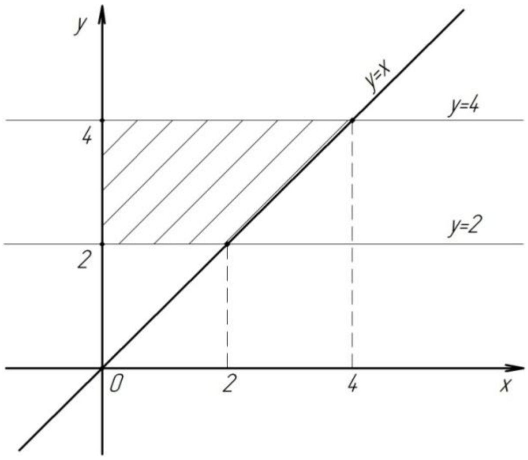


Рис. 13.

Область D представляет собой фигуру, заключенную между прямыми линиями $y = 2$, $y = 4$, и ограниченную снизу прямой линией $x = 0$, а сверху линией $x = y$, считая переменную $y -$ аргументом, а $x -$ функцией (рис. 13). Область интегрирования подходит к виду 2. Вычисляем сначала внутренний интеграл, считая y величиной постоянной, затем полученное выражение вносим под знак внешнего интеграла и вычисляем его.

$$\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}dx = \int\limits_2^4 dy\left(y^3\int\limits_0^y \frac{dx}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\int\limits_2^4 dy\left(y^3\cdot\frac{1}{y}arctg\frac{x}{y}|_0^y\right) = \int\limits_2^4 dy\left(y^2\cdot(arctg\frac{y}{y} - arctg\frac{0}{y}\right) =$$

$$\int_2^4 \left(y^2\cdot(\frac{\pi}{4}-0)\right)dy = \frac{\pi}{4}\int_2^4 y^2dy = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{y^3}{3}|_2^4 = \frac{\pi}{12}(4^3-2^3) = \frac{14\pi}{3}\,.$$

Пример. Расставить пределы интегрирования и вычислить двойной интеграл: $\iint_D x^2\cdot y\,dxdy$, $D: xy = 1, y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

Изобразим область интегрирования (рис. 14).

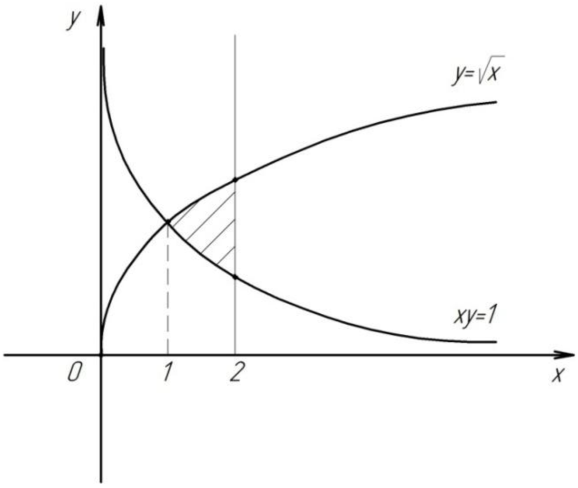


Рис. 14.

Найдем точку пересечения границ $xy = 1\,, y = \sqrt{x}$. Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$, $\frac{1}{x} = \sqrt{x}\,, x\sqrt{x} = 1\,, x^{\frac{3}{2}} = 1\,, x = 1.$

По области D видим, что фигура заключена между прямыми линиями $x = 1, x = 2$. Это пределы интегрирования для внешнего интеграла. Для внутреннего интеграла это функции $y = \frac{1}{x}\,, y = \sqrt{x}$. Вычисляем повторный интеграл.

$$\iint_D x^2 \cdot y\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy = \int_1^2 dx \cdot x^2 \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} ydy = \int_1^2 dx \cdot x^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\right) =$$

$$\int_1^2 dx \cdot x^2 \left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}\right) = \int_1^2 dx \cdot x^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}\int_1^2 (x^3 - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_1^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2^4}{4} - 2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}.$$

Пример. Расставить пределы интегрирования и вычислить двойной интеграл: $\iint_D 12y\,e^{6xy}\,dxdy$, $D\colon y = \ln 3\,, y = \ln 4\,, x = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{3}$.

Изобразим область интегрирования D(рис.15).

Область интегрирования представляет собой прямоугольник, поэтому для расстановки пределов интегрирования можно пользоваться и первым, и вторым случаем.

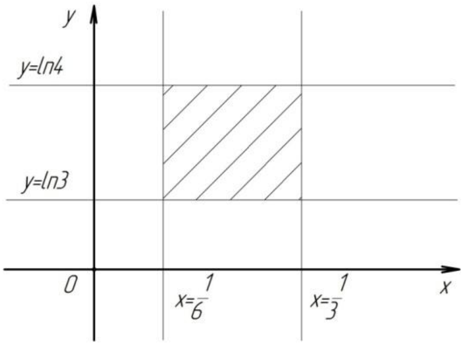


Рис. 15.

Но под знаком интеграла стоит функция, которую легче сначала интегрировать по переменной x, а затем по переменной y. Следовательно, внутренний интеграл берем по переменной x, а внешний, по переменной y (2 случай).

$$\iint\limits_D 12ye^{6xy}\,dxdy = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} 12ye^{6xy}\,dx = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \left(12y \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} e^{6xy}\,dx \right) =$$

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \left(12y \cdot \frac{1}{6y} \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} e^{6xy}\,d(6xy) \right)$$

$$= \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \left(2 \cdot e^{6xy} \Big|_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \right) = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \left(2 \left(e^{6y\frac{1}{3}} - e^{6y\frac{1}{6}} \right) \right) =$$

$$2 \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} (e^{2y} - e^{y})\,dy = 2\left(\frac{1}{2}e^{2y} - e^{y}\right)\Big|_{\ln 3}^{\ln 4}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4} - e^{\ln 4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 3} - e^{\ln 3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot 16 - 4\right) - 2\left(\frac{1}{2} \cdot 9 - 3\right) = 8 - 3 = 5.$$

Практическое занятие.

1. Вычислить повторные интегралы:

а) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)dy$;

б) $\int_{1}^{2} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$.

в) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (x^2 + xy^2)dy$

д) $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}\,dy$

г) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_0^{y^2} (x + 2y)dx$

е) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^y \frac{y^2}{x^2 + y^2}\,dx$

2. Написать уравнения линий, ограничивающих области, по которым расписаны повторные интегралы и вычертить эти области:

а) $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x,y)dx$; б) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$.

3. Расставить пределы интегрирования и вычислить двойные интегралы:

а) $\iint_D (x-2y)dxdy,\ D: x=0, y=0, x+y=1$.

б) $\iint_D xy^2\, dxdy, D: y=0, y=3\ , y=x, x=y+3$.

в) $\iint_D ydxdy,\ D: x^2+y^2 \le 16.$

4. Вычислить $\iint (2x+y)dxdy$, где D: треугольник с вершинами в точках: *A(-1; 2), B(3; 4), C (6; 2).*

5. Вычислить $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2}{y^2} dx\,dy$ по области, ограниченной прямыми *x=2, y=x,* и гиперболой *xy=1* (двумя способами).

Самостоятельная работа

1. Вычислить повторные интегралы:

а) $\int_0^2 dx \int_0^{2x+1} \left(x^2+2xy\right)dy$

б) $\int_0^1 dx \int \frac{y^2}{x^2+y^2} dy + \int_1^4 dx \int_x^4 \frac{y^2}{x^2+y^2} dy$

в) $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx$

г) $\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$

2. Вычислить:

а) $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x}{y^2} dx\,dy$, где область D ограничена линиями *x=0;y=4x; y = –(3+x²).*

б) $\iint\limits_{(\sigma)} e^{\frac{x}{y}} dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y^2 = x$; *y=1* и осью ординат.

3. Построить область интегрирования по границам двукратного интеграла, изменить порядок интегрирования:

а).

$$\int_0^4 dy \int_0^{y/2} f(x,y)dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x,y);$$

б). $\int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

5.2. Вычисление тройного интеграла.

Вычисление тройного интеграла сводится к трехкратному интегрированию, т. е. к последовательному вычислению трех обыкновенных определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства.

Если область интегрирования V и функция $f(x,y,z)$задана в декартовой системе координат, то тройной интеграл преобразуется к виду

$\iiint_V \ f(x,y,z)dV =$
Vfx,y,zdxdydz=Ddxdyz=φ1(x,y)z=φ2(x,y)fx,y,zdz ,

где $D -$ проекция области V на плоскость XOY ; функции $z = \varphi_1(x,y)$ и $z = \varphi_2(x,y) -$ уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область V. Переменные x, y, z можно менять местами в формуле вычисления тройного интеграла, т.е. проекция области V может быть найдена на плоскость XOZ или YOZ.

Пример. Вычислить интеграл$\iiint_V \ x^3 y \cdot sh(xyz)dV$, где область $V: x = 1, y = x, y = 2x, z = 0, z = 1.$

Область V по оси OZ ограничена плоскостями $z = 0, z = 1$. Остальные уравнения определяют проекцию области V на плоскость XOY. Область D (рис. 15) дает пределы интегрирования для первых двух интегралов:

$$\iiint_V x^3 y \cdot sh(xyz)dxdydz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^1 x^3 y \cdot sh(xyz)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \left(\frac{x^3 y}{xy} \int_0^1 sh(xyz)d(xyz) \right) = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy (x^2 \cdot ch(xyz)|_0^1) =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy (x^2 (ch(xy) - ch(0)) = \int_0^1 dx \int_x^{2x} x^2 (ch(xy) - 1)dy =$$

$$=\int_0^1 dx\left(\int_x^{2x} x^2\cdot ch(xy)dy-\int_x^{2x} x^2dy\right)$$

$$=\int_0^1 dx\left(\int_x^{2x} \frac{x^2}{x} ch(xy)d(xy)-x^2\int_x^{2x} dy\right)=$$

$$=\int_0^1 dx(x\cdot sh(xy)|_x^{2x}-x^2y|_x^{2x})=\int_0^1 (x\cdot sh(2x^2)-x\cdot sh(x^2)-x^3)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 sh(2x^2)d(2x^2)-\frac{1}{2}\int_0^1 sh(x^2)d(x^2)-\frac{x^4}{4}|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}ch(2x^2)|_0^1-\frac{1}{2}ch(x^2)|_0^1-\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}ch2-\frac{1}{4}ch0-\frac{1}{2}ch1+\frac{1}{2}ch0-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}ch2-\frac{1}{2}ch1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}ch2-\frac{1}{2}ch1$$

.

$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ ch0=\frac{e^0+e^0}{2}=1.$

Практическое занятие.

1. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^2 dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz$

в) $\int_0^1 dx\int_0^{2x} dy\int_0^{\sqrt{xy}} x^3y^2zdz$

б) $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^3z\,dz$

2. Вычислить тройной интеграл (выбрать подходящий порядок интегрирования): $\iiint_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz; V: z\in[0;1]\quad x\in[-1;0]\quad y\in[0;2]$

3.Вычислить тройные интегралы:

$\iiint_D (x+y+z)dxdydz,\qquad D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$

$\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz,\qquad D$: ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$

$$\iiint\limits_D xyzdxdydz, \qquad D\text{: ограничена координатными плоскостями и}$$

сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *и расположена в первой октанте.*

Самостоятельная работа

1. Вычислить тройные интегралы:

$$\iiint\limits_D xyzdxdydz, \qquad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$$

$$\iiint\limits_D x(1-y)zdxdydz, \qquad D: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$$

$$\iiint\limits_D x^2y^2zdxdydz, \qquad D: x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 0, z = 5$$

$$\iiint\limits_D xdxdydz, \qquad D: z = 0, z = 3, x^2 + y^2 = 1$$

2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T (5x + 5y - 6z)dxdydz$, T есть тело, ограниченное гиперболическим параболоидом $z = xy$, плоскостями $z = 0$, $x = 0$, $y = 1$, $y = x$.

5.3. Приложения двойных и тройных интегралов.

5.3.1. Вычисление площади фигуры.

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле:

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

Пример. Найти площадь фигуры D, ограниченной функциями $D: x^2 + y^2 = 12, x\sqrt{6} = y^2, (x \geq 0)$.

Построим эти линии (рис. 16). Фигура D представляет собой заштрихованную область.

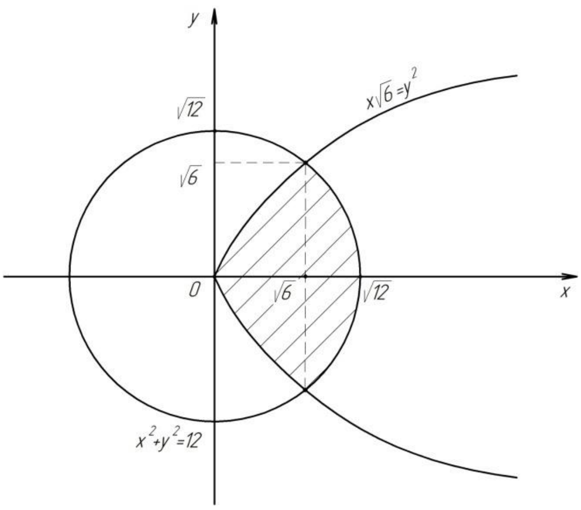


Рис. 16

Она симметрична относительно оси OX . Найдем точки пересечения этих линий, т.е. решим систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=12 \\ x\sqrt{6}=y^2 \end{cases}$.

