Е. А. Николаева Е. Н. Грибанов

ЭКОНОМЕТРИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Учебное пособие

Кемерово 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
***«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачёва»***

Е. А. Николаева Е. Н. Грибанов

ЭКОНОМЕТРИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Учебное пособие

Кемерово 2017

УДК 519.862.6(078.5)
ББК Ув631я73

Рецензенты:

Кафедра «Бухгалтерский учет и финансы» ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт» (зав. кафедрой доцент, кандидат экономических наук К. А. Васильев)

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» А. В. Ханефт

Николаева Е. А. **Эконометрика. Математические методы обработки статистических данных** : учеб. пособие / Е. А. Николаева, Е. Н. Грибанов ; КузГТУ. – Кемерово, 2017. – 124 с.

ISBN 978-5-906888-87-7

Рассмотрены основные разделы курса «Эконометрика»: парная регрессия; множественная регрессия; временные ряды. Теоретический материал дополнен большим количеством разобранных примеров и упражнений.

Предназначено для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика».

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 519.862.6(078.5)
ББК Ув631я73

ISBN 978-5-906888-87-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эконометрика – совокупность методов анализа связей между различными экономическими показателями (факторами) на основе реальных статистических данных с использованием аппарата теории вероятностей и математической статистики. При помощи этих методов можно выявлять новые, ранее не известные связи, уточнять или отвергать гипотезы о существовании определённых связей между экономическими показателями, предлагаемые экономической теорией.

Экономисты используют количественные данные для наблюдения за ходом развития экономики, её анализа и прогнозов. Набор статистических методов, используемых для этих целей, называется в совокупности эконометрикой. Для успешного применения этих методов необходимо понимание процессов, породивших имеющиеся данные, которые мы пытаемся исследовать. Поскольку наши модели неполны, а данные несовершенны, значительная часть эконометрики посвящена методам, которые могли бы работать с такими моделями и данными. Эконометрика как наука расположена где-то между экономикой, статистикой и математикой. Один из ответов на вопрос, что такое эконометрика, может звучать так: это наука, связанная с эмпирическим выводом экономических законов. То есть мы используем данные или наблюдения для того, чтобы получить количественные зависимости для экономических соотношений. Данные, как правило, не являются экспериментальными, так как в экономике мы не можем проводить (многократные) эксперименты.

Учебное пособие «Эконометрика. Математические методы обработки статистических данных», содержащее широкий набор практических заданий, позволяет изучать данную дисциплину студентами с различным уровнем базовой подготовки. Уровень строгости и доступность изложения соответствуют программе подготовки бакалавров экономических направлений.

Глава 1. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ
Спецификация модели

Для описания количественных взаимосвязей между экономическими переменными в эконометрике используются методы регрессии.

В зависимости от количества факторов, включённых в уравнение регрессии, принято различать простую (парную) и множественную регрессии.

Простая регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными (y и x), т. е. модель вида

$$y = f(x),$$

где y – зависимая переменная (результативный признак); x – независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор).

Множественная регрессия соответственно представляет собой регрессию результативного признака с двумя и большим числом факторов, т. е. модель вида

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Любое эконометрическое исследование начинается со спецификации модели, т. е. с формулировки вида модели, исходя из соответствующей теории связи между переменными. Из всего круга факторов, влияющих на результативный признак, необходимо выделить наиболее существенные. Парная регрессия достаточна, если имеется доминирующий фактор, который и используется в качестве объясняющей переменной. В этом случае необходимо знать, какие остальные факторы предполагаются неизменными; возможно, в дальнейшем их придётся учесть в модели и от простой регрессии перейти ко множественной.

Уравнение простой регрессии характеризует связь между двумя переменными, которая проявляется как некоторая закономерность лишь в среднем в целом по совокупности наблюдений. В уравнении регрессии корреляционная связь признаков представляется в виде функциональной связи, выраженной соответствующей математической функцией. Практически в каждом отдельном случае величина y складывается из двух слагаемых:

$$y_i = y(x_i) + \varepsilon_i,$$

где y_i – фактическое значение результативного признака; $y(x_i)$ – теоретическое значение результативного признака, найденное исходя из соответствующей математической функции связи y и x, т. е. из уравнения регрессии; ε_i – случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε_i называется также возмущением. Она включает влияние не учтённых в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Её присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, выборочным характером исходных данных, особенностями измерения переменных.

К ошибкам спецификации будут относиться неправильный выбор той или иной математической функции и недоучёт в уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, т. е. использование парной регрессии вместо множественной.

Наряду с ошибками спецификации могут иметь место ошибки выборки, поскольку исследователь чаще всего имеет дело с выборочными данными при установлении закономерной связи между признаками. Ошибки выборки имеют место и в силу неоднородности данных в исходной статистической совокупности, что, как правило, бывает при изучении экономических процессов. Если совокупность неоднородна, то уравнение регрессии не имеет практического смысла. Для получения хорошего результата обычно исключают из совокупности единицы с аномальными значениями исследуемых признаков. И в этом случае результаты регрессии представляют собой выборочные характеристики.

Использование временной информации также представляет собой выборку из всего множества хронологических дат. Изменив временной интервал, можно получить другие результаты регрессии.

Наибольшую опасность в практическом использовании методов регрессии представляют ошибки измерения. Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки – увеличивая объём исходных данных, то ошибки измерения практически сводят на нет все усилия по количественной оценке связи между признаками.

Пример 1. Органы государственной статистики получают балансы предприятий, достоверность которых никто не подтверждает. Последующее обобщение такой информации может содержать ошибки измерения. Исследуя, например, в качестве результативного признака прибыль предприятий, мы должны быть уверены, что предприятия показывают в отчётности адекватные реальной действительности величины.

Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в эконометрических исследованиях уделяем ошибкам спецификации модели.

В парной регрессии выбор вида математической функции $y(x_i) = f(x)$ может быть осуществлен тремя методами:

- графическим;
- аналитическим, т. е. исходя из теории изучаемой взаимосвязи;
- экспериментальным.

При изучении зависимости между двумя признаками графический метод подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден. Он основан на поле корреляции.

Значительный интерес представляет аналитический метод выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется экспериментальным методом, т. е. путём сравнения величины остаточной дисперсии $D_{\text{ост}}$, рассчитанной при разных моделях.

Если уравнение регрессии проходит через все точки корреляционного поля, что возможно только при функциональной связи, когда все точки лежат на линии регрессии, то фактические значения результативного признака совпадают с теоретическими, т. е. они полностью обусловлены влиянием фактора x. В этом случае остаточная дисперсия $D_{\text{ост}} = 0$. В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов, т. е. отклонениями фактических данных от теоретических $(y - y(x_i))$. Величина этих отклонений лежит в основе расчёта остаточной дисперсии:

$$D_{\text{ост}} = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(y - y(x_i))^2 ,$$

где n – количество наблюдений; m – число параметров при объясняющей переменной.

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем в меньшей мере наблюдается влияние прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов и лучше уравнение регрессии подходит к исходным данным. При обработке статистических данных на компьютере перебираются разные математические функции в автоматическом режиме и из них выбирается та, для которой остаточная дисперсия является наименьшей.

Если остаточная дисперсия оказывается примерно одинаковой для нескольких функций, то на практике предпочтение отдаётся более простым видам функций, так как они в большей степени поддаются интерпретации и требуют меньшего объёма наблюдений. Результаты многих исследований подтверждают, что число наблюдений должно в 6–7 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной x. Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объёма наблюдений, так как каждый параметр при x должен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени $y(x) = a + bx + cx^2$, то требуется объём информации уже не менее 14 наблюдений. Учитывая, что эконометрические модели часто строятся по данным рядов динамики, ограниченным по протяжённости (10, 20, 30 лет), при выборе спецификации модели предпочтительна модель с меньшим числом параметров при x.

Оценка параметров линейной регрессии

Линейная регрессия находит широкое применение в эконометрике в виде чёткой экономической интерпретации её параметров. Задача линейной регрессии состоит в том, что по конкретной выборке $(x_i; y_i)$, $i = 1,2,\ldots n$, найти оценки a и b неизвестных параметров β_0 и β_1 так, чтобы построенная линия $y = \beta_0 + \beta_1 x$ являлась бы наилучшей в определённом смысле среди всех других прямых. То есть при нахождении уравнения вида $y = a + bx$.

Методом наименьших квадратов можно получить следующую формулу для нахождения параметра:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Параметр b называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу. Параметр a находится по формуле

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \bar{y} - b\bar{x}.$$

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x S_y},$$

где

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2;$$

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2};$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}.$$

Следует иметь в виду, что величина коэффициента корреляции оценивает тесноту линейной связи рассматриваемых признаков. Поэтому близость абсолютной величины линейного коэффициента корреляции к нулю ещё не означает отсутствия связи между признаками. При иной спецификации модели связь между признаками может оказаться достаточно тесной. Используя коэффициент корреляции, уравнение регрессии можно записать:

$$y-\overline{y}=r\frac{S_y}{S_x}\left(x-\overline{x}\right),$$

тогда получаем, что

$$b=r\frac{S_y}{S_x}$$

и

$$a=\bar{y}-r\frac{S_y}{S_x}\bar{x}\,.$$

Оценка существенности уравнения регрессии

После того как найдено уравнение линейной регрессии, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом даётся с помощью F-критерия Фишера. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что коэффициент регрессии равен нулю, т. е. $b=0$, т. е. фактор x не оказывает влияния на результат y.

Непосредственному расчёту F-критерия предшествует анализ дисперсии. Центральное место в нём занимает разложение общей суммы квадратов отклонений переменной y от среднего $\bar{y}$ на две части: «объяснённую» и «необъяснённую»:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y(x_i)-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-y(x_i))^2\,,$$

где $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений; $\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - \bar{y})^2$ – сумма квадратов отклонений, объяснённая регрессией; $\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений.

Общая сумма квадратов отклонений индивидуальных значений результативного признака y от среднего значения $\bar{y}$ вызвана влиянием множества причин. Условно разделим всю совокупность причин на две группы: изучаемый фактор x и прочие факторы. Если фактор не оказывает влияния на результат, то линия регрессии на графике параллельна оси Ox и $y(x_i) = \bar{y}$. Тогда вся дисперсия результативного признака обусловлена воздействием прочих факторов и общая сумма квадратов отклонений совпадёт с остаточной. Если же прочие факторы не влияют на результат, то y связан с переменной x функционально и остаточная сумма квадратов равна нулю. В этом случае сумма квадратов отклонений, объяснённая регрессией, совпадает с общей суммой квадратов.