$x=\frac{y^2}{\sqrt{6}}$, $\left(\frac{y^2}{\sqrt{6}}\right)^2+y^2=12$.

$\frac{y^4}{6}+y^2=12$, $y^4+6y^2-72=0$.

Решаем биквадратное уравнение, положив $y^2=t. t_1=-12, t_2=6$.

Следовательно, $y^2=6, y=\pm\sqrt{6}, x=\sqrt{6}$.

Расставим пределы интегрирования для верхней симметричной части.

Удобнее внешний интеграл взять по переменной y, а внутренний по переменной x.

$$S=\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt{6}}dy\int\limits_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}}dx=2\int\limits_0^{\sqrt{6}}dy\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{6}}\right)=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt{6}}\sqrt{12-y^2}\,dy\left|\begin{array}{c} y=\sqrt{12}\cos t \\ dy=-\sqrt{12}\sin tdt \\ 0=\sqrt{12}\cos t_1, t_1=\dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{6}=\sqrt{12}\cos t_2, t_2=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right|-2\int\limits_0^{\sqrt{6}}\frac{y^2}{\sqrt{6}}dy=$$

$$2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{12-12cos^2t}\left(-\sqrt{12}\sin tdt\right)-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{y^3}{3}|_0^{\sqrt{6}}$$

$$=-24\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}sin^2tdt-\frac{2}{3\sqrt{6}}\cdot 6\sqrt{6}=$$

$$=-24\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-4=-12\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}-4=$$

$=-12\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi\right)-4\right)=-12\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-4=3\pi+6-4=2+3\pi$.

5.3.2. Масса плоской пластинки.

Если пластинка занимает область D плоскости XOY и имеет поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то масса М пластинки выражается двойным интегралом:

$$M = \iint_D \gamma(x, y)dxdy .$$

Пример. Найти массу пластинки, занимающую область D, и имеющую поверхностную плотность $\gamma = 16x + \frac{9y^2}{2}$.

Область D определяется уравнениями: $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$, $y^2 = 16x$ $(y \geq 0)$.

Построим указанную область (рис. 17). Область D представляет собой заштрихованную часть, $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, $0 \leq y \leq 4\sqrt{x}$.

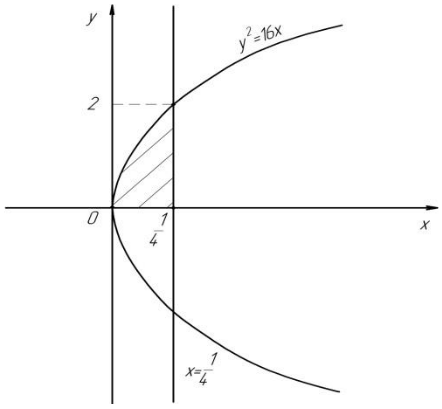


Рис. 17.

$$M = \iint_D (16x + \frac{9y^2}{2})dxdy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_0^{4\sqrt{x}} \left(16x + \frac{9y^2}{2}\right) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \left(\int_0^{4\sqrt{x}} 16xdy + \int_0^{4\sqrt{x}} \frac{9y^2}{2} dy \right) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \left(16xy|_0^{4\sqrt{x}} + \frac{9}{2} \cdot \frac{y^3}{3} |_0^{4\sqrt{x}} \right) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(16x \cdot 4\sqrt{x} + \frac{3}{2} \cdot \left(4\sqrt{x}\right)^3 \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(64x\sqrt{x} + 6x\sqrt{x} \right) dx = 70 \int_0^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= 70 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} |_0^{\frac{1}{4}} = 28 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{28}{2^5} = \frac{7}{8}.$$

5.3.3. Вычисление объёма тела.

Объём вертикального цилиндрического тела (с образующими, параллельными оси OZ), проекция которого на плоскость XOY представляет область D, и ограниченного снизу плоскостью $z = 0$, а сверху поверхностью $z = f(x, y)$(рис.18), выражается двойным интегралом

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy .$$

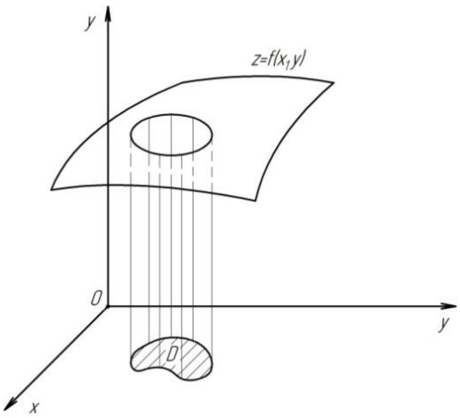


Рис. 18.

Вычисление объёмов тел более сложной формы сводится к вычислению алгебраической суммы объёмов нескольких вертикальных цилиндрических тел.

Пример. Найти объём тела, ограниченного поверхностями:

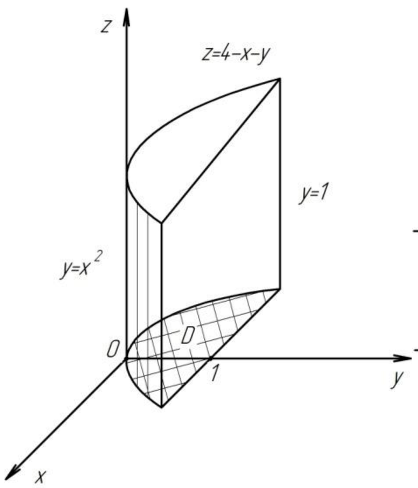
$V: y = x^2 , y = 1 , z = 0 , x + y + z = 4.$

Цилиндрическая поверхность в пространстве, $y = x^2$ образована параболой и в пересечении с плоскостью XOY дает линию параболы. Плоскость $y = 1$ параллельна плоскости XOZ , и в плоскости $z = 0$ дает прямую $y = 1$ (рис. 19). Тело V ограничено снизу плоскостью $z = 0$, а сверху плоскостью $z = 4 - x - y$ (рис.20).

$$V = \iint\limits_D (4 - x - y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (4 - x - y)dy = \int\limits_{-1}^{1} dx\left(4y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{1}$$

$$=$$

$$\int\limits_{-1}^{1} dx\left(4 - x - \frac{1}{2} - \left(4x^2 - x^3 - \frac{(x^2)^2}{2}\right)\right) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{7}{2} - x - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\right)dx =$$



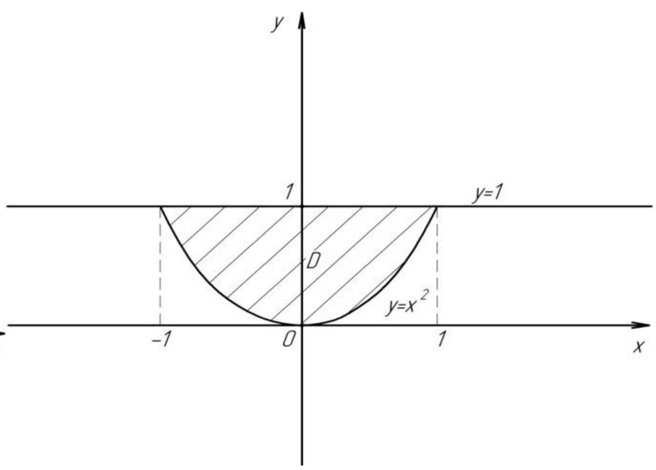


Рис.19. Рис.20.

$$=\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right)-\left(-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)=$$
$$=7-\frac{8}{3}+\frac{2}{10}=\frac{68}{15}.$$

Пример. Найти объём тела, ограниченного поверхностями
$x^2+y^2+2x=0, z=\frac{25}{4}-y^2, z=0.$

Цилиндрическая поверхность образована окружностью $x^2+y^2+2x=0$.Снизу тело ограничено плоскостью $z=0$, сверху поверхностью $z=\frac{25}{4}-y^2$. Следовательно, объём тела Vопределяется интегралом

$V=\iint_D \left(\frac{25}{4}-y^2\right)dxdy$.

Так как область D представляет окружность, перейдём к полярным координатам.

$x^2+y^2+2x=0$
$(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2+2r\cos\varphi=0$
$r^2(cos^2\varphi+sin^2\varphi)+2r\cos\varphi=0$
$r^2=-2r\cos\varphi$
$r=-2\cos\varphi.$

Окружность $x^2+y^2+2x=0$ смещена по оси OX на (-1), и радиус тоже равен 1. Следовательно, окружность лежит во IIи IIIчетверти. Угол φ изменяется в пределах $\frac{\pi}{2}\le\varphi<\frac{3\pi}{2}$, а радиус изменяется $0\le r\le -2\cos\varphi$. Перейдём к полярным координатам в формуле объёма:

$$V=\iint\limits_D\left(\frac{25}{4}-y^2\right)dxdy=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{-2\cos\varphi}\left(\frac{25}{4}-r^2cos^2\varphi\right)rdr=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{25}{4}\int\limits_{0}^{-2\cos\varphi}rdr-cos^2\varphi\int\limits_{0}^{-2\cos\varphi}r^3dr\right)=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{25}{4}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{-2\cos\varphi}-cos^2\varphi\frac{r^4}{4}\Big|_0^{-2\cos\varphi}\right)=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi\left(\frac{25}{4}\cdot\frac{4cos^2\varphi}{2}-cos^2\varphi\frac{16cos^4\varphi}{4}\right)=\frac{25}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}cos^2\varphi d\varphi-4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}cos^6\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{25}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^3 d\varphi=\frac{25}{4}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-$$

$$-\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+3\cos 2\varphi+3cos^2 2\varphi+cos^3 2\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{25}{4}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 3\pi-(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi)\right)-$$

$$-\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\varphi-\frac{3}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos 2\varphi d\varphi-\frac{3}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}cos^2 2\varphi d\varphi-\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}cos^3 2\varphi d\varphi$$

$$=\frac{25}{4}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{8}\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{3}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi$$

$$-\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-sin^2 2\varphi)\cos 2\,\varphi d\varphi=\frac{25\pi}{4}-$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3}{16}(\sin 3\pi-\sin\pi)-\frac{3}{16}\left(\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos 2\varphi\, d\varphi+$$

$$+\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}sin^2 2\varphi\cos 2\varphi\, d\varphi=\frac{25\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{3}{16}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 6\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+$$

$$+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\frac{sin^3 2\varphi}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{49\pi}{8}-\frac{3\pi}{16}-\frac{1}{16}(\sin 3\pi-\sin\pi)+\frac{1}{48}(sin^3 3\pi-sin^3\pi)=\frac{95\pi}{16}.$$

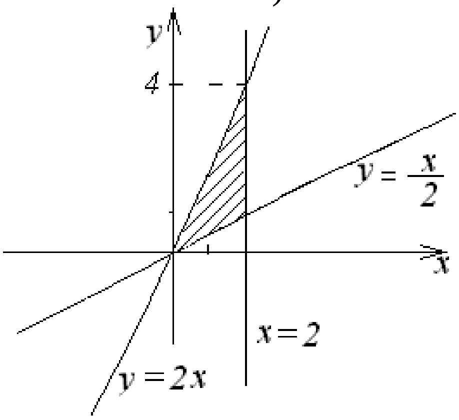
Практическое занятие.

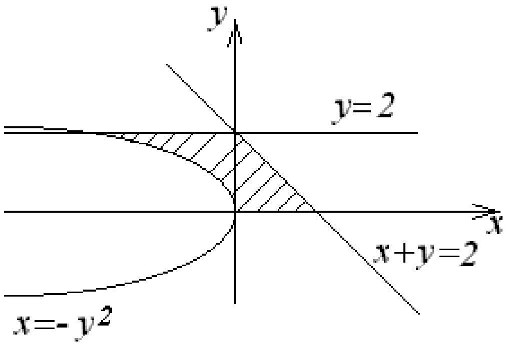
1. .Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $xy=4,\ x+y=5$ б) $y=x^2,\ y=x+6,\ x\geq 1$

2. Найти площадь фигуры:

а) б)





3. Найти объём тела, ограниченного плоскостями:

а) $x = 4, y = 4$,параболоидом вращения $z = x + y + 1$и координатными плоскостями.

б) параболоидом вращения $z = x + y$,координатными плоскостями и плоскостью $x + y = 1$.

в)цилиндрами $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ иплоскостями $x + z = 6, z = 0$

г) координатными плоскостями , плоскостью $2x + 3y - 12 = 0$ и цилиндром$z = 0,5y$.

4. Найти объём тела, ограниченного цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $z= 3 - y$, $y= 1$, $z= 0$.

5. Найти объём тела, ограниченного двумя цилиндрами $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \frac{9}{4} - x^2$ и плоскостью $z = 0$

Самостоятельная работа

1. Найти площадь фигуры:

$S: y^2 = 4x, x + y = 3, y \geq 0;$ $D: y^2 = 10x + 25, y^2 = -6x + 9.$

2. Переходя к полярным координатам, найти площадь фигуры, ограниченной линиями:$x^2 + y^2 = 2, y = x, y = 0.$

3. Найти объем тела:

1) $V: z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x = 0, y = 0,$ $z = 0;$

2) $V: z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$

Типовой расчет по теме «Интегральное исчисление».

Вариант № 1.

Вычислить неопределенные интегралы:

1.1 $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$;

1.2 $\int \frac{x-1}{7x^2+4}dx$;

1.3 $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.4 $\int \frac{\sin\ 2x}{1+3\cos\ 2x}dx$;

1.5 $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln(2x+1)}}$;

1.6 $\int (x+1)e^{2x}dx$;

1.7 $\int \sqrt{1-x}\cdot arccos\sqrt{x}dx$;

1.8 $\int \frac{1-2x-x^3}{1+x^2}dx$;

1.9 $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$;

1.10 $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$;

1.11 $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$

1.12 $\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$;

1.13 $\int sin^2\ 3xdx$;

1.14 $\int (1+tgx)^2\ dx$;

1.15 $\int \frac{dx}{5+2\sin\ x+3\cos\ x}$

1.16 $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+2}}$;

1.17 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx$;

1.18 $\int \sqrt{256-x^2}\ dx$

.

Вычислить определенные интегралы:

1.19 $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\ dx$;

1.20 $\int_2^3 y\cdot\ln(y-1)dy$;

1.21 $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 sin^8 xdx$;

1.22 $\int_{\pi/4}^{arctg\ 3} \frac{dx}{(3tgx+5)\sin\ 2x}$.

1.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1};\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-2x}}$$

1.24. Вычислить площадь фигуры:	1.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=(x-2)^3, y=4x-8$;	а) $y=\ln x, \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$;
б) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}cos^3 t \\ y=2\sqrt{2}sin^3 t \end{cases}, x=2, (x\ge 2)$.	б) $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}, 0\le t\le\pi$;
в) $r=4\cos 3\varphi, r=2\ (r\ge 2)$.	в) $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

1.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho=1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,5 м, верхнее 6,6 м, высота 3,0 м.

1.27 $\iint (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

1.28 $\iint ye^{\frac{xy}{2}}dxdy; D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4$.

1.29 $\iiint x^2 z\sin(xyz)dxdydz; V: x=2, x=0, y=\pi, y=0, z=0, z=1$.

1.30. Найти площадь фигуры: $y=\frac{3}{x}, y=4e^x, y=3, y=4$.

1.31. Найти массу пластины D. (μ —поверхностная плотность).

$D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0)$; $\mu = 7x^2 + y$.

1.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2$.

б) $x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{5}{4} - x^2, z = 0$.

Вариант № 2.

Вычислить неопределенные интегралы:

2.1 $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx$;

2.2 $\int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$;

2.3 $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

2.4 $\int \frac{3x^3}{1-x^4} dx$;

2.5 $\int \frac{\sqrt[3]{ln^2(1-x)}dx}{(x-1)}$;

2.6 $\int (x-2))e^{3x} dx$;

2.7 $\int \sqrt{1-x} \cdot arcsin\sqrt{x}dx$;

2.8 $\int \frac{7-x^2}{1-x} dx$;

2.9 $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$;

2.10 $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx$;

2.11 $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3} dx$;

2.12 $\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$;

2.13 $\int sin^4 5xdx$;

2.14 $\int ctg^3 2x\, dx$;

2.15 $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$;

2.16 $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$;

2.17 $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$;

2.18 $\int x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

.

Вычислить определенные интегралы:

2.19 $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6+1}} dx$;

2.20 $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-x/2} dx$;

2.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^6 x cos^2 x dx$;

2.22 $\int_{arccos\frac{4}{\sqrt{17}}}^{\pi/4} \frac{2ctgx+1}{(2sinx+cosx)^2} dx$.

2.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_1^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1};\qquad \int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$$

2.24. Вычислить площадь фигуры:	2.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0\ (0 \leq x \leq 3)$. б) $\begin{cases} x = \sqrt{2}cost \\ y = 2\sqrt{2}sint \end{cases}, y = 2\ (y \geq 2)$; в) $r = \cos 2\varphi$.	а) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$ б) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$; в) $r = 3e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

2.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\, ^{кг}/_{м^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,8 м, верхнее 7,2 м, высота 3,0 м.

2.27 $\iint (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}.$

2.28 $\iint y^2 \sin\frac{xy}{2}\, dxdy; D: y = \sqrt{\pi}, y = \frac{x}{2}, x = 0.$

2.29 $\iiint 2y^2 e^{xy}\, dxdydz; V: x = 0, y = x, y = 1, z = 0, z = 1.$

2.30. Найти площадь фигуры:$x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$

2.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0);\ \mu = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$

2.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}.$

б) $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x, z = x^2 + y^2 - 64, z = 0\ (z \geq 0).$

Вариант № 3.

Вычислить неопределенные интегралы:

3.1 $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx;$

3.2 $\int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx;$

1.3 $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}} dx;$

3.4 $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x} dx;$

3.5 $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{ln^2(1-x)}};$

3.6 $\int (x-7)\cos 2x\, dx;$

3.7 $\int x\, arctg 2x dx;$

3.8 $\int \frac{x^3+2}{x^2-1} dx;$

3.9 $\int \frac{dx}{2x^2-7x+1};$

3.10 $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx;$

3.11 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3} dx$

3.12 $\int \frac{x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)} dx;$

3.13 $\int \left(1-\sin\frac{x}{3}\right)^2 dx;$

3.14 $\int tg^4 3x\, dx;$

3.15 $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1+\cos x} dx;$

3.16 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-3}} dx;$

3.17 $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx;$

3.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

3.19 $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx;$

3.20 $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx;$

3.21 $\int_0^{2\pi} sin^4 x \cdot cos^4 x dx;$

3.22 $\int_0^{arccos\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{3+2tgx}{2sin^2x+3cos^2x-1} dx.$

3.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}};$$

$$\int_0^1 \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}$$

3.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$; б) $\begin{cases} x = 4(t - sint) \\ y = 4(1 - cost) \end{cases}, y \geq 4(0 < x < 8\pi)$; в) $r = \sqrt{3}\cos\varphi, r = sin\varphi \ \Big(0 \leq \varphi \leq \pi 2$.	3.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y = \sqrt{1 - x^2} + arcsinx, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$. б) $\begin{cases} x = 4(cost + t\sin t) \\ y = 4(sint - t\cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2$; в) $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

3.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000 \,{}^{\text{кг}}\!/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,1 м, верхнее – 7,8 м, высота 3,0 м.

3.27 $\iint (36x^2y^2 + 96x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.

3.28 $\iint y\cos(xy)\,dxdy; D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = 1, x = 2$.

3.29 $\iiint y^2 \operatorname{ch}(2xy)dxdydz; V: x = 0, y = -2, y = 4x, z = 0, z = 2$.

3.30. Найти площадь фигуры:$x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2\ (y \leq 0)$.

3.31. Найти массу пластины $D(\mu$ –поверхностная плотность).

$D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x(y \geq 0);\ \mu = \frac{7x^2}{2} + 5y$.

3.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а)$x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, z = 15x$.

б) $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x, z = x^2 + y^2 - 64, z = 0(z \geq 0)$.

Вариант № 4.

Вычислить неопределенные интегралы:

4.1 $\int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

4.2 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$;

4.3 $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx$;

4.4 $\int \frac{e^x}{2e^x+3}dx$;

4.5 $\int \frac{dx}{2x\cdot\ln x}$;

4.6 $\int (x-1)\cos 5x\,dx$;

4.7 $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{x+1}}dx$;

4.8 $\int \frac{8x^3-1}{1+2x}dx$;

4.9 $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$;

4.10 $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$;

4.11 $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx$;

4.12 $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$;

4.13 $\int cos^2 5xdx$;

4.14 $\int tg^3 7x\,dx$;

4.15 $\int \frac{dx}{5+3\cos x - 5\sin x}$;

4.16 $\int \frac{x}{2+\sqrt{x+4}}dx$;

4.17 $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$;

4.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

4.19 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot cos^2 x\,dx$;

4.20 $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, x$;

4.21 $\int_0^{2\pi} sin^2\frac{x}{4}\cdot cos^6\frac{x}{4}dx$;

4.22 $\int_{\pi/4}^{arctg\,3}\frac{4tgx-5}{1-sin\,2x+4cos^2x}dx$.

4.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}};\qquad \int_1^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{3-x}}$$

4.24. Вычислить площадь фигуры:	4.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y = sinx\cdot cos^2x\,, y = 0\ (0\le x\le\frac{\pi}{2})$;	а) $y=\ln\frac{5}{2x}\,,\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;
б) $\begin{cases}x=16cos^3t\\ y=2sin^3t\end{cases}, x=2(x\ge 2)$;	б) $\begin{cases}x=(t^2-2)sint-2tcost\\ y=(2-t^2)\cos t+2tsint\end{cases}, 0\le t\le\pi$;
в) $r=4sin3\varphi, r=2(r\ge 2)$.	в) $r=5e^{\frac{5\varphi}{12}}, -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

4.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/{}_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/{}_{\text{с}^2}$.Давление на глубине x равно ρgx .Нижнее основание трапеции равно 5,4 м, верхнее 8,4 м , высота 3,0 м.

4.27 $\iint(18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^3\,, y=-\sqrt[3]{x}$.

4.28 $\iint y^2e^{\frac{-xy}{4}}dxdy; D: y=2, y=x, x=0$.

4.29 $\iiint x^2\,\mathrm{sh}(3xy)dxdydz; V: x=1, y=2x, y=0, z=0, z=36$.

4.30. Найти площадь фигуры:$x=8-y^2, x=-2y$.

4.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=16, x=0, y=0(x\ge 0, y\ge 0)$; $\mu=\frac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

4.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y=\sqrt{x}, x+y=2, z=0, z=12y$.

б) $x^2+y^2+4x=0, z=8-y^2, z=0$.

Вариант № 5.

Вычислить неопределенные интегралы:

5.1 $\int \frac{\sqrt[5]{x}-2x+5}{x^2}dx$;

5.2 $\int \frac{3x-2}{2x^2+7}dx$;

5.3 $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx$;

5.4$\int \frac{\sin\ 2x}{cos^2 x-4}dx$;

5.5 $\int \frac{ln^3(1-x)dx}{(1-x)}$;

5.6 $\int (x+2)\cos 3x\,dx$;

5.7 $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x}}dx$;

5.8 $\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx$;

5.9 $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$;

5.10 $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$;

5.11 $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx$;

5.12 $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$;

5.13 $\int cos^3\, 2xdx$;

5.14 $\int tg^5 x\,dx$;

5.15 $\int \frac{dx}{10\sin\ x+5\cos\ x}$;

5.16 $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx$;

5.17 $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$;

5.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

5.19 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\ x}{1+\cos\ x}dx$;

5.20 $\int_{-0,5}^{0,5} arccos2xdx$;

5.21 $\int_0^{\pi} 2^4 cos^8\frac{x}{2}dx$;

5.22 $\int_0^{arctg\,\frac{1}{3}} \frac{(8+tgx\,)}{18sin^2x+2cos^2x}dx$.

5.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}};\qquad \int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\,dx$$

5.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y=\sqrt{4-x^2}, y=0, x=0, x=1$; б) $\begin{cases}x=2cost\\ y=6sint\end{cases}, y=3 (y\geq 3)$; в) $r=2\cos\varphi, r=2\sqrt{3}\,sin\varphi, \Big(0\leq\varphi\leq \pi 2.$	5.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y=-\ln(\cos x)\,, 0\leq x\leq\frac{\pi}{6}$; б) $\begin{cases}x=10cos^3t\\ y=10sin^3t\end{cases}, 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$; в) $r=6e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

5.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,7 м, верхнее – 9,0 м, высота 4,0 м.

5.27 $\iint (27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

5.28 $\iint y\sin(xy)\,dxdy; D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2$.

5.29 $\iiint 8y^2ze^{2xyz}\,dxdydz; V\colon x=-1, x=0, y=2, y=0, z=0, z=1.$

5.30. Найти площадь фигуры:$y=\frac{3}{x}, y=8e^x, y=3, y=8$.

5.31. Найти массу пластины D(μ —поверхностная плотность).

$D\colon x=2, y=0, y^2=2x (y\geq 0);\ \mu=\frac{7x^2}{8}+2y.$

5.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x=20\sqrt{2y}, x=\sqrt{2y}, z=0, y+z=\frac{1}{2}.$

б) $x^2+y^2=6x, x^2+y^2=9x, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, y=0 (y\geq 0).$

Вариант № 6.

Вычислить неопределенные интегралы:

6.1 $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx;$

6.2 $\int \frac{5-x}{3x^2+1}dx;$

6.3 $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

6.4 $\int \frac{2e^x}{4-3e^x}dx;$

6.5 $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}dx}{(2x-1)};$

6.6 $\int (x-2)\cos 4x\,dx;$

6.7 $\int \frac{arcsin\,\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx;$

6.8 $\int \frac{2x^4-3}{1+x^2}dx;$

6.9 $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1};$

6.10 $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx;$

6.11 $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx$

6.12 $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx;$

6.13 $\int (3-\sin 2x)^3\,dx;$

6.14 $\int (3+tgx)^2\,dx;$

6.15 $\int \frac{dx}{3-\sin\,x+2\cos\,x};$

6.16 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}dx;$

6.17 $\int \frac{\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}+1}dx;$

6.18 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

Вычислить определенные интегралы:

6.19 $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1};$

6.20 $\int_1^2 (y-1)\cdot \ln y dy;$

6.21 $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 sin^8 x dx;$

6.22 $\int_0^{arccos\,\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{tgx+2}{sin^2x+2cos^2x-3}dx.$

6.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}};\qquad \int_0^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{3-x}}$$

6.24. Вычислить площадь фигуры:	6.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=x^2\sqrt{4-x^2}, y=0\ (0\leq x\leq 2);$ б) $\begin{cases} x=2(t-sint) \\ y=2(1-cost) \end{cases}, y\geq 3 (0<x<4\pi);$	а) $y=e^x+6\ , ln\sqrt{8}\leq x\leq ln\sqrt{15};$ б) $\begin{cases} x=e^t(cost+sint) \\ y=e^t(\cos t-sint) \end{cases}, 0\leq t\leq \pi;$ в) $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0\leq \varphi\leq \frac{\pi}{3}.$

в) $r = sin3\varphi$.	