Поскольку не все точки поля корреляции лежат на линии регрессии, то всегда имеет место их разброс как обусловленный влиянием фактора x, т. е. регрессией y по x, так и вызванный действием прочих причин (необъяснённая вариация). Пригодность линии регрессии для прогноза зависит от того, какая часть общей вариации признака y приходится на объяснённую вариацию. Очевидно, что если сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией, будет больше остаточной суммы квадратов, то уравнение регрессии статистически значимо и фактор x оказывает существенное воздействие на результат y. Это равносильно тому, что коэффициент детерминации R^2 будет приближаться к единице.

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, получим средний квадрат отклонений, или дисперсию на одну степень свободы:

$$D_{\text{общ}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n};$$

$$D_{\text{факт}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - \bar{y}\right)^2}{m};$$

$$D_{\text{ост}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - y(x_i)\right)^2}{n - m - 1},$$

где n – число наблюдении; m – число параметров при независимой переменной.

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя факторную и остаточную дисперсии в расчёте на одну степень свободы, получим величину F-критерия:

$$F = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}}$$

для проверки нулевой гипотезы $H_0 : D_{\text{факт}} = D_{\text{ост}}$.

Если нулевая гипотеза справедлива, то факторная и остаточная дисперсии не отличаются друг от друга. Для H_0 необходимо опровержение, чтобы факторная дисперсия превышала остаточную в несколько раз. Для нахождения табличного значения F-критерия задаётся уровень значимости α. Если вычисленное значение F-критерия больше табличного, нулевая гипотеза отклоняется и делается вывод о существенности связи.

Ранее было показано

$$b = r_{xy}\frac{S_y}{S_x},$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(a + bx_i - a - b\bar{x}\right)^2 =$$

$$= b^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(x - \bar{x}\right)^2 = b^2 \cdot n \cdot S_x^2,$$

отсюда

$$F=\frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-\bar{y}\right)^2(n-2)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-y_i\right)^2}=$$

$$=\frac{b^2n\sigma_x^2(n-2)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-\bar{y}\right)^2}=\frac{b^2nS_x^2(n-2)}{nS_y^2-b^2nS_x^2}=$$

$$=\frac{r^2\dfrac{S_y^2}{S_x^2}S_x^2}{S_y^2-r^2\dfrac{S_y^2}{S_x^2}S_x^2}(n-2)=\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2),$$

следовательно:

$$F=\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}(n-2).$$

Коэффициент детерминации характеризует долю дисперсии результативного признака y, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака:

$$R^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-\bar{y}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}.$$

Для линейной зависимости

$$b^2=r^2\frac{S_y^2}{S_x^2},$$

поэтому выполнено равенство

$$R^2=r_{xy}^2.$$

Действительно:

$$R^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-\bar{y}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+bx_i-a-b\bar{x}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}=$$

$$= \frac{b^2 n S_x^2}{n S_y^2} = b^2 \frac{S_x^2}{S_y^2} = r_{xy}^2.$$

Следовательно, величина $1 - r_{xy}^2$ характеризует долю дисперсии y, вызванную влиянием остальных не учтённых в модели факторов.

Пример 2. Имеется 15 пар статистических наблюдений

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	4	10	15	10	20	25	29	20	29	25	40	41	39	48	50

Требуется: 1) для заданной выборки найти уравнение линейной регрессии; 2) проверить равенство сумм; 3) вычислить значение F-критерия двумя способами; 4) проверить значимость полученного уравнения регрессии.

Решение. Найдём следующие величины:

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i = 8;$$

$$\sum_{i=1}^{15} y_i = 4 + 10 + 15 + 10 + 20 + 25 + 29 +$$

$$+ 20 + 29 + 25 + 40 + 41 + 39 + 48 + 50 = 405;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} y_i = 27;$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot y_i = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 25 + 7 \cdot 29 +$$

$$+ 8 \cdot 20 + 9 \cdot 29 + 10 \cdot 25 + 11 \cdot 40 + 12 \cdot 41 + 13 \cdot 39 + 14 \cdot 48 + 15 \cdot 50 = 4094;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i \cdot y_i = 272{,}9333;$$

$$\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 +$$

$$+ 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 = 1240;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 82{,}6667;$$

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} = 4{,}3205;$$

$$\sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 13779;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 918{,}6;$$

$$S_y = \sqrt{918{,}6 - 27^2} = 13{,}7695;$$

$$r_{xy} = \frac{272{,}9333 - 8 \cdot 27}{4{,}3205 \cdot 13{,}7695} \approx 0{,}957;$$

$$b = \frac{15 \cdot 4094 - 120 \cdot 405}{15 \cdot 1240 - 120^2} = 3{,}05;$$

$$a = \frac{1}{15}(405 - 3{,}05 \cdot 120) = 2{,}6.$$

Следовательно, уравнение линейной регрессии имеет вид $y = 2{,}6 + 3{,}05x$. Для нахождения сумм составим таблицу:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y(x_i) - \bar{y})^2$
1	4	5,65	2,72	529,00	455,82
2	10	8,70	1,69	289,00	334,89
3	15	11,75	10,56	144,00	232,56
4	10	14,80	23,04	289,00	148,84
5	20	17,85	4,62	49,00	83,72
6	25	20,90	16,81	4,00	37,21
7	29	23,95	25,50	4,00	9,30
8	20	27,00	49,00	49,00	0,00
9	29	30,05	1,10	4,00	9,30
10	25	33,10	65,61	4,00	37,21
11	40	36,15	14,82	169,00	83,72
12	41	39,20	3,24	196,00	148,84
13	39	42,25	10,56	144,00	232,56
14	48	45,30	7,29	441,00	334,89
15	50	48,35	2,72	529,00	455,82
$\sum$	405	405,00	239,30	2844,00	2604,70

Из таблицы следует:

$$\sum_{i=1}^{15} (y_i - y(x_i))^2 = 239{,}3;$$

$$\sum_{i=1}^{15}\left(y(x_i)-\bar{y}\right)^2=2604{,}7;$$

$$\sum_{i=1}^{15}\left(y_i-\bar{y}\right)^2=2844,$$

т. е. равенство сумм выполняется:

$$\sum_{i=1}^{15}\left(y_i-\bar{y}\right)^2=239{,}3+2604{,}7=2844.$$

Вычислим:

$$D_{\text{фак}}=\sum_{i=1}^{15}\left(y(x_i)-\bar{y}\right)^2=2604{,}7;$$

$$D_{\text{ост}}=\frac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{15}\left(y_i-y(x_i)\right)^2=\frac{239{,}3}{13}\approx 18{,}4077,$$

тогда значение F-критерия равно

$$F=\frac{D_{\text{фак}}}{D_{\text{ост}}}=\frac{2604{,}7}{18{,}4077}\approx 141{,}5006.$$

Используем другое соотношение:

$$F=\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}\cdot(n-2)=\frac{0{,}957^2}{1-0{,}957^2}\cdot 13\approx 141{,}5006.$$

Отсюда следует, что вычисления проведены верно и уравнение значимо, так как критическое значение F-критерия при уровне значимости $\alpha=0{,}05$ равно 4,67.

Значимость коэффициентов регрессии

Проверить значимость оценок коэффициентов регрессии – значит установить, достаточна ли величина оценки для статистически обоснованного вывода о том, что коэффициенты регрессии отличны от нуля. Для этого проверяют гипотезу о равенстве нулю коэффициентов регрессии, соблюдая предпосылки нормальной регрессии.

Стандартная ошибка коэффициента регрессии:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{D_{\text{ост}}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{D_{\text{ост}}}{n \cdot S_x^2}}.$$

Величина стандартной ошибки коэффициента совместно с t-распределением Стьюдента при $(n-2)$ степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициентов регрессии и для расчёта его доверительных интервалов. Для оценки значимости регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибкой, т. е. определяется фактическое значение t-критерия Стьюдента:

$$t_b = \left|\frac{b}{m_b}\right|,$$

которое затем сравнивается с табличным значением при определённом уровне значимости α и числе степеней свободы $(n-2)$.

Возможен и другой подход нахождения фактического значения t-критерия:

$$t_b^2 = \frac{b^2}{m_b^2} = \frac{b^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{D_{\text{ост}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - \bar{y})}{D_{\text{ост}}} = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}} = F.$$

Следовательно, $t_b = \sqrt{F}$. Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле

$$m_a = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x^2}}{S_x^2 n}\right)}$$

или

$$m_a \approx m_b \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной ранее. Вычисляется t-критерий:

$$t_a = \left|\frac{a}{m_a}\right|;$$

его величина сравнивается с табличным при $(n-2)$ степенях свободы.

Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии

$$\left(a - t_{\alpha,k} \cdot m_a; \quad a + t_{\alpha,k} \cdot m_a\right)$$

и

$$\left(b - t_{\alpha,k} \cdot m_b; \quad b + t_{\alpha,k} \cdot m_b\right),$$

где α – уровень значимости; $k = n - 2$ – число степеней свободы; $t_{\alpha,k}$ – критическое значение критерия Стьюдента (двусторонний).

Поскольку коэффициент регрессии в эконометрических исследованиях имеет чёткую экономическую интерпретацию, то доверительные границы для коэффициентов регрессии не должны содержать противоречивых результатов, например $-10 \le b \le 20$. Такого рода запись указывает, что истинное значение коэффициентов регрессии одновременно содержит положительные и отрицательные значения, чего не может быть.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}.$$

Расчётное значение критерия Стьюдента определяется как

$$t_r = \left|\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\right|.$$

Данная формула свидетельствует, что в парной линейной регрессии $t_r^2 = F$, так как $F = \dfrac{r^2}{1-r^2}(n-2)$. Кроме того $t_b = \sqrt{F}$. Следовательно, $t_b^2 = t_r^2$. Таким образом, проверка гипотез о значимости коэффициентов регрессии и корреляции равносильна проверке гипотезы о существенности линейного уравнения регрессии.

Доверительный интервал для коэффициента корреляции находится по формуле

$$thz_1 < r < thz_2,$$

где

$$z_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} - \frac{z}{\sqrt{n-3}}; \quad z_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} + \frac{z}{\sqrt{n-3}}$$

и $\Phi(z) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

Пример 3. Имеется 15 пар статистических наблюдений

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	4	10	15	10	20	25	29	20	29	25	40	41	39	48	50

Требуется: 1) проверить значимость коэффициентов регрессии и корреляции при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$; 2) построить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ доверительные интервалы для коэффициентов регрессии и коэффициента корреляции.

Решение. Найдём:

$$m_b = \sqrt{\frac{D_{\text{ост}}}{\sum\limits_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{D_{\text{ост}}}}{S_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{18{,}4077}}{4{,}3205 \cdot \sqrt{15}} \approx 0{,}2564;$$

$$t_b = \left|\frac{b}{m_b}\right| = \frac{3{,}05}{0{,}2564} \approx 11{,}8955,$$

используя другую формулу, найдём

$$t_b = \sqrt{F} = \sqrt{141{,}5} \approx 11{,}8954.$$

По уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ найдём $t_{\alpha,k}$, равное 2,16, следовательно, коэффициент регрессии значим.