6.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,0 м, верхнее 9,6 м, высота 4,0 м.

6.27 $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$

6.28 $\iint y^2 \cos\frac{xy}{2} dxdy; D: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = \frac{x}{2}, x = 0.$

6.29 $\iiint y^2 e^{-xy}\, dxdydz; V: x = 0, y = -2, y = 4x, z = 0, z = 1.$

6.30. Найти площадь фигуры: $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$, $y = \frac{1}{2x}$, $x = 16$.

6.31. Найти массу пластины D (μ —поверхностная плотность).

$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0)$; $\mu = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

6.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x = \frac{5\sqrt{y}}{2}, x = \frac{5y}{6}, z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$.

б) $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, z = x^2 + y^2 - 36, z = 0 (z \geq 0)$.

Вариант № 7.

Вычислить неопределенные интегралы:

7.1 $\int \frac{2\sqrt[4]{x}+3x-2}{x} dx$;

7.2 $\int \frac{x+5}{3x^2+1} dx$;

7.3 $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx$;

7.4 $\int \frac{x^2}{7-5x^3} dx$;

7.5 $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}dx}{(3x+1)}$;

7.6 $\int (x-4)\sin 2x\, dx$;

7.7 $\int \frac{x \cdot arctgx}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

7.8 $\int \frac{x^3-1}{2x+1} dx$;

7.9 $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$;

7.10 $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$;

7.11 $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3} dx$

7.12 $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)} dx$;

7.13 $\int sin^2 \frac{3x}{2} dx$;

7.14 $\int ctg^4 5x\, dx$;

7.15 $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

7.16 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$;

7.17 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}} dx$;

7.18 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

7.19 $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} dx$;

7.20 $\int_{-0,5}^{0} xe^{-2x} dx$;

7.21 $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 sin^6 x \cdot cos^2 x dx$;

7.22 $\int_{arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}}^{\pi/4} \frac{6tgxdx}{3sin 2x+5cos^2 x}$.

7.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}};$$ $$\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{2-x}}$$

7.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y = cosx \cdot sin^2x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$; б) $\begin{cases} x = 16cos^3t \\ y = sin^3t \end{cases}, x = 6\sqrt{3}$ $(x \ge 6\sqrt{3})$; в) $r = 6sin3\varphi, r = 3 (r \ge 3)$.	7.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y = 2 + arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \frac{1}{4} \le x \le 1$; б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \pi \le t \le 2\pi$; в) $r = 3e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

7.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/{}_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/{}_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно – 6,3 м, верхнее – 10,2 м, высота –4,0 м.

7.27 $\iint (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy; D\colon x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$

7.28 $\iint 4ye^{2xy}\,dxdy; D\colon y = \ln 3, y = \ln 4, x = 0{,}5, x = 1.$

7.29 $\iiint y^2z\cos(xyz)dxdydz; V\colon x = 1, x = 0, y = \pi, y = 0, z = 0, z = 2.$

7.30. Найти площадь фигуры: $x = 5 - y^2, x = -4y$.

7.31. Найти массу пластины D (μ –поверхностная плотность).

$D\colon x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2} (y \ge 0);\ \mu = \frac{7}{2}x^2 + 6y.$

7.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а)$x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x = 0, z = 0, z = 30y.$

б) $x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{9}{4} - x^2, z = 0.$

Вариант №8.

Вычислить неопределенные интегралы:

8.1 $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}}dx;$

8.2 $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}dx;$

8.3 $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx;$

8.4 $\int \frac{\sin\ 2x}{3sin^2x+4}dx;$

8.5 $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)};$

8.6 $\int (x-3)\cos x\,dx;$

8.7 $\int \frac{x\cdot arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

8.8 $\int \frac{x^5}{1-x^3}dx;$

8.9 $\int \frac{dx}{2x^2+x+2};$

8.10 $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx;$

8.11 $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$

8.12 $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx;$

8.13 $\int (\cos x + 3)^2\,dx;$

8.14 $\int tg^3\frac{x}{2}dx;$

8.15 $\int \frac{dx}{8-4\sin\ x+7\cos\ x};$

8.16 $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}dx;$

8.17 $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx;$

8.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

8.19 $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}}dx$;

8.20 $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x dx$;

8.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^4 x\cdot cos^4 x dx$;

8.22 $\int_0^{\pi/4} \frac{2tg^2x-11tgx-22}{4-tgx}dx$.

8.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_4^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x-4}};$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{\ln(2-3x)\,dx}{2-3x}$$

8.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y=\sqrt{e^x-1}, y=0, x=\ln 2$; б) $\begin{cases}x=6cost\\ y=2sint\end{cases}, y=\sqrt{3}\ (y\geq 3)$; в) $r=\cos 3\varphi$.	8.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y=\ln(x^2-1)\ , 2\leq x\leq 3$ б) $\begin{cases}x=\frac{1}{2}cost-\frac{1}{4}\cos 2t\\ y=\frac{1}{2}sint-\frac{1}{4}sin2t\end{cases}, \frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{2\pi}{3}$; в) $r=\sqrt{2}e^{\varphi}\ , 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$.

8.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho=1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,6 м, верхнее 10,8 м, высота 4,0 м.

8.27 $\iint(27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=-x^3\ , y=\sqrt{x}$.

8.28 $\iint 4y^2\sin(xy)\,dxdy; D: y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x, x=0$.

8.29 $\iiint 2y^2ze^{xyz}\ dxdydz; V: x=1, x=0, y=1, y=0, z=0, z=1$.

8.30. Найти площадь фигуры: $y=\sqrt{12-x^2}\ , y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2}, x=0, (x\geq 0)$.

8.31. Найти массу пластины $D(\mu\ -$ поверхностная плотность).

$D: x^2+y^2=4, x=0, y=0, x^2+y^2=25 (x\geq 0, y\leq 0)$; $\mu=\frac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

8.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x+y=2, x=\sqrt{y}, z=0, z=\frac{12x}{5}$.

б) $x^2+y^2=2y, x^2+y^2=5y, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0$.

Вариант № 9.

Вычислить неопределенные интегралы:

9.1 $\int\frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$;

9.2 $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$;

9.3 $\int\frac{1-5x}{1+25x^2}dx$;

9.4 $\int\frac{e^{2x}}{6+e^{2x}}dx$;

9.5 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$;
9.6 $\int (3x+4)\sin 2x\, dx$;
9.7 $\int x \cdot arctgx\, dx$;
9.8 $\int \frac{x^3}{x^2+3} dx$;
9.9 $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$;
9.10 $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$;
9.11 $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3} dx$
9.12 $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)} dx$;
9.13 $\int cos^3 3xdx$;
9.14 $\int tg^4 \frac{x}{2} dx$;
9.15 $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$;
9.16 $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$;
9.17 $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}} dx$;
9.18 $\int \frac{x^4dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Вычислить определенные интегралы:
9.19 $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$;
9.20 $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$;
9.21 $\int_0^{2\pi} sin^2x \cdot cos^6xdx$;
9.22 $\int_{-arctg\frac{1}{3}}^{0} \frac{3tgx+1}{2in2x-5cos2x+1} dx$.

9.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5};$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$$

9.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$,$y = 0, x = 1, x = e^3$; б) $\begin{cases} x = 3(t - sint) \\ y = 3(1 - cost) \end{cases}$, $y \geq 3 (0 < x < 6\pi)$; в) $r = \cos\varphi, r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.	9.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y = \sqrt{1-x^2} + arccosx$,$0 \leq x \leq 89$; б) $\begin{cases} x = 3(cost - t\sin t) \\ y = 3(sint - t\cos t) \end{cases}$,$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$; в) $r = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}$,$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

9.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000 \,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10 \,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно6,9м, верхнее 11,4м, высота 5,0м.

9.25 $\iint (3x^2y^2 + 4xy)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

9.26 $\iint y\cos(2xy)\,dxdy; D: y = \frac{\pi}{2}, y = \pi, x = \frac{1}{2}, x = 1.$

9.27 $\iiint x^2z\,\mathrm{sh}(xyz)dxdydz; V: x = 2, x = 0, y = 1, y = 0, z = 0, z = 1.$

9.28. Найти площадь фигуры: $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 (y \leq 0)$.

9.29. Найти массу пластины D (μ −поверхностная плотность).

$D: x=1, y=0, y^2=4x(y\geq 0);\ \mu=3y^2+x.$

9.30. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y=17\sqrt{2x}, y=2\sqrt{2x}, z=0, x+z=\frac{1}{2}.$

б) $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0, z=x^2+y^2-4, z=0(z\geq 0).$

Вариант № 10.

Вычислить неопределенные интегралы:

10.1 $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx;$

10.2 $\int\frac{3x-2}{3x^2+1}dx;$

10.3 $\int\frac{1+x}{\sqrt{3-x^2}}dx;$

10.4 $\int\frac{4x^3}{7+2x^4}dx;$

10.5 $\int\frac{\sqrt[3]{ln^2(x+1)}dx}{(x+1)};$

10.6 $\int(2x+1)\sin 3x\,dx;$

10.7 $\int x\cdot arcctgx\,dx;$

10.8 $\int\frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx;$

10.9 $\int\frac{dx}{2x^2+3x};$

10.10 $\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx;$

10.11 $\int\frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx$

10.12 $\int\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx;$

10.13 $\int sin^3\frac{4x}{5}dx;$

10.14 $\int tg^2 4x\,dx;$

10.15 $\int\frac{dx}{3+2\sin x+3\cos x};$

10.16 $\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}};$

10.17 $\int\frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx;$

10.18 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

Вычислить определенные интегралы:

10.19 $\int_0^1\frac{x^3}{x^8+1}dx;$

10.20 $\int_1^e\frac{ln^2x}{x^2}dx;$

10.21 $\int_0^{2\pi}cos^8\frac{x}{4}dx;$

10.22 $\int_{\pi/4}^{arctg\,3}\frac{1+ctgx}{(sinx+2cosx)^2}dx.$

10.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1};\qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[3]{1-\sin 3x}}$$

10.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y=arccosx, y=0, x=0;$ б) $\begin{cases}x=8\sqrt{2}cos^3t\\ y=\sqrt{2}sin^3t\end{cases}, x=4(x\geq 4);$ в) $r=sin\varphi, r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right),$ $\left(0\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4}\right).$	10.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y=\ln(1-x^2), 0\leq x\leq\frac{1}{4}$ б) $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2tcost\\ y=(2-t^2)\cos t+2tsint\end{cases}, 0\leq t\leq\frac{\pi}{3};$ в) $r=12e^{\frac{12\varphi}{5}}, 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}.$

10.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\, {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\, {}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 7.2 м, верхнее 12,0 м, высота 5,0 м.

10.27 $\iint (9x^2y^2 + 12xy)dxdy; D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}.$

10.28 $\iint y^2 e^{\frac{-xy}{8}} dxdy; D: y = 2, y = \frac{x}{2}, x = 0.$

10.29 $\iiint y^2 z\cos(xyz)dxdydz; V: x = 1, x = 0, y = \pi, y = 0, z = 0, z = 2.$

10.30. Найти площадь фигуры: $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 9$.

10.31. Найти массу пластины D(μ —поверхностная плотность).
$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0\ (x \geq 0, y \leq 0);\ \mu = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$

10.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}, y = \frac{5x}{9}, z = 0, z = \frac{5(3+\sqrt{x})}{9}.$

б) $x^2 + y^2 = 4x, z = 10 - y^2, z = 0.$

Вариант № 11.

Вычислить неопределенные интегралы:

11.1 $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-5x^2+3}{x}dx;$

11.2 $\int \frac{x-1}{5-2x^2}dx;$

11.3 $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx;$

11.4 $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17}dx;$

11.5 $\int \frac{tgxdx}{cos^2x};$

11.6 $\int (2x + 5)e^{5x}dx;$

11.7 $\int \frac{x\cdot arccos\, 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

11.8 $\int \frac{x^4}{x^2-3}dx;$

11.9 $\int \frac{dx}{x^2-5x+6};$

11.10 $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx;$

11.11 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx$

11.12 $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx;$

11.13 $\int (1 - \cos x)^2\, dx;$

11.14 $\int ctg^3\frac{x}{7}dx;$

11.15 $\int \frac{dx}{5+4\sin x};$

11.16 $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}}dx;$

11.17 $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx;$

11.18 $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx.$

Вычислить определенные интегралы:

11.19 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-cos^2x}dx;$

11.20 $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\, dx;$

11.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^8\frac{x}{2}dx;$

11.22 $\int_{\pi/4}^{arccos\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{tgx}{sin^2x-5cos^2x+4}dx.$

11.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{arctg2x}{\pi(4x^2+1)}dx;$$

$$\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$$

11.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y=(x+1)^2, y^2=x+1$; б) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}cost \\ y=3\sqrt{2}sint \end{cases}, y=3 (y\geq 3)$; в) $r=6\cos 3\varphi, r=3\ (r\geq 3)$.	11.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y=2+chx\ , 0\leq x\leq 1$; б) $\begin{cases} x=6cos^3t \\ y=6sin^3t \end{cases}, 0\leq t\leq \frac{\pi}{3}$; в) $r=1-sin\varphi\ , -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq-\frac{\pi}{6}$.

11.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,6 м, верхнее 6,7 м, высота 3,0 м.

11.27 $\iint(9x^2y^2+8xy)dxdy; D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$

11.28 $\iint 12y\sin(2xy)\,dxdy; D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=2, x=3$.

11.29 $\iiint y^2\, e^{\frac{xy}{2}} dxdydz; V: x=0, y=2, y=2x, z=0, z=-1$.

11.30. Найти площадь фигуры:$y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3}y=x^2, x=0 (x\geq 0)$.

11.31. Найти массу пластины $D (\mu$ −поверхностная плотность).

$D: x=1, y=0, y^2=x (y\geq 0);\ \mu=6y^2+3x$.

11.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x^2+y^2=8, y=\sqrt{2x}, y=0, z=0, z=\frac{15x}{11}$.

б) $x^2+y^2=7x, x^2+y^2=10x, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, y=0 (y\leq 0)$.

Вариант № 12.

Вычислить неопределенные интегралы:

12.1 $\int\frac{\sqrt{x^5}+x^2-1}{x^3}dx$;

12.2 $\int\frac{2x+3}{1-3x^2}dx$;

12.3 $\int\frac{5-3x}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

12.4 $\int\frac{7x^3}{2x^4-5}dx$;

12.5 $\int\frac{ctgxdx}{sin^2x}$;

12.6 $\int(x-5)\cos 2x\,dx$;

12.7 $\int arccos2x\,dx$;

12.8 $\int\frac{x^3+5x}{1+x^2}dx$;

12.9 $\int\frac{dx}{2x-3-4x^2}$;

12.10 $\int\frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx$;

12.11 $\int\frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}dx$;

12.12 $\int\frac{-3x^3+13x^2+13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx$;

12.13 $\int sin^2\,(2x-1)dx$;

12.14 $\int ctg^3 5x\,dx$;

12.15 $\int\frac{dx}{8+4\cos x}$;

12.16 $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

12.17 $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$;

12.18 $\int\frac{dx}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Вычислить определенные интегралы:

12.19 $\int_2^5\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$;

12.20 $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$;

12.21 $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 sin^6 x \cdot cos^2 x dx$;

12.21 $\int_0^{\pi/4} \frac{6sin^2 x}{3cos 2x-4} dx$.

12.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)};$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$$

12.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$; б) $\begin{cases} x = 6(t - sint) \\ y = 6(1 - cost) \end{cases}, y \geq 9 (0 < x < 12\pi)$; в) $r = \frac{1}{2} + sin\varphi$.	12.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y = 1 - \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$; б) $\begin{cases} x = e^t(cost + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - sint) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$; в) $r = 2(1 - cos\varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$.

12.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\ ^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,9 м, верхнее 7,3 м, высота 3,0 м.

12.27 $\iint (18x^2y^2 + 24xy)dxdy; D: x = 1, y = x^3 , y = -\sqrt[3]{x}$.

12.28 $\iint y^2 \cos(xy)\, dxdy; D: y = \sqrt{\pi}, y = x, x = 0$.

12.29 $\iiint 2x^2 z\, \text{sh}(xyz) dxdydz; V: x = 1, x = 0, y = -1, y = 0, z = 0, z = 1$.

12.30. Найти площадь фигуры:$y = \sin x , y = \cos x , x = 0 (x \geq 0)$.

12.31. Найти массу пластины D. (μ —поверхностная плотность).

$D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 25, x = 0, y = 0 (x \leq 0, y \geq 0)$; $\mu = \frac{2y-x}{x^2+y^2}$.

12.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 0, z = 3y$.

б) $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y, z = x^2 + y^2 - 64, z = 0 (z \geq 0)$.

Вариант № 13.

Вычислить неопределенные интегралы:

13.1 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}-3x}{\sqrt{x}} dx$;

13.2 $\int \frac{2x+3}{5x^2+3} dx$;

13.3 $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$;

13.4 $\int \frac{\sin\ 3x}{2+3\cos\ 3x} dx$;

13.5 $\int \frac{ln^3(2x+1)dx}{(2x+1)}$;

13.6 $\int (x+9)e^{3x} dx$;

13.7 $\int arctgx\, dx$;

13.8 $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4} dx$;

13.9 $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$;

13.10 $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx$;

13.11 $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3} dx$;

13.12 $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx$;

13.13 $\int sin^3 6x dx$;

13.14 $\int tg^4\frac{x}{3}dx$;

13.15 $\int\frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$;

13.16 $\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$;

13.17 $\int\frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}dx$;

13.18 $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

Вычислить определенные интегралы:

13.19 $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$;

13.20 $\int_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx$;

13.21 $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 sin^4x\cdot cos^4xdx$;

13.22 $\int_0^{arctg\,3}\frac{4+tgx}{2sin^2x+18cos^2x}dx$.

13.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{16x^2+4x+5};\qquad \int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}\ .$$

13.24. Вычислить площадь фигуры:	13.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=x\sqrt{36-x^2}\,, y=0\ (0\le x\le 6)$;	а) $y=e^x+13\ , ln\sqrt{15}\le x\le ln\sqrt{24}$;
б) $\begin{cases}x=32cos^3t\\ y=sin^3t\end{cases}, x=4\ (x\ge 4)$;	б) $\begin{cases}x=2{,}5(t-\sin t)\\ y=2{,}5(1-\cos t)\end{cases}, \frac{\pi}{2}\le t\le\pi$;
в) $r=\cos\varphi, r=sin\varphi\ \left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$.	в) $r=3(1+sin\varphi)\,, -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0$.

13.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho=1000\,^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,2 м, верхнее 7,9 м, высота 3,0 м.

13.27 $\iint(27x^2y^2+12xy)dxdy; D: x=1, y=x^2\,, y=-\sqrt[3]{x}\,, x\ge 0.$.

13.28 $\iint ye^{\frac{xy}{4}}dxdy; D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8.$

13.29 $\iiint x^2z\sin\frac{xyz}{4}dxdydz; V: x=1, x=0, y=2\pi, y=0, z=0, z=4.$

13.30. Найти площадь фигуры:$y=20-x^2, y=-8x$.

13.31. Найти массу пластины D. (μ —поверхностная плотность).

$D: x=2, y=0, y^2=\frac{x}{2}(y\ge 0);\ \mu=3y^2+2x.$

13.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x=\frac{5}{6}\sqrt{y}, x=\frac{5}{18}y, z=0, z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{y})$.

б) $x^2+y^2=2y, z=\frac{13}{4}-x^2, z=0.$

Вариант № 14.

Вычислить неопределенные интегралы:

14.1 $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^3+3}{x}dx$;

14.2 $\int\frac{x-3}{1-4x^2}dx$;

14.3 $\int\frac{1+3x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$;

14.4 $\int\frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx$;

14.5 $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$;

14.6 $\int (3x+1)\sin 3x\,dx$;

14.7 $\int \frac{arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$;

14.8 $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$;

14.9 $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$;

14.10 $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx$;

14.11 $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx$

14.12 $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$;

14.13 $\int sin^5\frac{x}{2}dx$;

14.14 $\int (1-tg2x)^2\,dx$;

14.15 $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$;

14.16 $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$;

14.17 $\int \frac{x+1+\sqrt[6]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

14.18 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

Вычислить определенные интегралы:

14.19 $\int_{-\pi}^{\pi} sin^2\frac{x}{2}dx$;

14.20 $\int_0^{\pi/8} x^2\sin(4x)dx$;

14.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^2x\cdot cos^6xdx$;

14.22 $\int_0^{arctg\,2}\frac{12+tgx}{3sin^2x+12cos^2x}dx$.

14.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty}\frac{(x+2)dx}{x^2+4x+1};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{tgx}}{cos^2x}dx$$

14.24. Вычислить площадь фигуры:	14.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $x=\arccos(y)\,, x=0, y=0$; б) $\begin{cases}x=3cost\\ y=8sint\end{cases}, y=4(y\ge 4)$; в) $r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right), r=\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}\right)$.	а) $y=-arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}, 0\le x\le\frac{1}{4}$; б) $\begin{cases}x=3{,}5(2cost-cos2t)\\ y=3{,}5(2sint-sin2t)\end{cases}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$; в) $r=4(1-sin\varphi)\,, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

14.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,5 м, верхнее 8,5 м, высота 3,0 м.

14.27 $\iint(18x^2y^2+8xy)dxdy; D\colon x=1, y=-x^2\,, y=\sqrt[3]{x}\,, x\ge 0$.

14.28 $\iint 4y^2\sin(2xy)\,dxdy; D\colon y=\sqrt{2\pi}, y=2x, x=0$.

14.29 $\iiint 8y^2ze^{-xyz}\,dxdydz; V\colon x=2, x=0, y=-1, y=0, z=2, z=0$.

14.30. Найти площадь фигуры:$y=\sqrt{18-x^2}, y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$.

14.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D\colon x^2+y^2=4, x^2+y^2=16, x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$; $\mu=\frac{2y-3x}{x^2+y^2}$.

14.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x=19\sqrt{2y}, x=4\sqrt{2y}, z=0, y+z=2$.

б) $x^2+y^2=3y, x^2+y^2=6y\ z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0.$

Вариант № 15.

Вычислить неопределенные интегралы:

15.1 $\int \frac{5+\sqrt[3]{x^4}-2x}{\sqrt{x}}dx;$

15.2 $\int \frac{x-4}{4x^2+1}dx;$

15.3 $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

15.4 $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx;$

15.5 $\int \frac{ln^7(x+1)dx}{(x+1)};$

15.6 $\int xe^{-4x}dx;$

15.7 $\int \frac{x\cdot arccosx}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

15.8 $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx;$

15.9 $\int \frac{dx}{5x-x^2-6};$

15.10 $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx;$

15.11 $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx$

15.12 $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx;$

15.13 $\int \left(1-\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx;$

15.14 $\int tg^5 6x\, dx;$

15.15 $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x};$

15.16 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}};$

15.17 $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx;$

15.18 $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$.

Вычислить определенные интегралы:

15.19 $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx;$

15.20 $\int_1^2 y^2\cdot\ln y dy;$

15.21 $\int_0^{2\pi} sin^8 x dx;$

15.22 $\int_0^{arctg\frac{2}{3}} \frac{6+tgx}{9sin^2x+4cos^2x}dx.$

15.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}dx;\qquad \int_0^1\frac{e^{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

15.24. Вычислить площадь фигуры:	15.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=x\cdot arctgx, y=0\ , x=\sqrt{3};$ б) $\begin{cases}x=6(t-sint)\\ y=6(1-cost)\end{cases}, y\geq 6(0<x<12\pi);$ в) $r=\cos\varphi, r=2cos\varphi.$	а) $y=2-e^x\ , ln\sqrt{3}\leq x\leq ln\sqrt{8}\,;$ б) $\begin{cases}x=6(cost+t\sin t)\\ y=6(sint-t\cos t)\end{cases}, 0\leq t\leq\pi;$ в) $r=5(1-cos\varphi)\ , -\frac{\pi}{3}\leq\varphi\leq 0.$

15.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho=1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,8 м, верхнее 9,1 м, высота 4,0 м.

15.27 $\iint\left(\frac{9}{11}x^2y^2+\frac{4}{5}xy\right)dxdy; D: x=1, y=x^3\ , y=-\sqrt{x}.$

15.28 $\iint 2y\cos(2xy)\,dxdy; D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=1, x=2.$

15.29 $\iiint 2x^2z\,\mathrm{sh}(2xyz)dxdydz; V: x=2, x=0, y=\frac{1}{2}, y=0, z=0, z=\frac{1}{2}.$

15.30. Найти площадь фигуры:$y = 32 - x^2, y = -4x$.
15.31. Найти массу пластины D. (μ —поверхностная плотность).
$D: x = \frac{1}{2}, y = 0, y^2 = 8x (y \geq 0);\ \mu = 3y^2 + 7x$.
15.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:
а)$x^2 + y^2 = 8, x = \sqrt{2y}, x = 0, z = \frac{30y}{11}, z = 0$.
б) $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}x, z = x^2 + y^2 - 36, z = 0\ (z \geq 0)$.

Вариант № 16.

Вычислить неопределенные интегралы:

16.1 $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 3x^4 + 2}{x} dx$;
16.2 $\int \frac{3x-1}{4-x^2} dx$;
16.3 $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}} dx$;
16.4 $\int \frac{\sin 2x}{4-\sin^2 x} dx$;
16.5 $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$;
1.6 $\int (4x+1)e^{-x} dx$;
16.7 $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1-x}} dx$;
16.8 $\int \frac{x^4+1}{1+x^2} dx$;
16.9 $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$;
16.10 $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx$;
16.11 $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3} dx$
16.12 $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx$;
16.13 $\int cos^3 4x dx$;
16.14 $\int (1 + tg^2 x)^2 dx$;
16.15 $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$;
16.16 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$;
16.17 $\int \frac{2+\sqrt{3x+1}}{2\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}} dx$;
16.18 $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$.

Вычислить определенные интегралы:

16.19 $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
16.20 $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$;
16.21 $\int_0^{2\pi} sin^8 \frac{x}{4} dx$;
16.22 $\int_0^{arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}} \frac{tg^2 x dx}{3sin^2 x + 4cos^2 x - 7} dx$.