Стандартную ошибку параметра a определим по формуле

$$m_a = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + D_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x^2}}{S_x^2 n}\right)\right)} =$$

$$= \sqrt{18{,}4077 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{82{,}6667}{18{,}6667 \cdot 15}\right)} \approx 2{,}581;$$

$$t_a = \left|\frac{a}{m_a}\right| = \frac{2{,}6}{2{,}581} \approx 1{,}007,$$

сравнивая с критическим значением, получаем, что параметр a не значим.

Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии $y = \beta_0 + \beta_1 x$ имеют вид:

для β_1

$$(3{,}05 - 2{,}16 \cdot 0{,}2564; \quad 3{,}05 + 2{,}16 \cdot 0{,}2564)$$

или

$$(2{,}5;\ \ 3{,}6);$$

для β_0

$$(2{,}6-2{,}16\cdot 2{,}581;\quad 2{,}6+2{,}16\cdot 2{,}581)$$

или

$$(-2{,}974;\quad 8{,}175).$$

Проверим значимость коэффициента корреляции, для этого найдём:

$$t_r=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{0{,}957\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{1-0{,}957^2}}\approx 11{,}895,$$

т. е. коэффициент корреляции значим. Запишем доверительный интервал для коэффициента корреляции, для этого вычислим:

$$z_1=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}-\frac{z}{\sqrt{n-3}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1{,}96}{0{,}043}-\frac{1{,}96}{\sqrt{12}}\approx 1{,}343;$$

$$z_2=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}+\frac{z}{\sqrt{n-3}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1{,}957}{0{,}043}+\frac{1{,}96}{\sqrt{12}}\approx 2{,}475.$$

Следовательно, доверительный интервал имеет вид $(0{,}872;\ \ 0{,}986)$.

Интервалы прогноза для линейного уравнения регрессии

В прогнозных расчётах по уравнению регрессии определяется предсказываемое значение как точечный прогноз $y(x)$. Однако точечный прогноз явно не реален, поэтому он дополняется расчётом стандартной ошибки $m_{y(x)}$ и интервальной оценкой:

$$y(x)-t_{\alpha,k}\cdot m_{y(x)}\le y\le y(x)+t_{\alpha,k}\cdot m_{y(x)}.$$

Для построения формулы для нахождения стандартной ошибки используем уравнение регрессии

$$y_x=a+bx=\bar{y}-b\bar{x}+bx=\bar{y}+b(x-\bar{x}).$$

Отсюда вытекает, что стандартная ошибка $m_{y(x)}$ зависит от ошибки $\bar{y}$ и ошибки коэффициента регрессии b. То есть

$$m_{y(x)}^2=m_{\bar{y}}^2+m_b^2(x-\bar{x})^2.$$

Но $m_{\bar{y}}^2 = \dfrac{D_{\text{ост}}}{n}$ и $m_b^2 = \dfrac{D_{\text{ост}}}{\sum\left(x - \bar{x}\right)^2}$,

отсюда следует

$$m_{y_x} = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x - \bar{x}\right)^2}\right)} = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{nS_x^2}\right)}.$$

Рассмотренная формула стандартной ошибки предсказываемого среднего значения y при заданном значении x_k характеризует ошибку положения линии регрессии. Величина стандартной ошибки $m_{y(x)}$, как видно из формулы, достигает минимума при $x_k = \bar{x}$ и возрастает по мере удаления от этого значения.

Фактические значения y варьируются около среднего значения $y(x)$. Индивидуальные значения y могут отклоняться от $y(x)$ на величину случайной ошибки ε, дисперсия которой оценивается остаточной дисперсией. Поэтому ошибка предсказываемого индивидуального значения должна включать не только стандартную ошибку $m_{y(x)}$, но и случайную ошибку $\sqrt{D_{\text{ост}}}$. Средняя ошибка прогнозируемого индивидуального значения находится по формуле

$$m_{y(x_k)} = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{nS_x^2}\right)}.$$

Пример 4. Имеется 15 пар статистических наблюдений

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	4	10	15	10	20	25	29	20	29	25	40	41	39	48	50

Найти доверительный интервал для прогнозного значения при $x = 13$.

Решение. Найдём стандартную ошибку:

$$m_{\hat{y}_x} = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{nS_x^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{18{,}4077\left(\frac{1}{15} + \frac{(13-8)^2}{15 \cdot 4{,}3205^2}\right)} \approx 1{,}694.$$

Прогнозное значение $y(13) = 42{,}25$, следовательно, интервал имеет вид $(38{,}59;\ 45{,}91)$. Эмпирическое значение равно 39 и попадает в этот интервал. Найдём среднюю ошибку прогнозируемого индивидуального значения по формуле

$$m_{y(x_k)} = \sqrt{D_{\text{ост}}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{nS_x^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{18{,}4077\left(1 + \frac{1}{15} + \frac{(13-8)^2}{15 \cdot 4{,}3205^2}\right)} \approx 4{,}613.$$

Тогда доверительный интервал имеет вид $(32{,}286;\ 52{,}214)$.

Средняя ошибка аппроксимации

Фактические значения результативного признака отличаются от теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии, т. е. y и $y(x)$. Чем меньше это отличие, тем ближе теоретические значения к эмпирическим данным, лучше качество модели. Величина отклонений фактических и расчётных значений результативного признака $(y_i - y(x_i))$ по каждому наблюдению представляет ошибку аппроксимации. Их число соответствует объёму совокупности. В отдельных случаях ошибка аппроксимации может оказаться равной нулю.

Поскольку $(y_i - y(x_i))$ может быть как величиной положительной, так и отрицательной, то ошибки аппроксимации для каждого наблюдения принято определять в процентах по модулю. Отклонения $(y_i - y(x_i))$ можно рассматривать как абсолютную ошибку аппроксимации, а $\left|\frac{y_i - y(x_i)}{y(x_i)}\right| \cdot 100\ \%$ как относительную ошибку аппроксимации. Чтобы иметь общее суждение о качестве модели из относительных отклонений наблюдений, определяют среднюю ошибку аппроксимации:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y(x_i)}{y(x_i)}\right|\cdot 100\,\%.$$

Если $\bar{y} \neq 0$, то можно использовать иное определение средней ошибки аппроксимации: $A = \frac{100}{\bar{y}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2}{n}}$. Второе определение используется тогда, когда какое-либо значение y равно нулю.

Пример 5. Имеется 15 пар статистических наблюдений

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	4	10	15	10	20	25	29	20	29	25	40	41	39	48	50

Требуется: найти среднюю ошибку аппроксимации.

Решение. Для этого составим расчётную таблицу:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\left\|\frac{y_i - y(x_i)}{y(x_i)}\right\|\cdot 100\,\%$
1	4	5,65	29,20354
2	10	8,70	14,94253
3	15	11,75	27,65957
4	10	14,80	32,43243
5	20	17,85	12,04482
6	25	20,9	19,61722
7	29	23,95	21,08559
8	20	27,00	25,92593
9	29	30,05	3,494176
10	25	33,10	24,47130
11	40	36,15	10,65007
12	41	39,20	4,59184
13	39	42,25	7,69230
14	48	45,30	5,96027
15	50	48,35	3,41262
$\sum$	405	405,00	243,18420

Следовательно, средняя ошибка аппроксимации равна:

$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{15}\left|\frac{y_i - y(x_i)}{y(x_i)}\right| \cdot 100\ \% = \frac{243{,}1842}{15} \approx 16{,}212\ \%,$$

что указывает на не совсем точное описание реального процесса.

Нелинейная регрессия

Различают два класса нелинейных регрессий:

- регрессии, нелинейные относительно включённых в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам;
- регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Основные функции, относящиеся к первому классу:

$$y = a + b\sqrt{x},$$

$$y = a + bx + cx^2,$$

$$y = a + b\ln x$$

и

$$y = a + bx^p$$

при заданном значении p.

Второй класс представлен функциями вида:

- показательная $y = ab^x$,
- степенная $y = ax^b$,
- обратная $y = \dfrac{ax}{b + x}$.

Все эти функции могут быть приведены к линейному виду $Y = a + bX$, соответствующие замены переменных приведены в таблице.

№	Функция	Замена переменных
1	$y = a + b\sqrt{x}$	$Y = y,\ X = \sqrt{x}$
2	$y = a + b\ln x$	$Y = y,\ X = \ln x$
3	$y = a + bx^p$	$Y = y,\ X = x^p$

№	Функция	Замена переменных
4	$y = a + bx + cx^2$	$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$
5	$y = ab^x$	$Y = \ln y,\ X = x$
6	$y = ax^b$	$Y = \ln y,\ X = \ln x$
7	$y = \dfrac{ax}{b + x}$	$X = \dfrac{1}{x},\ Y = \dfrac{1}{y}$

Пример 6. Задано десять пар наблюдений:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	4	3	2	1	1	3	5	7	11	16

Необходимо методом наименьших квадратов определить зависимость, имеющую наименьшую дисперсию из возможных. Предложенные зависимости имеют вид: $y = ab^x$, $y = a + b\ln x$, $y = ax^b$, $y = \dfrac{ax}{b + x}$, $y = a + bx + cx^2$.

Решение. Определим параметры зависимости $y = ab^x$. Для этого перейдём к условным вариантам по формулам

$$X = x,\ Y = \ln y$$

и составим расчётную таблицу.

№	x	y	X	Y	X^2	XY	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	2	4	2	1,3863	4	2,7726	1,4619	6,4440
2	3	3	3	1,0986	9	3,2958	1,7933	1,4560
3	4	2	4	0,6931	16	2,7726	2,2005	0,0400
4	5	1	5	0,0000	25	0,0000	2,7002	2,8910
5	6	1	6	0,0000	36	0,0000	3,3133	5,3510
6	7	3	7	1,0986	49	7,6903	4,0656	1,1350
7	8	5	8	1,6094	64	12,8755	4,9887	0,0001

№	x	y	X	Y	X^2	XY	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
8	9	7	9	1,9459	81	17,5132	6,1215	0,7720
9	10	11	10	2,3979	100	23,9790	7,5114	12,1700
10	11	16	11	2,7726	121	30,4985	9,2169	46,0100
$\sum$	65	53	65	13,0025	505	101,3974	43,372	76,2700

Найдём параметры линейного уравнения $Y = A + BX$ по формулам

$$B = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{10\cdot 101{,}3974 - 65\cdot 13{,}0025}{10\cdot 505 - 65^2} \approx 0{,}2462;$$

$$A = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{10}(13{,}0025 - 0{,}2462\cdot 65) = -0{,}02978.$$

Найдём параметры нелинейной регрессии по формулам

$$b = e^B = e^{0{,}2462} = 1{,}227;\ a = e^A = e^{-0{,}02978} = 0{,}97.$$

По полученному уравнению $y(x) = 0{,}97\cdot 1{,}227^x$ находим расчётные значения $y(x_i)$ и записываем в таблицу.