16.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{arctg2x}{1+4x^2};\qquad \int_1^3 \frac{dx}{2x-5}$$

16.24. Вычислить площадь фигуры:	16.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y = x^2\sqrt{8-x^2}, y = 0\ (0 \leq x \leq 2\sqrt{2})$;	а) $y = arcsinx - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{15}{16}$;
б) $\begin{cases} x = 8cos^3 t \\ y = 4sin^3 t \end{cases}, x \geq 3\sqrt{3}$;	б) $\begin{cases} x = (t^2-2)sint + 2tcost \\ y = (2-t^2)cost + 2tsint \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
в) $r = sin\varphi, r = 2sin\varphi$.	в) $r = 6(1 + sin\varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$.

16.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho =$

$1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,1 м, верхнее 9,7 м , высота 4,0 м.

16.27 $\iint \left(9x^2y^2 + \frac{4}{5}xy\right) dxdy; D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}.$

16.28 $\iint y^2 e^{\frac{-xy}{2}} dxdy; D: y = \sqrt{2}, y = x, x = 0.$

16.29 $\iiint x\,dxdydz; V: x = 1, y = 10x, y = 0, z = 0, z = xy.$

16.30. Найти площадь фигуры:$y = \frac{2}{x}$, $y = 5e^x$, $y = 2$, $y = 5$.

16.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 (x \le 0, y \ge 0)$; $\mu = \frac{2y-5x}{x^2+y^2}$.

16.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, z = 0, z = \frac{3x}{5}$.

б) $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y, z = x^2 + y^2 - 4, z = 0 (z \ge 0)$.

Вариант № 17.

Вычислить неопределенные интегралы:

17.1 $\int \frac{2x^4 - 3\sqrt{x^5} - 2}{x} dx$;

17.2 $\int \frac{5x-2}{x^2+9} dx$;

17.3 $\int \frac{x+9}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

17.4 $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5} dx$;

17.5 $\int \frac{ln^4(3x+1)dx}{(3x+1)}$;

17.6 $\int (2x-1)\cos 3x\,dx$;

17.7 $\int arcctg 2x\,dx$;

17.8 $\int \frac{x^4-2x^2-1}{1+x^2} dx$;

17.9 $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$;

17.10 $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx$;

17.11 $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3} dx$

17.12 $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx$;

17.13 $\int \left(1 + \cos\frac{x}{3}\right)^2 dx$;

17.14 $\int tg^3 x\,dx$;

17.15 $\int \frac{2-\sin x + 3\cos x}{1+\cos x} dx$;

17.16 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx$;

17.17 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} dx$;

17.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

17.19 $\int_0^1 3(x^2 + x^2 e^{x^3})\,dx$;

17.20 $\int_{1,5}^2 arctg(2x-3)dx$;

17.21 $\int_0^\pi 2^4 sin^6\frac{x}{2} cos^2\frac{x}{2} dx$;

17.22 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{7+3tgx}{(sinx+2cosx)^2} dx$.

17.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_1^\infty \frac{4dx}{x(1+ln^2x)};\qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos x}}$$

17.22. Вычислить площадь фигуры:	17.23. Вычислить длины дуг кривых:
а) $x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2$;	а) $y = 1 - \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

б) $\begin{cases} x = 6cost \\ y = 4sint \end{cases}, y \geq 2\sqrt{3}$; в) $r = 1 + \sqrt{2}cos\varphi$.	б) $\begin{cases} x = 8cos^3t \\ y = 8sin^3t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$; в) $r = 7(1 - sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.

17.24. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,4 м, верхнее 10,3 м, высота 4,0 м.

17.25 $\iint (24xy - 48x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

17.26 $\iint y\sin(xy)\,dxdy; D: y = \pi, y = 2\pi, x = \frac{1}{2}, x = 1.$

17.27 $\iiint 15(y^2 + z^2)\,dxdydz; V: z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

17.28. Найти площадь фигуры:$x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2}y = x^2$ $(y \geq 0)$.

17.29. Найти массу пластины $D(\mu -$ поверхностная плотность).

$D: x = 1, y = 0, y^2 = 4x (y \geq 0);\ \mu = 7x^2 + 2y.$

1.30. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y = 6\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, z = 0, x + z = 3.$

б) $x^2 + y^2 = 4x, z = 12 - y^2, z = 0.$

Вариант № 18.

Вычислить неопределенные интегралы:

18.1 $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} - 1}{x^2}dx$;

18.2 $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx$;

18.3 $\int \frac{5-x}{2+x^2}dx$;

18.4 $\int \frac{x^2}{7+3x^3}dx$;

18.5 $\int \frac{\sin 5x\,dx}{cos^4 5x}$;

18.6 $\int (7x+1)e^{-4x}dx$;

18.7 $\int \frac{x \cdot arcctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

18.8 $\int \frac{x^4+2}{x^2-4}dx$;

18.9 $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$;

18.10 $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$;

18.11 $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx$

18.12 $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$;

18.13 $\int cos^3 \frac{x}{8}dx$;

18.14 $\int (ctgx + tgx)^2\,dx$;

18.15 $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$;

18.16 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$;

18.17 $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$;

18.18 $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$.

Вычислить определенные интегралы:

18.19 $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

18.20 $\int_2^3 (x+3)\sin x dx$;

18.21 $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 sin^4x \cdot cos^4x dx$;

18.22 $\int_{arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}^{arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{2tgx+5}{(5-tgx)\sin 2x}dx$.

18.23. Вычислить несобственные интегралы:

$\int\limits_0^{\infty} x\sin x dx$;

$\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

18.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0 (0 \le x \le 2)$; б) $\begin{cases} x = 10(t - sint) \\ y = 10(1 - cost) \end{cases}, y \ge 15, (0 < x < 20\pi)$ в) $r = \frac{1}{2} + cos\varphi$.	18.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \le x \le 4$; б) $\begin{cases} x = e^t(cost + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - sint) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$; в) $r = 8(1 - cos\varphi), -\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

18.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000 \,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10 \,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,7м, верхнее 10,8 м, высота 4,0 м.

18.27 $\iint (6xy + 24x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.

18.28 $\iint y^2 \cos(2xy)\, dxdy; D: y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = \frac{x}{2}, x = 0$.

18.29 $\iiint (3x + 4y)\, dxdydz; V: x = 1, y = 0, y = x, z = 0, z = 5(x^2 + y^2)$.

18.30. Найти площадь фигуры: $y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 4$.

18.31. Найти массу пластины $D(\mu$ −поверхностная плотность).

$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16, x = 0, y = 0 (x \ge 0, y \ge 0)$; $\mu = \frac{x+3y}{x^2+y^2}$.

18.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y = \frac{5}{6}\sqrt{x}, y = \frac{5}{18}x, z = 0, z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x})$.

б) $x^2 + y^2 = 8x, x^2 + y^2 = 11x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0 (y \le 0)$.

Вариант № 19.

Вычислить неопределенные интегралы:

19.1 $\int \frac{2x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x^3} dx$;

19.2 $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$;

19.3 $\int \frac{1-3x}{4x^2-1} dx$;

19.4 $\int \frac{3x+3}{x^2+2x} dx$;

19.5 $\int \frac{tg^6 2x dx}{cos^2 2x}$;

19.6 $\int (x+4)\cos 8x\, dx$;

19.7 $\int arcsin 2x\, dx$;

19.8 $\int \frac{x^3-3}{x+5} dx$;

19.9 $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$;

19.10 $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x} dx$;

19.11 $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3} dx$

19.12 $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+2)(x^2+x+1)} dx$;

19.13 $\int sin^3 6x dx$;

19.14 $\int (1 - ctgx)^2\, dx$;

19.15 $\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}$;

19.16 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-4}}$;

19.17 $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$;

19.18 $\int \frac{x^4dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$.

Вычислить определенные интегралы:

19.19 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^6}dx$;

19.20 $\int_1^e x \cdot ln^2xdx$;

19.21 $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 sin^2x \cdot cos^6xdx$;

19.22 $\int_{-arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0} \frac{3tg^2x-50}{2tgx+7}dx$.

19.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2+1};\qquad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$$

19.24. Вычислить площадь фигуры:	19.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0, x = 1$;	а) $y = \sqrt{x-x^2} - arccos\sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \le x \le 1$;
б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}cos^3t \\ y = \sqrt{2}sin^3t \end{cases}, x \ge 1$;	б) $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$;
в) $r = 1 + \sqrt{2}sin\varphi$.	в) $r = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$.

19.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 7,0 м, верхнее 11,5 м, высота 5,0 м.

19.27 $\iint(4xy + 16x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$

19.28 $\iint 8ye^{4xy}dxdy; D: y = \ln 3, y = \ln 4, x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$.

19.29 $\iiint y\,dxdydz; V: x = 1, y = 15x, y = 0, z = 0, z = xy$.

19.30. Найти площадь фигуры: $y = 6 - \sqrt{36-x^2}, y = \sqrt{36-x^2}, x = 0, (x \ge 0)$.

19.31. Найти массу пластины D. (μ −поверхностная плотность).

$D: x = 2, y = 0, y^2 = 2x (y \ge 0)$; $\mu = \frac{7}{4}x^2 + \frac{y}{2}$.

19.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 18, y = \sqrt{3x}, y = 0, z = 0, z = \frac{5x}{11}$.

б) $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x, z = x^2 + y^2 - 16, z = 0 (z \ge 0)$.

Вариант № 20.

Вычислить неопределенные интегралы:

20.1 $\int \frac{3x^4 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2}dx$;

20.2 $\int \frac{2x-4}{x^2+16}dx$;

20.3 $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx$;

20.4 $\int \frac{e^{2x}}{4e^{2x}+3}dx$;

20.5 $\int \frac{dx}{(x^2+1)arctg^3x}$;

20.6 $\int (x+8)e^{4x}dx$;

20.7 $\int \frac{x \cdot arcsin\,2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

20.8 $\int \frac{x^3+1}{1+x^2}dx$;

20.9 $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$;

20.10 $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx$;

20.11 $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx$

20.12 $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+2)(x^2+x+1)}dx$;

20.13 $\int sin^4 xdx$;

20.14 $\int ctg^3\frac{2x}{3}dx$;

20.15 $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$;

20.16 $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$;

20.17 $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$;

20.18 $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Вычислить определенные интегралы:

20.19 $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

20.20 $\int_{-3}^0 (x-2)e^{\frac{-x}{3}}dx$;

20.21 $\int_0^\pi 2^4cos^8xdx$;

20.22 $\int_0^{\pi/4}\frac{5tgx+2}{2sin2x+5}dx$.

20.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{\pi dx}{(1+9x^2)arctg^2 3x};\qquad \int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(3x-1)}$$

20.24. Вычислить площадь фигуры:	20.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=\frac{1}{1+\cos x}, y=0, x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}cost \\ y=4\sqrt{2}sint \end{cases}, y\geq 4$; в) $r=\frac{5}{2}sin\varphi, r=\frac{3}{2}sin\varphi$	а) $y=-arccosx+\sqrt{1-x^2}+1, 0\leq x\leq \frac{9}{16}$; б) $\begin{cases} x=2(2cost-cos2t) \\ y=2(2sint-sin2t) \end{cases}, 0\leq t\leq \frac{\pi}{3}$; в) $r=2\varphi, 0\leq\varphi\leq\frac{4}{3}$.

20.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 7,3 м, верхнее 12,1 м, высота 6,0 м.

20.27 $\iint(4xy+16x^3y^3)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$

20.28 $\iint 3y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy; D: y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2}{3}x, x=0.$

20.29 $\iiint(3x^2+y^2)\,dxdydz; V: x=0, y+x=1, y=0, z=0, z=10y.$

20.30. Найти площадь фигуры: $y=\frac{25}{4}-x^2, y=x-\frac{5}{2}$.

20.31. Найти массу пластины D(μ —поверхностная плотность).

$D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, x=0, y=0 (x\geq 0, y\geq 0)$; $\mu=\frac{x+2y}{x^2+y^2}$.

20.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=0, z=4y.$

б) $x^2 + y^2 = 4y, z = 4 - x^2, z = 0.$

Вариант № 21.

Вычислить неопределенные интегралы:

21.1 $\int \frac{2+\sqrt[5]{x^2}-2x^4}{x^2}dx$;

21.2 $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

21.3 $\int \frac{x-5}{3-2x^2}dx$;

21.4 $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-10}dx$;

21.5 $\int \frac{arccos^7 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

21.6 $\int (x+6)\cos\frac{x}{2}dx$;

21.7 $\int \frac{arccosx}{\sqrt{1+x}}dx$;

21.8 $\int \frac{1-x^4}{1+x^2}dx$;

21.9 $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$;

21.10 $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx$;

21.11 $\int \frac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}dx$

21.12 $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$;

21.13 $\int (3+\cos x)^2 dx$;

21.14 $\int ctg^4 x\, dx$;

21.15 $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$;

21.16 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$;

21.17 $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$;

21.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

21.19 $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-ln^2x}}dx$;

21.20 $\int_0^{\pi/9} \frac{xd}{cos^2 3x}$;

21.21 $\int_0^{2\pi} 2^8 sin^8 xdx$;

21.22 $\int_{\pi/4}^{arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4tgx-5}{4cos^2x-sin2x+1}dx.$

21.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi\cdot arctg\frac{x}{2}}};\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3sin^3xdx}{\sqrt{cosx}}$$

21.24. Вычислить площадь фигуры:	21.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $x = (y-2)^3, x = 4y-8$; б) $\begin{cases} x = t - sint \\ y = 1 - cost \end{cases}, y \geq 1 (0 < x < 2\pi)$; в) $r = \frac{3}{2}cos\varphi, r = \frac{5}{2}cos\varphi.$	а) $y = \ln(\sin x), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x = 8(cost - t\sin t) \\ y = 8(sint - t\cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$; в) $r = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}.$

21.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,4 м, верхнее 6,5 м, высота 3,0 м.

21.27 $\iint(44xy + 16x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}, x \geq 0.$

21.28 $\iint y\cos(xy)\,dxdy; D: y=\pi, y=3\pi, x=\frac{1}{2}, x=1.$

21.29 $\iiint(15x+30z)\,dxdydz; V: x=1, y=x, y=0, z=0, z=x^2+3y^2.$

21.30. Найти площадь фигуры: $y=\sqrt{x}\,, y=\frac{1}{x}\,, x=16\,.$

21.31. Найти массу пластины D(μ —поверхностная плотность).

$D: x=2, y=0, y^2=2x(y\geq 0);\ \mu=\frac{7}{4}x^2+y.$

21.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x=7\sqrt{3y}, x=2\sqrt{3y}, z=0, y+z=3.$

б) $x^2+y^2=4y, x^2+y^2=7y, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0.$

Вариант № 22.

Вычислить неопределенные интегралы:

22.1 $\int\frac{\sqrt{x}-2x^3+6}{x}dx;$

22.2 $\int\frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}}dx;$

22.3 $\int\frac{2x-7}{x^2-5}dx;$

22.4 $\int\frac{x^5}{3x^6-7}dx;$

22.5 $\int\frac{arcctg^{\,8}xdx}{1+x^2};$

22.6 $\int(x-6)\sin\frac{x}{2}dx;$

22.7 $\int x^2\cdot arctgxdx;$

22.8 $\int\frac{2x^3-3}{x-2}dx;$

22.9 $\int\frac{dx}{2x^2-3x+2};$

22.10 $\int\frac{x^5+9}{x(x+3)(x-1)}dx;$

22.11 $\int\frac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}dx$

22.12 $\int\frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}dx;$

22.13 $\int cos^3\frac{2x}{5}dx;$

22.14 $\int tg^2\frac{2x}{5}dx;$

22.15 $\int\frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx;$

22.16 $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+10};$

22.17 $\int\frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx;$

22.18 $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Вычислить определенные интегралы:

22.19 $\int_3^8\sqrt{1+x}\,dx;$

22.20 $\int_{0,5}^1\arcsin(1-x)\,dx;$

22.21 $\int_0^{2\pi}sin^6\frac{x}{4}cos^2\frac{x}{4}dx;$

22.22 $\int_0^{arcsin\sqrt{\frac{7}{8}}}\frac{6sin^2x}{4+3cos2x}dx.$

22.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x};\qquad \int_0^3\frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$$

22.24. Вычислить площадь фигуры:	22.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=cos^5x\cdot sin2x, y=0\ (0\leq x\leq\frac{\pi}{2});$ б) $\begin{cases}x=8cos^3t\\y=8sin^3t\end{cases}, x\geq 1\,;$ в) $r=4cos4\varphi.$	а) $y=\ln 7-\ln x\,, \sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{8}\,;$ б) $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2tcost\\y=(2-t^2)cost+2tsint\end{cases}, 0\leq t\leq 2\pi;$ в) $r=2\varphi\,, 0\leq\varphi\leq\frac{12}{5}.$

22.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000 \,{}^{\text{кг}}/{}_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10 \,{}^{\text{м}}/{}_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно$\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,7 м, верхнее 7,1 м, высота 3,0 м.

22.27 $\iint (4xy + 176x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}, x \geq 0.$

22.28 $\iint y^2 e^{\frac{-xy}{2}} dxdy; D: y = 1, y = \frac{x}{2}, x = 0.$

22.29 $\iiint 21xz\, dxdydz; V: x = 2, y = x, y = 0, z = 0, z = xy.$

22.30. Найти площадь фигуры:$y = \frac{2}{x}$, $y = 7e^x$, $y = 2$, $y = 7$.

22.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D: , x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \leq 0);\ \mu = \frac{2x-y}{x^2+y^2}.$

22.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x = \frac{5\sqrt{y}}{3}, x = \frac{5y}{9}, z = 0, z = \frac{5(3+\sqrt{y})}{9}.$

б) $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}y, z = x^2 + y^2 - 16, z = 0 (z \geq 0).$

Вариант № 23.

Вычислить неопределенные интегралы:

23.1 $\int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx;$

23.2 $\int \frac{3x+4}{5-2x^2} dx;$

23.3 $\int \frac{7x-2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

23.4 $\int \frac{x^4}{x^5+3} dx;$

23.5 $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^5 x} dx}{1+x^2};$

23.6 $\int (x+1)\cos\frac{x}{7} dx;$

23.7 $\int x \cdot arctg 2x\, dx;$

23.8 $\int \frac{2x^2+5}{x+1} dx;$

23.9 $\int \frac{dx}{x^2+7x+11};$

23.10 $\int \frac{2x^4 - 5x^2 - 8x - 8}{x^2 - x} dx;$

23.11 $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx$

23.12 $\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2+1)(x^2-x+1)} dx;$

23.13 $\int sin^3 5x dx;$

23.14 $\int tg^4 \frac{x}{3} dx;$

23.15 $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x};$

23.16 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$;

23.17 $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$;

23.18 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$

Вычислить определенные интегралы:

23.19 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x cos^3 x\, dx;$

23.20 $\int_1^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x} dx;$

23.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^4\frac{x}{2} \cdot cos^4\frac{x}{2} dx;$

23.22 $\int_{-arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}^{0} \frac{11 - 3tgx}{tgx + 3} dx.$

23.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx;$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$$

23.24. Вычислить площадь фигуры: а) $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1;$ б) $\begin{cases} x = 9cost \\ y = 4sint \end{cases}, y \geq 2;$ в) $r = sin6\varphi.$	23.25. Вычислить длины дуг кривых: а) $y = \operatorname{ch} x + 3\ , 0 \leq x \leq 1;$ б) $\begin{cases} x = 4cos^3 t \\ y = 4sin^3 t \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4};$ в) $r = 4\varphi\ , 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$

23.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,0 м, верхнее 7,7 м, высота 3,0 м.

23.27 $\iint (xy - 4x^3y^3) dxdy; D: x = 1, y = x^3\ , y = -\sqrt{x}.$

23.28 $\iint y \sin(2xy)\, dxdy; D: y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 3.$

23.29 $\iiint (x^2 + 3y^2)\, dxdydz; V: x = 0, x + y = 1, y = 0, z = 0, z = 10x.$

23.30. Найти площадь фигуры:$x = 27 - y^2, x = -6y$.

23.31. Найти массу пластины $D(\mu -$поверхностная плотность).

$D: x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2} (y \geq 0);\ \mu = \frac{7}{2}x^2 + 8y.$

23.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а)$x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, x = 0, z = 0, z = \frac{10y}{11}.$

б) $x^2 + y^2 + 2x = 0, z = \frac{17}{4} - y^2, z = 0.$

Вариант № 24.

Вычислить неопределенные интегралы:

24.1 $\int \frac{x^2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx;$

24.2 $\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

24.3 $\int \frac{x-5}{7x^2+4} dx;$

24.4 $\int \frac{\sin\ 4x}{5+3\cos\ 4x} dx;$

24.5 $\int \frac{dx}{cos^2x \cdot tg^3x};$

24.6 $\int (x + 2) \sin\frac{x}{3} dx;$

24.7 $\int ln^2 x\, dx;$

24.8 $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2} dx;$

24.9 $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1};$

24.10 $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{(x-1)(x+1)x} dx;$

24.11 $\int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3} dx;$

24.12 $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)} dx;$

24.13 $\int sin^4 \frac{x}{3} dx;$

24.14 $\int tg^3 \frac{4x}{5} dx;$

24.15 $\int \frac{dx}{5+3\cos\ x};$

24.16 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}};$

24.17 $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}} dx;$

24.18 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$

Вычислить определенные интегралы:

24.19 $\int_{\pi/18}^{\pi/6} 12ctg3x\, dx;$

24.20 $\int_{-1}^{0} x \cdot \ln(1 - x) dx;$

24.21 $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8 sin^2 x \cdot cos^6 x dx$;

24.22 $\int_0^{arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{2tgx-5}{(4cosx-sinx)^2} dx$.

24.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{\infty}^{0} \frac{x^2}{x^3-1} dx ; \qquad \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$$

24.24. Вычислить площадь фигуры:	24.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y$; б) $\begin{cases} x = 8(t - sint) \\ y = 8(1 - cost) \end{cases}, y \geq 12, (0 < x < 16\pi)$; в) $r = 2\cos\varphi, r = 3cos\varphi$.	а) $y = 1 + arcsinx - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 34$. б) $\begin{cases} x = e^t(cost + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - sint) \end{cases}$, $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$; в) $r = 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}$.

24.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м}/\text{с}^2$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,3 м, верхнее 8,3 м, высота 3,0 м.

24.27 $\iint(4xy + 176x^3y^3)dxdy; D: x = 1, y = -x^3 , y = \sqrt{x}$.

24.28 $\iint y^2 \cos(xy)\, dxdy; D: y = \sqrt{\pi}, y = 2x, x = 0$.

24.29 $\iiint(60y + 90z)\, dxdydz; V: x = 1, y = x, y = 0, z = 0, z = x^2 + y^2$.

24.30. Найти площадь фигуры:$x = \sqrt{72 - y^2}$, $6x = y^2, y = 0 (y \geq 0)$.

24.31. Найти массу пластины D(μ —поверхностная плотность).

$D: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 25, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \leq 0)$; $\mu = \frac{x-4y}{x^2+y^2}$.

24.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x + y = 6, x = \sqrt{3y}, z = 0, z = \frac{4x}{5}$.

б) $x^2 + y^2 = 9x, x^2 + y^2 = 12x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0 (y \geq 0)$.

Вариант № 25.

Вычислить неопределенные интегралы:

25.1 $\int \frac{\sqrt[5]{x}-4+2x}{\sqrt{x}} dx$;

25.2 $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx$;

25.3 $\int \frac{3-7x}{1+x^2} dx$;

25.4 $\int \frac{cos\,7x}{5-sin\,7x} dx$;

25.5 $\int \frac{dx}{sin^2x \cdot \sqrt{ctgx}}$;

25.6 $\int (x+1) \sin\frac{x}{5} dx$;

25.7 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$;

25.8 $\int \frac{x^2+x}{2-x} dx$;

25.9 $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$;

25.10 $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)} dx$;

25.11 $\int \frac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3} dx$

25.12 $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)} dx$;

25.13 $\int cos^4 \frac{x}{6} dx$;

25.14 $\int (1 - tg3x)^2 dx$;

25.15 $\int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$;

25.16 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$;

25.17 $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$;

25.18 $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Вычислить определенные интегралы:

25.19 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}dx$;

25.20 $\int_0^1 \frac{arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$;

25.21 $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^8 cos^8 x dx$;

25.22 $\int_{\pi/4}^{arccos\frac{1}{\sqrt{26}}} \frac{36dx}{(6-tgx)\sin 2x}$.

25.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1};\qquad \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{9-x}}$$

25.24. Вычислить площадь фигуры:	25.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $x=\frac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x=0, y=1, y=e^3$;	а) $y=\ln(cosx)+2\ ,0\le x\le\frac{\pi}{6}$;
б) $\begin{cases} x=24cos^3 t \\ y=2sin^3 t \end{cases}, x\ge 9\sqrt{3}$;	б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$;
в) $r=cos\varphi+sin\varphi$.	в) $r=5\varphi\ ,0\le\varphi\le\frac{12}{5}$.

25.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g=10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,6 м, верхнее 8,9 м, высота 4,0 м.

25.27 $\iint \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy; D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$

25.28 $\iint 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy; D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6.$

25.29 $\iiint (9+18z)\,dxdydz; V: x=1, y=4x, y=0, z=0, z=\sqrt{xy}.$

25.30. Найти площадь фигуры: $y=\sqrt{6-x^2}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$.

25.31. Найти массу пластины $D(\mu -$ поверхностная плотность).

$D: x=1, y=0, y^2=4x (y\ge 0);\ \mu=3y^2+6x.$

25.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y=\sqrt{15x}, y=2\sqrt{15x}, z=0, x+z=2.$

б) $x^2+y^2+2\sqrt{2}x=0, z=x^2+y^2-4, z=0 (z\ge 0).$

Вариант № 26.

Вычислить неопределенные интегралы:

26.1 $\int \frac{3+\sqrt[7]{x^6}-2x^2}{x}dx$;

26.2 $\int \frac{3-2x}{x^2-8}dx$;

26.3 $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

26.4 $\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x+3}dx$;

26.5 $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos 3x}}$;

26.6 $\int (3x+1)\cos\frac{x}{3}dx$;

26.7 $\int x^2\cdot\ln(x+1)\,dx$;

26.8 $\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx$;

26.9 $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$;

26.10 $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}dx$;

26.11 $\int \frac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}dx$

26.12 $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx$;

26.13 $\int sin^3 4xdx$;

26.14 $\int (1+tgx)^2\, dx$;

26.15 $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;

26.16 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$;

26.17 $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$;

26.18 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

Вычислить определенные интегралы:

26.19 $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

26.20 $\int_1^2 \ln(3x+2)dx$;

26.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^8 xdx$;

26.22 $\int_0^{\pi/4} \frac{4-7tgx}{3tgx+2}dx$.