Затем находим остаточную дисперсию

$$D_{\text{ост}} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2 \approx \frac{1}{8}\cdot 76{,}27 \approx 9{,}534.$$

Определим параметры зависимости $y = a + b\ln x$. Для этого перейдём к условным вариантам по формулам $Y = y$, $X = \ln x$ и составим расчётную таблицу:

№	x	y	X	Y	X^2	XY	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	2	4	0,6931	4	0,4804	2,7726	–0,3502	18,9244
2	3	3	1,0986	3	1,2069	3,2958	1,8170	1,3994
3	4	2	1,3863	2	1,9218	2,7726	3,3547	1,8353
4	5	1	1,6094	1	2,5903	1,6094	4,5474	12,5844
5	6	1	1,7918	1	3,2104	1,7918	5,5219	20,4483
6	7	3	1,9459	3	3,7866	5,8377	6,3459	11,1952
7	8	5	2,0779	5	4,3241	10,3972	7,0597	4,2422
8	9	7	2,1972	7	4,8277	15,3805	7,6892	0,4750
9	10	11	2,3026	11	5,3019	25,3284	8,2524	7,5494
10	11	16	2,3979	16	5,7499	38,3663	8,7618	52,3911

$\sum$	65	53	17,5023	53	33,4002	107,5525	53,0000	131,0446

Найдём параметры линейного уравнения $Y = A + BX$ по формулам

$$B = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{10\cdot 107{,}5525 - 17{,}5023\cdot 53}{10\cdot 33{,}4002 - 17{,}5023^2} \approx 5{,}345;$$

$$A = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{10}(53 - 5{,}345\cdot 17{,}5023) = -4{,}0552.$$

Найдём параметры нелинейной регрессии по формулам

$$b = B = 5{,}345;\ a = A = -4{,}0552.$$

По полученному уравнению $y = -4{,}0552 + 5{,}345\ln x$ находим расчётные значения $y(x_i)$ и записываем в таблицу. Затем находим остаточную дисперсию:

$$D_{\text{ост}} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2 \approx \frac{1}{8}\cdot 131{,}0446 \approx 16{,}38.$$

Определим параметры зависимости $y = ax^b$. Для этого перейдём к условным вариантам по формулам $Y = \ln y$; $X = \ln x$ и составим расчётную таблицу:

№	x	y	X	Y	X^2	XY	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	2	4	0,6931	1,3863	0,4804	0,9609	1,5237	6,1323
2	3	3	1,0986	1,0986	1,2069	1,2069	2,1347	0,7487
3	4	2	1,3863	0,6931	1,9218	0,9609	2,7117	0,5065
4	5	1	1,6094	0,0000	2,5903	0,0000	3,2647	5,1287
5	6	1	1,7918	0,0000	3,2104	0,0000	3,7992	7,8354
6	7	3	1,9459	1,0986	3,7866	2,1378	4,3188	1,7394
7	8	5	2,0779	1,6094	4,3241	3,3467	4,8261	0,0302
8	9	7	2,1972	1,9459	4,8277	4,2756	5,3228	2,8131
9	10	11	2,3026	2,3979	5,3019	5,5214	5,8102	26,9337
10	11	16	2,3979	2,7726	5,7499	6,6484	6,2895	94,2933
$\sum$	65	53	17,5023	13,0025	33,4002	25,0586	40,0014	146,1613

Найдём параметры линейного уравнения $Y = A + BX$ по формулам

$$B=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{10\cdot 25{,}0586-17{,}5023\cdot 13{,}0025}{10\cdot 33{,}4002-17{,}5023^2}\approx 0{,}8317;$$

$$A=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{10}(13{,}0025-0{,}8317\cdot 17{,}5023)=-0{,}1554.$$

Найдём параметры нелинейной регрессии по формулам $b=B=0{,}8317$; $a=e^A=e^{-0{,}1554}=0{,}8561$. По полученному уравнению $y(x)=0{,}8561\cdot x^{0{,}8317}$ находим расчётные значения $y(x_i)$ и записываем в таблицу. Затем находим остаточную дисперсию:

$$D_{\text{ост}}=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y(x_i))^2\approx\frac{1}{8}\cdot 146{,}1613\approx 18{,}27.$$

Определим параметры зависимости $y=\dfrac{ax}{b+x}$. Для этого перейдём к условным вариантам по формулам $Y=\dfrac{1}{y}$, $X=\dfrac{1}{x}$ и составим расчётную таблицу:

№	x	y	X	Y	X^2	XY	$y(x_i)$	$(y_i-y(x_i))^2$
1	2	4	0,5000	0,2500	0,2500	0,1250	2,1182	3,5410
2	3	3	0,3333	0,3333	0,1111	0,1111	2,3424	0,4327
3	4	2	0,2500	0,5000	0,0625	0,1250	2,4733	0,2241
4	5	1	0,2000	1,0000	0,0400	0,2000	2,5591	2,4310
5	6	1	0,1667	1,0000	0,0278	0,1667	2,6197	2,6236
6	7	3	0,1429	0,3333	0,0204	0,0476	2,6648	0,1124
7	8	5	0,1250	0,2000	0,0156	0,0250	2,6996	5,2917
8	9	7	0,1111	0,1429	0,0123	0,0159	2,7274	18,2555
9	10	11	0,1000	0,0909	0,0100	0,0090	2,7499	68,0634
10	11	16	0,0909	0,0625	0,0083	0,0057	2,7687	175,0669
$\sum$	65	53	2,0198	3,9129	0,5580	0,8310	25,7234	276,0418

Найдём параметры линейного уравнения $Y=A+BX$ по формулам

$$B=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}=\frac{10\cdot 0{,}831-2{,}0198\cdot 3{,}9129}{10\cdot 0{,}558-2{,}0198^2}\approx 0{,}2711;$$

$$A=\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{10}(3{,}9129-0{,}2711\cdot 2{,}0198)=0{,}3365.$$

Найдём параметры нелинейной регрессии по формулам

$$b=\frac{B}{A}=\frac{0{,}2711}{0{,}3365}=0{,}8056;\ a=\frac{1}{A}=\frac{1}{0{,}3365}=2{,}9715.$$

По полученному уравнению $y(x)=\dfrac{2{,}9715x}{0{,}8056+x}$ находим расчётные значения $y(x_i)$ и записываем в таблицу. Затем находим остаточную дисперсию:

$$D_{\text{ост}}=\frac{1}{n-2}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-y(x_i))^2\approx\frac{1}{8}\cdot 276{,}0418\approx 34{,}505.$$

Определим параметры зависимости $y=a+bx+cx^2$. Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot n+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+c\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i;\\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i;\\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i. \end{cases}$$

Для нахождения требуемых сумм составим расчётную таблицу:

№	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	$y(x_i)$	$(y_i-y(x_i))^2$
1	2	4	4	8	16	8	16	4,5363	0,2877
2	3	3	9	27	81	9	27	2,5848	0,1724
3	4	2	16	64	256	8	32	1,4288	0,3263
4	5	1	25	125	625	5	25	1,0681	0,0046
5	6	1	36	216	1296	6	36	1,5030	0,2530
6	7	3	49	343	2401	21	147	2,7333	0,0711

№	x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
7	8	5	64	512	4096	40	320	4,7591	0,0580
8	9	7	81	729	6561	63	567	7,5803	0,3368
9	10	11	100	1000	10000	110	1100	11,1970	0,0388
10	11	16	121	1331	14641	176	1936	15,6090	0,1528
$\sum$	65	53	505	4335	39973	446	4206	53,0000	1,7015

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 10a + 65b + 505c = 53; \\ 65a + 505b + 4335c = 446; \\ 505a + 4335b + 39973c = 4206. \end{cases}$$

Для решения этой системы используем метод Крамера. Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 65 & 505 \\ 65 & 505 & 4335 \\ 505 & 4335 & 39973 \end{vmatrix} = 435600$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 53 & 65 & 505 \\ 446 & 505 & 4335 \\ 4206 & 4335 & 39973 \end{vmatrix} = 4715700$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 10 & 53 & 505 \\ 65 & 446 & 4335 \\ 505 & 4206 & 39973 \end{vmatrix} = -1716330$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 10 & 65 & 53 \\ 65 & 505 & 446 \\ 505 & 4335 & 4206 \end{vmatrix} = 173250$$

Вычисление значений определителей можно найти с помощью любой программы, например Microsoft Excel, используя функцию «МОПРЕД».

По правилу Крамера вычисляем значения параметров:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{4715700}{435600} \approx 10{,}8258;$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-1716330}{435600} \approx -3{,}9402;$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{173250}{435600} \approx 0{,}3977.$$

По полученному уравнению $y = 10{,}8258 - 3{,}9402x + 0{,}3977x^2$ находим расчётные значения $y(x_i)$ и записываем в таблицу. Затем находим остаточную дисперсию:

$$D_{\text{ост}} = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2 \approx \frac{1}{7}\cdot 1{,}7015 \approx 0{,}2431.$$

Наименьшую остаточную дисперсию имеет уравнение регрессии $y = a + bx + cx^2$. Следовательно, оно является лучшим для описания характера изменения y.

Среди нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду, в эконометрических исследованиях широко используется степенная функция $y = ax^b$. Связано это с тем, что параметр b в ней имеет чёткое экономическое обоснование – он является коэффициентом эластичности и показывает, на сколько процентов в среднем изменится результат, если фактор изменится на $1\,\%$.

Для расчёта коэффициента эластичности используют формулу

$$Э = f'(x)\frac{x}{y}.$$

В силу того, что для некоторых зависимостей коэффициент эластичности зависит от соответствующего значения x, обычно рассчитывают средний коэффициент эластичности:

$$\overline{Э} = f'(\bar{x})\frac{\bar{x}}{f(\bar{x})}.$$

Пример 7. Задано десять пар наблюдений:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	4	3	2	1	1	3	5	7	11	16

Найти средний коэффициент эластичности для зависимости $y = a + bx + cx^2$.

Решение. Так как $f'(x) = b + 2cx$ (пример 6), то при $\bar{x} = 6{,}5$ получаем

$$f(6{,}5) = 10{,}8258 - 3{,}9402 \cdot 6{,}5 + 0{,}3977 \cdot 6{,}5^2 \approx 2{,}0188;$$
$$f'(\bar{x}) = -3{,}9402 + 2 \cdot 0{,}3977 \cdot 6{,}5 \approx 1{,}2303,$$

тогда средний коэффициент эластичности равен

$$\bar{Э} = 1{,}2303 \cdot \frac{6{,}5}{2{,}0188} \approx 3{,}96.$$

Корреляция для нелинейной регрессии

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейной зависимости, дополняется показателем корреляции, а именно индексом корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Величина данного показателя находится в границах $0 \le R \le 1$, чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, тем более надёжно найденное уравнение регрессии. Поскольку в расчёте индекса корреляции используются отношения факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент детерминации. В специальных исследованиях величину R^2 для нелинейных связей называют индексом детерминации.

Оценка существенности индекса корреляции проводится так же, как и оценка надёжности коэффициента корреляции. Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{D_{\text{фак}}}{D_{\text{ост}}},$$

где

$$D_{\text{фак}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - \bar{y})^2;$$

$$D_{\text{ост}} = \frac{1}{n - m - 1} \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_i)^2.$$

Второй способ нахождения этого значения через индекс детерминации:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m},$$

где R^2 – индекс детерминации; n – число наблюдений; m – число параметров при переменных x. Величина m характеризует число степеней свободы для факторной дисперсии, $(n-m-1)$ – число степеней для остаточной дисперсии. Значения F-критерия, вычисленные по этим двум формулам, совпадают, если выполнено равенство сумм.

Пример 8. Задано десять пар наблюдений:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	4	3	2	1	1	3	5	7	11	16

Найти индекс корреляции, значение F-критерия и среднюю ошибку аппроксимации.

Решение. Для нахождения требуемых величин составим расчётную таблицу:

№	x	y	$y(x_i)$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(y_i-y(x_i))^2$	$(y(x_i)-\bar{y})^2$	$\left\lvert\frac{y_i-y(x_i)}{y(x_i)}\right\rvert$
1	2	4	4,5363	1,69	0,2877	0,58314	0,118236
2	3	3	2,5848	5,29	0,1724	7,37205	0,16061
3	4	2	1,4288	10,89	0,3263	14,98628	0,39979
4	5	1	1,0681	18,49	0,0046	17,90829	0,06383
5	6	1	1,5030	18,49	0,2530	14,41698	0,33468
6	7	3	2,7333	5,29	0,0711	6,58778	0,097561
7	8	5	4,7591	0,09	0,0580	0,29259	0,050621
8	9	7	7,5803	2,89	0,3368	5,19979	0,076554
9	10	11	11,197	32,49	0,0388	34,77425	0,017591
10	11	16	15,609	114,49	0,1528	106,27740	0,025044
$\sum$	65	53	53,0000	210,10	1,7015	208,39850	1,34451

Тогда индекс корреляции равен:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = 1 - \frac{1{,}7015}{210{,}1} \approx 0{,}9919.$$

Если выполнено равенство сумм, то для нахождения индекса корреляции можно использовать формулу

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} = \frac{208{,}3985}{2101{,}1} = 0{,}9919.$$

Равенство сумм в данном примере

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - \bar{y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - y_i\right)^2 = 208{,}3985 + 1{,}7015 = 210{,}1 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

выполнено. Значение F-критерия найдём по формуле

$$F = \frac{D_{\text{фак}}}{D_{\text{ост}}},$$

где

$$D_{\text{фак}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i) - \bar{y}\right)^2 = \frac{1}{2}208{,}398 = 104{,}199,$$

остаточная дисперсия найдена была ранее (пример 7) и равна:

$$D_{\text{ост}} = 0{,}2431.$$

Следовательно, значение F-критерия

$$F = \frac{104{,}1992}{0{,}2431} = 428{,}6736.$$

По другой формуле имеем

$$F = \frac{0{,}9919}{1 - 0{,}9919} \cdot \frac{7}{2} = 428{,}6736.$$

Критическое значение F-критерия равно $F(0{,}95;\ 2;\ 7) = 4{,}73$. Так как наблюдаемое значение больше критического, то уравнение регрессии в целом значимо. Средняя ошибка аппроксимации составит:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y(x_i) - y_i}{y(x_i)}\right| \cdot 100\,\% = \frac{1}{10} \cdot 1{,}3445 \cdot 100\,\% = 13{,}445\,\%.$$

Индекс детерминации R^2 можно сравнивать с коэффициентом детерминации r_{xy}^2 для обоснования возможности применения линейной функции. Чем больше кривизна линии регрессии, тем величина коэффициента r_{xy}^2 меньше индекса детерминации R^2. Близость этих показателей означает, что нет необходимости усложнять форму уравнения регрессии и можно использовать линейную функцию. Практически, если разность величин $R_{xy}^2 - r_{xy}^2$ не превышает 0,1, то предположение о линейной форме связи считается оправданным. В противном случае проводится оценка существенности различия R_{xy}^2 и r_{xy}^2, вычисленных по одним и тем же исходным данным, через t-критерий Стьюдента:

$$t = \frac{R_{xy}^2 - r_{xy}^2}{m_{|R-r|}},$$

где $m_{|R-r|}$ – ошибка разности между R_{xy}^2 и r_{xy}^2, определяемая по формуле

$$m_{|R-r|} = 2\sqrt{\frac{\left(R^2 - r^2\right) - \left(R^2 - r^2\right)^2\left(2 - \left(R^2 + r^2\right)\right)}{n}}.$$

Если $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, то различия между рассматриваемыми показателями корреляции существенны и замена нелинейной регрессии уравнением линейной функции невозможна. Практически, если величина $t < 2$, то различия между R_{xy}^2 и r_{xy}^2 несущественны и, следовательно, возможно применение линейной регрессии, даже если есть предположения о некоторой нелинейности рассматриваемых соотношений признаков факторов и результата.

Пример 9.

Задано десять пар наблюдений:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	4	3	2	1	1	3	5	7	11	16

Возможно ли применить линейную зависимость вместо параболической зависимости?

Решение. Найдём коэффициент корреляции по формуле

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x S_y},$$

где

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{1}{10} \cdot 446 = 44{,}6;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10} \cdot 65 = 6{,}5;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{10} 53 = 5{,}3;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{10} \cdot 505 = 50{,}5;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{10} \cdot 491 = 49{,}1;$$

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \approx 2{,}872;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} \approx 4{,}584.$$

Тогда

$$r = \frac{44{,}6 - 6{,}5 \cdot 5{,}3}{2{,}872 \cdot 4{,}584} \approx 0{,}771.$$

Найдём ошибку разности:

$$m_{|R-r|} = 2\sqrt{\frac{0{,}9919 - 0{,}5944 - (0{,}9919 - 0{,}5944)^2 (2 - 0{,}9919 - 0{,}5944)}{10}} \approx$$

$$\approx 0{,}3645.$$

Расчётное значение F-критерия равно

$$t = \frac{0{,}9919 - 0{,}5944}{0{,}3645} \approx 1{,}09.$$

Полученное значение меньше критического: $t_{\text{кр}}(0{,}05;\, 8) = 2{,}306$, следовательно, при необходимости можно параболическую зависимость заменить линейной.

Глава 2. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ
Спецификация модели

Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Поведение отдельных экономических переменных контролировать нельзя, т. е. не удаётся обеспечить равенство всех прочих условий для оценки влияния одного исследуемого фактора. В этом случае можно попытаться выявить влияние других факторов, введя их в модель, т. е. построить уравнение множественной регрессии. Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчётах и т. д. В настоящее время множественная регрессия – один из наиболее распространённых методов в эконометрике. Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель. Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Суть проблемы спецификации включает в себя два круга вопросов: отбор факторов и выбор вида уравнения регрессии. Их решение при построении модели множественной регрессии имеет некоторую специфику.

Отбор факторов при построении множественной регрессии

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано прежде всего с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями. Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям.

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определённость (например, в модели урожайности качество почвы задаётся в виде баллов).

2. Факторы не должны быть интеркоррелированы и тем более находиться в точной функциональной связи.

Включение в модель факторов с высокой интеркорреляцией, когда $R_{yx_1} < R_{x_1x_2}$ для зависимости $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$ может привести к нежелательным последствиям – система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной и повлечь за собой неустойчивость и ненадёжность оценок коэффициентов регрессии. Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии оказываются не интерпретируемыми. Так, в уравнении $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$ предполагается, что факторы x_1 и x_2 независимы друг от друга, т. е. $r_{x_1x_2} = 0$. Тогда можно говорить, что параметр b_1 измеряет силу влияния фактора x_1 на результат y при неизменном значении фактора x_2. Если же $r_{x_1x_2} = 1$, то с изменением фактора x_1 фактор x_2 не может оставаться неизменным. Отсюда b_1 и b_2 нельзя интерпретировать как показатели раздельного влияния x_1 и x_2 на y.

Включаемые во множественную регрессию факторы должны объяснить вариацию независимой переменной. Если строится модель с набором p факторов, то для неё рассчитывается показатель детерминации R, который фиксирует долю объяснённой вариации результативного признака за счёт рассматриваемых в регрессии p факторов. Влияние других не учтённых в модели факторов оценивается как $1 - R^2$ с соответствующей остаточной дисперсией $D_{\text{ост}}$.

При дополнительном включении в регрессию $p+1$ фактора коэффициент детерминации должен возрастать, а остаточная дисперсия уменьшаться. Если же этого не происходит и данные показатели практически мало отличаются друг от друга, то включаемый в анализ фактор x_{p+1} не улучшает модель и практически является лишним фактором. Так, если для регрессии, включающей пять факторов, коэффициент детерминации составил 0,857 и включение шестого фактора дало коэффициент детерминации 0,858, то вряд ли целесообразно дополнительно включать в модель этот фактор. Насыщение модели лишними факторами не только не снижает величину остаточной дисперсии и не увеличивает показатель детерминации, но и приводит к статистической незначимости параметров регрессии по t-критерию Стьюдента.

Таким образом, хотя теоретически регрессионная модель позволяет учесть любое число факторов, практически в этом нет необходимости. Отбор факторов производится на основе качественного теоретико-экономического анализа. Однако теоретический анализ часто не позволяет однозначно ответить на вопрос о количественной взаимосвязи рассматриваемых признаков и целесообразности включения фактора в модель. Поэтому отбор факторов обычно осуществляется в две стадии: на первой подбираются факторы исходя из сущности проблемы; на второй – на основе матрицы показателей корреляции определяют t-статистики для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции (т. е. корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменных явно коллинеарны, т. е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{x_1x_2} \geq 0{,}7$.

Поскольку одним из условий построения уравнения множественной регрессии является независимость действия факторов, то $r_{x_ix_j} = 0$. Коллинеарность факторов нарушает это условие. Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдаётся не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Пример 10. При изучении зависимости $y = f(x; z; v)$ матрица парных коэффициентов корреляции оказалась следующей:

	y	x	z	v
y	1,0			
x	0,8	1,0		
z	0,7	0,8	1,0	
v	0,6	0,5	0,2	1,0

Какие факторы необходимо включать в уравнение множественной регрессии?