26.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$$

$$\int\limits_1^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

26.24. Вычислить площадь фигуры:	26.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=\frac{e^{1/x}}{x^2}$, $y=0, x=2, x=1$; б) $\begin{cases} x=3cost \\ y=8sint \end{cases}, y\geq 4\sqrt{3}$; в) $r=2\cos 4\varphi$.	а) $y=e^x+26$, $ln\sqrt{8}\leq x\leq ln\sqrt{24}$; б) $\begin{cases} x=4(2cost-\cos 2t) \\ y=4(2sint-\sin 2t) \end{cases}, 0\leq t\leq \pi$; в) $r=2cos\varphi$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}$.

26.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 5,9 м, верхнее 9,5 м , высота 4,0 м.

26.27 $\iint (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy; D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}.$

26.28 $\iint y^2 \sin\frac{xy}{2} dxdy; D: y=\sqrt{\pi}, y=x, x=0.$

26.29 $\iiint 3y^2\, dxdydz; V: x=2, y=2x, y=0, z=0, z=xy.$

26.30. Найти площадь фигуры: $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{2x}$, $x=4$.

26.31. Найти массу пластины D(μ —поверхностная плотность).

$D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16, x=0, y=0 (x\geq 0, y\leq 0)$; $\mu=\frac{3x-y}{x^2+y^2}$.

26.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а)$x^2+y^2=50, y=\sqrt{5x}, y=0, z=0, z=\frac{3x}{11}$.

б) $x^2+y^2=4y, z=6-x^2, z=0.$

Вариант № 27.

Вычислить неопределенные интегралы:

27.1 $\int \frac{x^3+\sqrt[3]{x^7}-2}{x^2}dx$;
27.2 $\int \frac{x-5}{8-4x^2}dx$;
27.3 $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}}dx$;
27.4 $\int \frac{\sin 2x}{1-cos^2 2x}dx$;
27.5 $\int sin^2 4x \cdot cos4xdx$;
27.6 $\int (x+1)e^{-2x}dx$;
27.7 $\int \ln(x^2+1)\,dx$;
27.8 $\int \frac{2x^3+3}{x-1}dx$;
27.9 $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$;
27.10 $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx$;
27.11 $\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx$
27.12 $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$;
27.13 $\int sn^5 \frac{7x}{3}dx$;
27.14 $\int (5-2tgx)^2\,dx$;
27.15 $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin}$;
27.16 $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$;
27.17 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$;
27.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:
27.19 $\int_1^e \frac{ln^2 x}{x}dx$;
27.20 $\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$;
27.21 $\int_0^{2\pi} sin^6 x \cdot cos^2 xdx$;
27.22 $\int_{-arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\pi/4} \frac{2-tgx}{(sinx+3cosx)^2}dx$.

27.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2};\qquad \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-2}}$$

27.24. Вычислить площадь фигуры:	27.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y = x^2\sqrt{16-x^2}\,, y = 0 (0 \le x \le 4)$; б) $\begin{cases} x = 2(t-sint) \\ y = 2(1-cost) \end{cases}, y \ge 2, (0 < x < 4\pi)$; в) $r = 2\cos 6\varphi$.	а) $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + 3\ , 0 \le x \le 2$; б) $\begin{cases} x = 2(cost + t\sin t) \\ y = 2(sint - t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$; в) $r = 8cos\varphi\ , 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

27.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,2 м, верхнее 10,1 м, высота 4,0 м.

27.27 $\iint \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy; D: x = 1, y = -x^3\,, y = \sqrt[3]{x}$.
27.28 $\iint y\cos(2xy)\,dxdy; D: y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$.
27.29 $\iiint x^2\,dxdydz; V: x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0, z = 10(x + 3y)$.
27.30. Найти площадь фигуры: $y = \sin x\,, y = \cos x\,, x = 0 (x \le 0)$.
27.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D: x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2}(y \geq 0);\ \mu = 6y^2 + 4x.$

27.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x + y = 8, y = \sqrt{4x}, z = 0, z = 3y.$

б) $x^2 + y^2 = 10x, x^2 + y^2 = 13x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, y = 0(y \geq 0).$

Вариант № 28.

Вычислить неопределенные интегралы:

28.1 $\int \frac{6x+\sqrt[3]{x^5}-5}{x} dx;$

28.2 $\int \frac{x+4}{7x^2+3} dx;$

28.3 $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}} dx;$

28.4 $\int \frac{4e^{2x}}{1-e^{2x}} dx;$

28.5 $\int \frac{cos\,4x}{sin^3 4x};$

28.6 $\int (x+2)\sin\frac{x}{4} dx;$

28.7 $\int \frac{\ln x}{x^3} dx;$

28.8 $\int \frac{1-x^4}{4+x^2} dx;$

28.9 $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2};$

28.10 $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)} dx;$

28.11 $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3} dx$

28.12 $\int \frac{x+4}{(x^2+2)(x^2+x+2)} dx;$

28.13 $\int (\sin x - 5)^2 dx;$

28.14 $\int ctg^3 \frac{x}{4} dx;$

28.15 $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x};$

28.16 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}};$

28.17 $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}} dx;$

28.18 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$

Вычислить определенные интегралы:

28.19 $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9} dx;$

28.20 $\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x} dx;$

28.21 $\int_0^{2\pi} sin^4\frac{x}{4} cos^4\frac{x}{4} dx;$

28.22 $\int_{\pi/4}^{arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{8tgxdx}{3cos^2x+8sin^2x-7}.$

28.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}; \qquad \int_0^4 \frac{dx}{3x-6}.$$

28.24. Вычислить площадь фигуры:	28.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 0, y = 1;$ б) $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}cos^3 t \\ y = \sqrt{2}sin^3 t \end{cases}, x \geq 2;$ в) $r = \cos\varphi - sin\varphi.$	а) $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4, 0 \leq x \leq \frac{1}{2};$ б) $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2tcost \\ y = (2-t^2)\cos t + 2tsint \end{cases}, 0 \leq t \leq 3\pi;$ в) $r = 6cos\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

28.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 6,5 м, верхнее 10,7 м, высота 4,0 м.

28.27 $\iint(9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

28.28 $\iint y^2 e^{\frac{-xy}{8}} dxdy; D: y=4, y=2x, x=0$.

28.29 $\iiint(8y+12z)\, dxdydz; V: x=1, y=x, y=0, z=0, z=3x^2+2y^2$.

28.30. Найти площадь фигуры: $y=\frac{1}{x}$, $y=6e^x$, $y=1$, $y=6$.

28.31. Найти массу пластины D(μ −поверхностная плотность).

$D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9, x=0, y=0(x\le 0, y\ge 0);\ \mu=\frac{y-4x}{x^2+y^2}$.

28.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x=16\sqrt{2y}, x=\sqrt{2y}, z=0, y+z=2$.

б) $x^2+y^2=2\sqrt{2x}, z=x^2+y^2-4, z=0(z\ge 0)$.

Вариант № 29.

Вычислить неопределенные интегралы:

29.1 $\int\frac{5x^3+\sqrt[3]{x^8}-7}{x^3}dx$;

29.2 $\int\frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}dx$;

29.3 $\int\frac{8-2x}{1+3x^2}dx$;

29.4 $\int\frac{x^3}{1-2x^4}dx$;

29.5 $\int\frac{\cos 5x\,dx}{\sqrt{\sin 5x}}$;

29.6 $\int(x+3)\sin\frac{x}{4}dx$;

29.7 $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$;

29.8 $\int\frac{x^2+4}{x-3}dx$;

29.9 $\int\frac{dx}{2x^2+3x+6}$;

29.10 $\int\frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx$;

29.11 $\int\frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}dx$

29.12 $\int\frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$;

29.13 $\int sin^3\frac{6x}{5}dx$;

29.14 $\int tg^2\frac{7x}{4}dx$;

29.15 $\int\frac{dx}{3\sin x-\cos x}$

29.16 $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$;

29.17 $\int\frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$;

29.18 $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Вычислить определенные интегралы:

29.19 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} cosx\cdot sin^3x\,dx$;

29.20 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot tg^2x\,dx$;

29.21 $\int_0^{\pi} 2^4 sin^2\frac{x}{2}\cdot cos^6\frac{x}{2}dx$;

29.22 $\int_{arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{arccos\frac{1}{\sqrt{26}}}\frac{12dx}{(5tgx+6)\sin 2x}$.

29.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2};\qquad \int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

29.24. Вычислить площадь фигуры:	29.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y=(x-1)^2, y^2=x-1$; б) $\begin{cases}x=2\sqrt{2}cost\\ y=5\sqrt{2}sint\end{cases}, y\ge 5$; в) $r=3sin\varphi, r=5sin\varphi$.	а) $y=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+3}{4}$, $0\le x\le 2$; б) $\begin{cases}x=2cos^3t\\ y=2sin^3t\end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$; в) $r=2sin\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.

29.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 4,5 м, верхнее 6,6 м, высота 5,0 м.

29.27 $\iint(54x^2y^2 + 150x^4y^4)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}.$

29.28 $\iint 3y\sin(xy)\,dxdy; D: y = \frac{\pi}{2}, y = 3\pi, x = 1, x = 3.$

29.29 $\iiint y^2\,dxdydz; V: x = 0, y + x = 1, y = 0, z = 0, z = 10(3x + y).$

29.30. Найти площадь фигуры: $y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 9$..

29.31. Найти массу пластины $D(\mu$ −поверхностная плотность).

$D: x = \frac{1}{2}, y = 0, y^2 = 2x (y \geq 0);\ \mu = 9y^2 + 4x.$

29.32. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $x = 15\sqrt{y}, x = 15y, z = 0, z = 15(1 + \sqrt{y})$

б) $x^2 + y^2 = 2x, z = \frac{21}{4} - y^2, z = 0.$

Вариант № 30.

Вычислить неопределенные интегралы:

30.1 $\int \frac{5x^2+\sqrt[3]{x^7}-2}{\sqrt{x}}dx;$

30.2 $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}}dx;$

30.3 $\int \frac{6x-1}{2x^2-3}dx;$

30.4 $\int \frac{\cos\ 5x}{1+\cos\ 5x}dx;$

30.5 $\int 2^{x^3+5}x^2dx;$

30.6 $\int(x - 9)e^{-6x}dx;$

30.7 $\int xln^2x\,dx;$

30.8 $\int \frac{2x^2+3}{2x-1}dx;$

30.9 $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1};$

30.10 $\int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)}dx;$

30.11 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$

30.12 $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+2x+3)(x^2+x+3)}dx;$

30.13 $\int sin^2\frac{4x}{3}dx;$

30.14 $\int(tg2x)^5\,dx;$

30.15 $\int \frac{dx}{2-3\cos\ x+\sin\ x};$

30.16 $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}};$

30.17 $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx;$

30.18 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

Вычислить определенные интегралы:

30.19 $\int_0^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{cos^2(x^2)}dx;$

30.20 $\int_0^1 x \cdot arctgxdx;$

30.21 $\int_{-\pi/2}^0 2^8cos^8xdx;$

30.22 $\int_0^{\pi/3} \frac{tg^2xdx}{4+3cos\,2x}.$

30.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}$$

30.24. Вычислить площадь фигуры:	30.25. Вычислить длины дуг кривых:
а) $y = x^2 cosx, y = 0 \ (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$; б) $\begin{cases} x = 4(t - sint) \\ y = 4(1 - cost) \end{cases}, y \geq 6(0 < x < 8\pi)$; в) $r = 2sin\varphi, r = 4sin\varphi$.	а) $y = e^x + e\ , ln\sqrt{3} \leq x \leq ln\sqrt{15}$; б) $\begin{cases} x = e^t(cost + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - sint) \end{cases}, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$; в) $r = 8sin\varphi\ , 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

30.26. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Плотность воды $\rho = 1000\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Давление на глубине x равно $\rho g x$. Нижнее основание трапеции равно 7,1 м, верхнее 11,9 м, высота 5,0 м.

30.25 $\iint (xy - 9x^5y^5)dxdy; D: x = 1, y = -x^2\ , y = \sqrt[3]{x}$.

30.26 $\iint y^2 \cos\frac{xy}{2} dxdy; D: y = \sqrt{2\pi}, y = 2x, x = 0$.

30.27 $\iiint (x^2 + 4y^2)dxdydz; V: x = 0, y + x = 1, y = 0, z = 0, z = 20(2x + y)$.

30.28. Найти площадь фигуры: $y = 11 - x^2, y = -10x$.

30.29. Найти массу пластины $D(\mu$ −поверхностная плотность).

$D: x = \frac{1}{4}, y = 0, y^2 = 16x(y \geq 0);\ \mu = \frac{9}{2}y^2 + 16x$.

30.30. Найти объем тела, заданного ограничивающими поверхностями:

а) $y = 17\sqrt{2y}, x = 2\sqrt{2y}, z = 0, y + z = \frac{1}{2}$.

б) $x^2 + y^2 = 5y, x^2 + y^2 = 8y, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

Литература.

1. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС, 2006. – 304 с.

2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 2: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – Москва: ОНИКС: Мир и образование, 2006. – 416 с.

3. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 240 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: в 4 ч. Ч. 2: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие для студентов техн. специальностей вузов / под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 396 с.