Решение. По данным таблицы очевидно, что факторы x и z дублируют друг друга. В анализ целесообразно включить фактор z, а не x, так как хотя корреляция z с результатом y слабее, чем корреляция фактора x с y ($r_{yz} = 0{,}7 \;\; < \;\; r_{yx} = 0{,}8$), но зато слабее межфакторная корреляция $r_{zv} = 0{,}2 \;\; < \;\; r_{xv} = 0{,}5$. Поэтому в данном случае в уравнение множественной регрессии включаются факторы z и v.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии мультиколлинеарности факторов, когда более чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью, т. е. имеет место совокупное воздействие факторов друг на друга. Наличие мультиколлинеарности факторов может означать, что некоторые факторы будут всегда действовать в унисон. В результате вариация в исходных данных перестаёт быть полностью независимой и нельзя оценить воздействие каждого фактора в отдельности. Чем сильнее мультиколлинеарность факторов, тем менее надёжна оценка распределения суммы объяснённой вариации по отдельным факторам с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Если рассматривается регрессия $y = a + bx + cz + dv + \varepsilon$, то для расчёта параметров, применяя МНК, предполагается равенство

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y(\vec{x}) - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - y(\vec{x}))^2.$$

При независимости факторов друг от друга факторная сумма квадратов отклонений равна сумме квадратов отклонений, обусловленной влиянием каждого фактора.

Если же факторы интеркоррелированы, то данное равенство нарушается.

Включение в модель мультиколлинеарных факторов нежелательно, потому что:

- затрудняется интерпретация параметров множественной регрессии как характеристик действия факторов в «чистом» виде;
- параметры линейной регрессии теряют экономический смысл;

• оценки параметров ненадёжны, обнаруживают большие стандартные ошибки и меняются с изменением объёма наблюдений (не только по величине, но и по знаку), что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы $r_{x_i x_j}\left(x_i \neq x_j\right)$ были бы равны нулю. Уравнение с тремя некоррелированными переменными имеет вид

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \varepsilon,$$

тогда определить матрицы коэффициентов корреляции между факторами равен:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & r_{x_1 x_3} \\ r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & r_{x_2 x_3} \\ r_{x_3 x_1} & r_{x_3 x_2} & r_{x_3 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны единице, то определитель такой матрицы равен нулю:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадёжнее результаты множественной регрессии. И, наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Оценка значимости мультиколлинеарности факторов может быть проведена методом испытания гипотезы о независимости переменных $H_0: \ \Delta r_{11} = 1$. Доказано, что величина

$$m - 1 - \frac{1}{6}(2n + 5)\lg\left|\Delta r_{11}\right|$$

имеет приближённое распределение χ^2 с $\left[\frac{1}{2}m(m-1)\right]$ степенями свободы, где n – число наблюдений; m – число факторов. Если фактическое значение распределения χ^2 превосходит табличное, то гипотеза H_0 отклоняется. Это означает, что $\Delta r_{11} \neq 1$, недиагональные ненулевые коэффициенты корреляции указывают на коллинеарность факторов. Мультиколлинеарность считается доказанной. Через значение определителя межфакторной корреляции можно найти переменные, ответственные за мультиколлинеарность факторов. Для этого в качестве зависимой переменной рассматривается каждый из факторов. Чем ближе значение определителя межфакторной корреляции к нулю, тем сильнее проявляется мультиколлинеарность факторов. Сравнивая между собой эти значения, можно выделить переменные, ответственные за мультиколлинеарность, следовательно, можно решать проблему отбора факторов, оставляя в уравнении факторы с минимальной величиной коэффициента множественной детерминации.

Оценка параметров уравнения множественной регрессии

Параметры уравнения множественной регрессии оцениваются по МНК. Используя МНК, составляют систему линейных уравнений, решение которой позволяет находить оценки параметров регрессии. Возможен и другой подход к определению параметров множественной регрессии, когда на основе матрицы парных коэффициентов корреляции строится уравнение регрессии в стандартизованном масштабе:

$$t_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \ldots + \beta_p \cdot t_{x_p},$$

где

$$t_y = \frac{y_i - \bar{y}}{S_y}; \quad t_{x_k} = \frac{x_k - \bar{x}_k}{S_{x_k}}$$

– стандартизованные переменные, для которых среднее значение равно нулю, а среднее квадратическое отклонение равно единице. Параметры $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ можно найти методом МНК.

В парной зависимости стандартизованный коэффициент регрессии есть линейный коэффициент корреляции. Во множественной регрессии коэффициенты b_i связаны со стандартизованными коэффициентами β_i зависимостью $b_i = \beta_i \dfrac{S_y}{S_{x_i}}$. Это позволяет от уравнения регрессии в стандартизованном масштабе

$$t_y = \beta_1 \cdot t_{x_1} + \beta_2 \cdot t_{x_2} + \ldots + \beta_p \cdot t_{x_p}$$

переходить к уравнению регрессии в натуральном масштабе переменных

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p.$$

Параметр a равен

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \ldots - b_p \bar{x}_p.$$

Пример 11. Множественная регрессия. Исходные данные:

№	y	x_1	x_2	x_3	x_4
1	59,69	24,00	5,30	24,56	29,69
2	53,71	6,75	16,08	28,01	24,59
3	81,44	19,32	17,06	22,46	37,65
4	74,58	19,60	0,76	10,79	20,63
5	36,29	2,47	–9,96	5,90	–4,77
6	95,19	24,67	17,96	13,40	43,62
7	82,96	28,13	4,80	–3,10	32,95
8	58,24	14,83	15,58	17,87	31,22
9	82,74	27,57	37,52	25,70	63,01
10	58,13	11,88	28,08	21,20	38,63
11	62,21	20,48	30,56	35,09	48,95
12	47,34	7,90	10,36	31,07	19,13
13	89,80	18,15	14,26	8,87	34,39
14	85,29	29,40	29,08	21,08	55,68
15	14,78	–6,85	2,06	31,61	-2,56
16	65,04	18,25	0,66	19,31	19,69
17	45,04	11,40	2,16	18,62	14,44
18	69,31	12,93	20,74	16,19	34,39
19	58,71	9,62	10,14	13,28	20,75
20	85,92	17,95	16,00	15,08	35,67
21	60,61	17,88	8,30	33,26	27,92
22	60,61	22,25	–0,28	30,41	22,88
23	57,80	24,43	–0,22	31,43	25,10
24	64,33	18,62	–0,92	18,71	19,51
25	22,90	–4,52	5,22	31,37	2,70
26	50,81	–2,32	12,54	2,39	11,40

№	y	x_1	x_2	x_3	x_4
27	59,16	17,97	–0,56	17,93	19,09
28	59,47	23,35	3,26	25,46	27,43
29	56,22	10,50	8,10	20,33	20,20
30	68,92	23,00	18,30	34,94	40,97
31	49,62	12,93	7,62	23,99	22,54
32	51,42	9,88	14,36	23,81	25,63
33	54,19	8,02	5,10	–1,69	14,91
34	55,40	16,97	9,40	11,99	25,75
35	36,67	17,03	–7,38	39,77	10,82
36	80,61	21,43	13,82	11,00	35,52
37	88,94	16,35	33,62	24,77	50,93
38	95,57	19,13	16,88	7,91	35,21
39	84,29	24,15	16,46	26,84	39,07
40	45,83	10,07	10,30	35,06	20,77
41	52,80	9,70	19,14	29,12	30,34
42	71,22	20,62	–3,12	-3,19	19,41
43	35,78	15,37	–25,64	13,25	–7,70
44	59,51	16,67	12,88	15,98	30,71
45	43,82	2,92	15,7	22,34	19,18
46	55,18	17,13	4,46	32,09	22,41
47	51,43	11,20	4,90	19,58	17,36
48	56,84	17,63	7,52	9,50	25,57
49	77,65	25,65	–2,36	10,07	23,07
50	74,93	27,77	2,62	27,95	31,36

1. Проверить факторы на мультиколлинеарность, выявить фактор ответственный за мультиколлинеарность и удалить его.

2. Составить уравнение регрессии в стандартизованном виде и в натуральном масштабе.

Решение. Найдём основные числовые характеристики, среднее квадратическое отклонение найдём как корень из дисперсии:

Среднее значение	61,77600	15,80467	9,58440	20,06720	26,15667
Среднее квадратическое отклонение	17,60612	8,19849	11,31237	10,37851	13,86945

Составим матрицу парных коэффициентов корреляции, используя Excel «анализ данных», «корреляция»:

	y	x_1	x_2	x_3	x_4
y	1,000000	0,742113	0,469343	–0,309620	0,782799
x_1	0,742113	1,000000	0,117338	–0,034460	0,643305
x_2	0,469343	0,117338	1,000000	0,176933	0,833674
x_3	–0,309620	–0,034460	0,176933	1,000000	0,113465
x_4	0,782799	0,643305	0,833674	0,113465	1,000000

Проверим факторы на мультиколлинеарность. Вычислим расчётное значение критерия χ^2 по формуле

$$m-1-\frac{1}{6}(2n+5)\lg\left|\Delta r_{11}\right|=46{,}86917,$$

где $m=4;\quad n=50;\ \Delta r_{11}=0{,}003113.$

Используя Excel и функцию ХИ2ОБР(0,05; 6), где 6 – число степеней свободы, находим критическое значение, равное 12,59159. Следовательно, в данном наборе факторов присутствует мультиколлинеарность. Определим фактор, ответственный за мультиколлинеарность. Анализ матрицы парных коэффициентов позволяет предположить, что это x_4, так как он имеет большие коэффициенты корреляции с остальными факторами. Проверим это, используя значения определителя межфакторной корреляции при удалении одного фактора. Если удалить x_1, получим значение Δr_{11}, равное 0,294281, при удалении x_2 получим 0,567066, при удалении x_3 получим 0,003236, при удалении x_4 получим 0,952308. Следовательно, удаляя x_4, мы получаем наибольшее значение определителя межфакторной корреляции. Проверим на мультиколлинеарность оставшиеся три фактора. Найдём расчётное значение критерия χ^2, равное 2,371397, критическое значение критерия при степенях свободы, равном 3, составляет 7,814728. Следовательно, при удалении четвертого фактора мы избавляемся от мультиколлинеарности. Этот же вывод можно сделать, проанализировав матрицу парных коэффициентов корреляции. Очевидно, что факторы x_2 и x_4 находятся в линейной зависимости и поэтому нужно удалить один из них. Но как указано ранее, x_4 имеет большие коэффициенты корреляции с остальными факторами. Поэтому удаляем x_4, а оставляем x_2. Правда, при этом может возникнуть ситуация, когда один удаляемый фактор оказывает большее влияние на результативный признак, чем три оставшихся. В этом случае оставляют самый значимый признак и к нему присоединяют по одному оставшиеся факторы, на каждом шаге проверяя наличие мультиколлинеарности.

Составим уравнение регрессии в стандартизованном масштабе. Для этого составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 r_{21} + \beta_3 r_{31} = r_{1y}; \\ \beta_1 r_{12} + \beta_2 + \beta_3 r_{32} = r_{2y}; \\ \beta_1 r_{13} + \beta_2 r_{23} + \beta_3 = r_{3y}, \end{cases}$$

тогда

$$\beta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

или

$$\begin{cases} \beta_1 + 0{,}117338\beta_2 - 0{,}03446\beta_3 = 0{,}742113; \\ 0{,}117338\beta_1 + \beta_2 + 0{,}176933\beta_3 = 0{,}469343; \\ -0{,}03446\beta_1 + 0{,}176933\beta_2 + \beta_3 = -0{,}30962. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом Крамера: вычислим требуемые определители и найдём их значения: $\Delta = 0{,}952308$, $\Delta_1 = 0{,}643849$, $\Delta_2 = 0{,}433216$, $\Delta_3 = -0{,}34931$, получим уравнение в стандартизованном масштабе:

$$t_y = 0{,}676093 t_{x_1} + 0{,}454912 t_{x_2} - 0{,}36681 t_{x_3}.$$

Найдём уравнение в натуральном масштабе. Для этого найдём коэффициенты регрессии, используя формулу

$$b_i = \beta_i \frac{S_y}{S_{x_i}},$$

и параметр регрессии вычисляем по формуле

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - b_3\bar{x}_3.$$

Получаем

$$b_1 = 1{,}451898, \quad b_2 = 0{,}708007, \quad b_3 = -0{,}62225, \quad a = 44{,}5304.$$

Следовательно, уравнение регрессии в натуральном масштабе имеет вид

$$y = 44{,}5304 + 1{,}451898x_1 + 0{,}708007x_2 - 0{,}62225x_3.$$

Множественная корреляция

Показатель множественной корреляции характеризует тесноту связи рассматриваемого набора факторов с исследуемым признаком или оценивает тесноту совместного влияния факторов на результат. Независимо от формы связи показатель множественной корреляции может быть найден по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}.$$

Величина показателя множественной корреляции больше или равна максимальному парному индексу корреляции. При линейной зависимости признаков формула показателя корреляции равна

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_{x_i} r_{y,x_i}},$$

где β_{x_i} – стандартизованные коэффициенты регрессии; r_{y,x_i} – парные коэффициенты корреляции результативного признака с каждым фактором. Также при линейной зависимости можно определить показатель корреляции по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}},$$

где Δr – определитель матрицы парных коэффициентов корреляции; Δr_{11} – определитель матрицы межфакторной корреляции. Проверка значимости уравнения регрессии в целом проводится с использованием F-критерия Фишера. Для этого находится расчётное значение критерия по формуле

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m}$$

или

$$F = \frac{D_{\text{фак}}}{D_{\text{ост}}},$$

которое затем сравнивается с критическим при уровне значимости α и степенях свободы большей дисперсии m и меньшей дисперсии $n-m-1$. Если наблюдаемое значение меньше критического, то нулевая гипотеза о незначимости уравнения регрессии принимается, в противном случае уравнение регрессии значимо. Расчётные значения показателя множественной корреляции, полученные по разным формулам, должны совпадать, так же как расчётные значения критерия Фишера. Средняя ошибка аппроксимации находится так же, как и при парной регрессии.

Пример 12. По данным примера 11 найти индекс множественной корреляции тремя способами и сравнить полученные значения. Оценить значимость уравнения регрессии по F-критерию. Значение критерия рассчитать двумя способами, оценить качество уравнения через среднюю ошибку аппроксимации.

Решение. Составим расчётные таблицы:

x_1	x_2	x_3	y_i	$y(x_i)$
24,00	5,30	24,56	59,69	67,845
6,75	16,08	28,01	53,71	48,286
19,32	17,06	22,46	81,44	70,679
19,60	0,76	10,79	74,58	66,811
2,47	–9,96	5,90	36,29	37,388
24,67	17,96	13,40	95,19	84,721
28,13	4,80	–3,10	82,96	90,704
14,83	15,58	17,87	58,24	65,978
27,57	37,52	25,70	82,74	95,126
11,88	28,08	21,20	58,13	68,472
20,48	30,56	35,09	62,21	74,072
7,90	10,36	31,07	47,34	44,002
18,15	14,26	8,87	89,80	75,459
29,40	29,08	21,08	85,29	94,688
–6,85	2,06	31,61	14,78	16,374
18,25	0,66	19,31	65,04	59,479
11,40	2,16	18,62	45,04	51,025
12,93	20,74	16,19	69,31	67,918
9,62	10,14	13,28	58,71	57,408
17,95	16,00	15,08	85,92	72,536
17,88	8,30	33,26	60,61	55,675
22,25	–0,28	30,41	60,61	57,714
24,43	–0,22	31,43	57,80	60,292
18,62	–0,92	18,71	64,33	59,266
–4,52	5,22	31,37	22,90	22,148
–2,32	12,54	2,39	50,81	48,558

x_1	x_2	x_3	y_i	$y(x_i)$
17,97	–0,56	17,93	59,16	59,062
23,35	3,26	25,46	59,47	64,897
10,50	8,10	20,33	56,22	52,859
23,00	18,30	34,94	68,92	69,139
12,93	7,62	23,99	49,62	53,775
9,88	14,36	23,81	51,42	54,231
8,02	5,10	–1,69	54,19	60,832
16,97	9,40	11,99	55,40	68,358
17,03	–7,38	39,77	36,66	39,289
21,43	13,82	11,00	80,60	78,589
16,35	33,62	24,77	88,94	76,659
19,13	16,88	7,91	95,57	79,339
24,15	16,46	26,84	84,28	74,546
10,07	10,30	35,06	45,82	44,622
9,70	19,14	29,12	52,8	54,045
20,62	–3,12	–3,19	71,21	74,239
15,37	–25,60	13,25	35,77	40,443
16,67	12,88	15,98	59,50	67,904
2,92	15,70	22,34	43,82	45,979
17,13	4,46	32,09	55,17	52,595
11,20	4,90	19,58	51,43	52,077
17,63	7,52	9,50	56,83	69,545
25,65	–2,36	10,07	77,64	73,834
27,77	2,62	27,95	74,93	69,307
$\sum$			3088,80	3088,800

Продолжение таблицы

$(y_i - \bar{y})^2$	$(y(x_i) - \bar{y})^2$	$(y_i - y(x_i))^2$	$\left\lvert \dfrac{y(x) - y_i}{y(x_i)} \right\rvert$
4,351	36,84404	66,51918	0,136638
65,060	181,97360	29,41716	0,100982
386,670	79,26508	115,79710	0,132133
163,940	25,35735	60,34790	0,104162
649,530	594,73920	1,20719	0,030276
1116,160	526,49780	109,48400	0,109928
448,550	836,86040	60,05535	0,093419
12,503	17,65704	59,87709	0,132865
439,270	1112,28800	153,56130	0,149779
13,320	44,84880	107,07950	0,178029
0,188	151,19290	140,70830	0,190678

$(y_i - \bar{y})^2$	$(y(x_i) - \bar{y})^2$	$(y_i - y(x_i))^2$	$\left\lvert \dfrac{y(x) - y_i}{y(x_i)} \right\rvert$
208,540	315,91370	11,10863	0,070412
785,060	187,22920	205,51600	0,159651
552,900	1083,20100	88,32268	0,110189
2209,090	2061,33500	2,55703	0,108228
10,650	5,27540	30,92277	0,085499
280,090	115,58320	35,82067	0,132883
56,761	37,72562	1,93733	0,020082
9,400	19,07479	1,69382	0,022168
582,690	115,78950	178,98290	0,155717
1,371	37,21489	24,29899	0,081337
1,371	16,49768	8,35634	0,047698
15,848	2,20217	6,23515	0,043205
6,497	6,29891	25,59108	0,078644
1511,732	1570,34100	0,55730	0,032606
120,362	174,71380	5,04871	0,044227
6,869	7,36177	0,00851	0,001560
5,317	9,74586	29,46140	0,091270
30,920	79,49785	11,25708	0,059684
51,030	54,21623	0,04803	0,003180
147,768	64,00773	17,26832	0,083747
107,350	56,92401	7,93098	0,054774
57,547	0,89072	44,11909	0,122573
40,717	43,33270	168,05900	0,234024
630,562	505,66120	6,88584	0,071569
354,531	282,68770	4,06296	0,025007
737,882	221,50350	150,82310	0,138082
1142,030	308,46630	263,43860	0,169831
506,655	163,08160	94,84146	0,115544
254,434	294,24050	1,44586	0,026240
80,568	59,76613	1,55038	0,023582
89,094	155,34360	9,14876	0,042473
676,052	455,09170	21,79135	0,130486
5,157	37,55576	70,54782	0,141152
322,417	249,52160	4,66450	0,049287
43,573	84,27311	6,65144	0,046743
107,039	94,06601	0,41891	0,012585
24,410	60,35797	161,54510	0,223630
251,825	145,41050	14,51892	0,049074
173,027	56,72889	31,60847	0,075032
15498,770	12845,67000	2653,10000	4,542562

Проверим выполнение равенства сумм. Так как $15498{,}77 = 12845{,}67 + 2653{,}10$, оно выполнено. Следовательно, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 15498{,}77;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - \bar{y})^2 = 12845{,}67;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - \bar{y})^2 = 2653{,}10.$$

То есть общая дисперсия равна

$$D_{\text{общая}}(y) = S_y^2 = \frac{1}{50}15498{,}77 = 309{,}9754,$$

факторная дисперсия равна

$$D_{\text{фак}}(y) = \frac{1}{3}12845{,}67 = 4281{,}884$$

и остаточная дисперсия равна

$$D_{\text{ост}} = \frac{1}{46}2653{,}10 = 57{,}67607.$$

Найдём коэффициент множественной детерминации по трём формулам:

$$R^2 = 1 - \frac{\Delta r}{\Delta_{11} r} = 1 - \frac{0{,}163017}{0{,}952308} = 0{,}828819;$$

$$R^2 = \beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + \beta_3 r_{yx_3} = 0{,}742113 \cdot 0{,}676093 +$$

$$+ 0{,}469343 \cdot 0{,}454912 + 0{,}30962 \cdot 0{,}36681 = 0{,}828819;$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{2653{,}099}{15498{,}77} = 0{,}828819.$$

Полученные коэффициенты детерминации равны, найдём коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}828819} = 0{,}910395.$$

Проверим значимость уравнения регрессии через F-критерий, для этого вычислим его двумя способами:

$$F=\frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m}=\frac{0{,}828819}{0{,}171181}\cdot\frac{46}{3}=74{,}24022$$

и

$$F=\frac{D_{\text{фак}}}{D_{\text{ост}}}=\frac{4281{,}884}{57{,}67607}=74{,}24022.$$

Критическое значение F-критерия $F(0{,}05;\,3;\,46)=2{,}806845$, следовательно, уравнение регрессии в целом значимо. Найдём среднюю ошибку аппроксимации по формуле

$$\overline{A}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y(x_i)-y_i}{y(x_i)}\right|\cdot 100\,\%=9{,}085123\,\%,$$

она показывает неплохое качество описания реального изменения результативного признака уравнением регрессии. Формула скорректированного индекса множественной детерминации

$$\overline{R}^2=1-\frac{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-y(x))^2}{(n-m-1)\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=1-\left(1-R^2\right)\frac{(n-1)}{(n-m-1)}.$$

Чем больше величина m, тем сильнее различия $\overline{R}^2$ и R^2. Для рассматриваемого примера

$$\overline{R}^2=1-(1-0{,}828819)\frac{49}{46}=0{,}817653.$$

Частные уравнения регрессии

На основе линейного уравнения множественной регрессии $y=a+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_px_p+\varepsilon.$

Можно найти частное уравнение регрессии по переменной x_k путём подстановки в него средних значений $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_{k-1},\bar{x}_{k+1},\ldots,\bar{x}_p$. В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат при условии, что остальные факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения регрессии. Это позволяет определять частные коэффициенты эластичности:

$$Э_{y_{xi}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \ldots; \bar{x}_{i-1}; x_i; \bar{x}_{i+1}; \ldots; \bar{x}_p\right)},$$

где f – функция, определяющая уравнение множественной регрессии;

средние по совокупности показатели эластичности:

$$\bar{Э}_{y_{xi}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\bar{x}_i}{f\left(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \ldots; \bar{x}_{i-1}; \bar{x}_i; \bar{x}_{i+1}; \ldots; \bar{x}_p\right)}.$$

Для линейной регрессии можно также использовать формулу

$$Э_{xk} = b_k \frac{\bar{x}_k}{\bar{y}}.$$

Найдём средние коэффициенты эластичности для рассматриваемого примера:

$$\bar{Э}_{x_1} = b_1 \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} \approx 1{,}451898 \frac{15{,}80467}{61{,}776} \approx 0{,}371451;$$

$$\bar{Э}_{x_2} = b_2 \frac{\vec{x}_2}{\bar{y}} \approx 0{,}708007 \frac{9{,}5844}{61{,}776} \approx 0{,}109846;$$

$$\bar{Э}_{x_3} = b_3 \frac{\vec{x}_3}{\bar{y}} \approx -0{,}62225 \frac{20{,}0672}{61{,}776} \approx -0{,}20213.$$

Следовательно, наибольшее влияние на результат оказывает фактор x_1, наименьшее – x_2. Используя частные уравнения регрессии, можно найти частные значения F-критерия и оценивать значимость не только уравнения в целом, но и каждого фактора, включённого в регрессионную модель. Частный F-критерий построен на сравнении прироста факторной дисперсии, обусловленного влиянием дополнительно включённого фактора, с остаточной дисперсией на одну степень свободы по регрессионной модели в целом. Предположим, что оцениваем значимость влияния x_k как дополнительно включённого в модель фактора. Используем следующую формулу:

$$F_{x_k} = \frac{R^2_{y,x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_p} - R^2_{y,x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots x_p}}{1 - R^2_{y,x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_p}} (n-2),$$

где $R^2_{y,x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_p}$ – коэффициент множественной корреляции для модели с полным набором факторов;

$R^2_{y,x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots x_p}$ – тот же показатель, но без включения в модель фактора x_k; n – число наблюдений.

Пример 13. По данным примера 11 найти значения частных значений F-критерия и определить значимость каждого фактора в отдельности.

Решение. Найдём частные F-критерии, для этого вычислим:

$$R^2(y;x_2;x_3)=1-\frac{\Delta r(y;x_2;x_3)}{\Delta r_{11}(x_2;x_3)}=1-\frac{0,601124}{0,968695}=0,379449;$$

$$R^2(y;x_1;x_3)=1-\frac{\Delta r(y;x_1;x_3)}{\Delta r_{11}(x_1;x_3)}=1-\frac{0,368053}{0,998812}=0,631509;$$

$$R^2(y;x_1;x_2)=1-\frac{\Delta r(y;x_1;x_2)}{\Delta r_{11}(x_1;x_2)}=1-\frac{0,296956}{0,986232}=0,698898.$$

Тогда

$$F_{x_1}=\frac{R^2_{yx_1x_2x_3}-R^2_{yx_2x_3}}{1-R^2_{yx_1x_2x_3}}\cdot 48=126,0052;$$

$$F_{x_2}=\frac{R^2_{yx_1x_2x_3}-R^2_{yx_1x_3}}{1-R^2_{yx_1x_2x_3}}\cdot 48=55,32647;$$

$$F_{x_3}=\frac{R^2_{yx_1x_2x_3}-R^2_{yx_1x_2}}{1-R^2_{yx_1x_2x_3}}\cdot 48=36,43026.$$

Критическое значение F-критерия [$F(0,05;\,1;\,48)=4,042652$], следовательно, согласно F-критерию все факторы значимы, но наиболее значимым является первый фактор.

Частная корреляция

Частные коэффициенты (индексы) корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при устранении влияния других факторов, включённых в уравнение регрессии. Показатели частной корреляции представляют собой отношение остаточной дисперсии за счёт включения в анализ нового фактора к остаточной дисперсии, имевшей место до введения его в модель.

Пусть в уравнение простой регрессии добавили ещё один фактор x_2, тогда чистое влияние этого фактора на результат y можно определить как

$$r_{yx_2*x_1}=\sqrt{\frac{S^2_{yx_1}-S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_1}}}=\sqrt{1-\frac{S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_1}}}$$

или

$$r_{yx_2*x_1}=\sqrt{1-\frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-r^2_{yx_1}}}.$$

Соответственно

$$r_{yx_1*x_2}=\sqrt{1-\frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-r^2_{yx_2}}},$$

если рассматривается регрессия с числом факторов p, то возможны частные коэффициенты корреляции не только первого, но и второго, третьего,….., $(p-1)$ порядка, т. е. влияние фактора x_1 можно оценить при разных условиях независимости действий других факторов: $r_{yx_1*x_2}$ – при постоянном действии фактора x_2; $r_{yx_1*x_2x_3}$ – при постоянном действии факторов x_2 и x_3; $r_{yx_1*x_2x_3\ldots x_p}$ – при постоянном действии всех факторов, включённых в уравнение регрессии.

Порядок частного коэффициента корреляции определяется количеством факторов, влияние которых исключается. Соответственно коэффициенты парной корреляции называются коэффициентами нулевого порядка. Коэффициенты частной корреляции более высоких порядков можно определить через коэффициенты частной корреляции более низких порядков по рекуррентной формуле

$$r_{yx_i*x_1x_2\ldots x_p}=\frac{r_{yx_i*x_1x_2\ldots x_{p-1}}-r_{yx_p*x_1x_2\ldots x_{p-1}}r_{x_ix_p*x_1x_2\ldots x_{p-1}}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_p*x_1x_2\ldots x_{p-1}}\right)\left(1-r^2_{x_ix_p*x_1x_2\ldots x_{p_{-1}}}\right)}}.$$

При двух факторах и $i=1$ данная формула примет вид:

$$r_{yx_1*x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)}}.$$

Пример 14. По данным примера 11 найти частные значения коэффициентов корреляции и определить их значимость.

Решение. Проверим значимость факторов на основе критерия Стьюдента, для этого вычислим частные коэффициенты корреляции. Найдём:

$$r_{yx_1*x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{x_1x_2} \cdot r_{yx_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)\left(1 - r^2_{yx_2}\right)}} = 0{,}783475;$$

$$r_{yx_2*x_3} = \frac{r_{yx_2} - r_{x_3x_2} \cdot r_{yx_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_3x_2}\right)\left(1 - r^2_{yx_3}\right)}} = 0{,}560047;$$

$$r_{yx_1*x_3} = \frac{r_{yx_1} - r_{x_1x_3} \cdot r_{yx_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_1x_3}\right)\left(1 - r^2_{yx_3}\right)}} = 0{,}7697;$$

$$r_{yx_2*x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{x_1x_2} \cdot r_{yx_1}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)\left(1 - r^2_{yx_1}\right)}} = 0{,}5742;$$

$$r_{yx_3*x_1} = \frac{r_{yx_3} - r_{x_3x_1} \cdot r_{yx_1}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_1x_3}\right)\left(1 - r^2_{yx_1}\right)}} = -0{,}4240;$$

$$r_{yx_3*x_2} = \frac{r_{yx_3} - r_{x_2x_3} \cdot r_{yx_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_2x_3}\right)\left(1 - r^2_{yx_2}\right)}} = -0{,}4518;$$

$$r_{x_1x_3*x_2} = \frac{r_{x_1x_3} - r_{x_1x_2} \cdot r_{x_2x_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)\left(1 - r^2_{x_2x_3}\right)}} = -0{,}0565;$$

$$r_{x_2x_3*x_1} = \frac{r_{x_2x_3} - r_{x_1x_2} \cdot r_{x_1x_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{x_1x_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_3}\right)}} = 0{,}1823;$$

$$r_{yx_1*x_2x_3} = \frac{r_{yx_1*x_2} - r_{yx_3*x_2} r_{x_1x_3*x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_3*x_2}\right)\left(1 - r^2_{x_1x_3*x_2}\right)}} = 0{,}9492;$$

$$r_{yx_2*x_1x_3} = \frac{r_{yx_2*x_1} - r_{yx_3*x_1} r_{x_2x_3*x_1}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_3*x_1}\right)\left(1-r^2_{x_2x_3*x_1}\right)}} = 0{,}6983;$$

$$r_{yx_3*x_1x_2} = \frac{r_{yx_3*x_1} - r_{yx_2*x_1} r_{x_3x_2*x_1}}{\sqrt{\left(1-r^2_{yx_2*x_1}\right)\left(1-r^2_{x_2x_3*x_1}\right)}} = -0{,}4790\,.$$

Проверим значимость коэффициентов корреляции по формуле

$$t_{r\kappa} = r_\kappa \sqrt{\frac{n-2}{1-r_\kappa^2}}\,.$$

Получим:

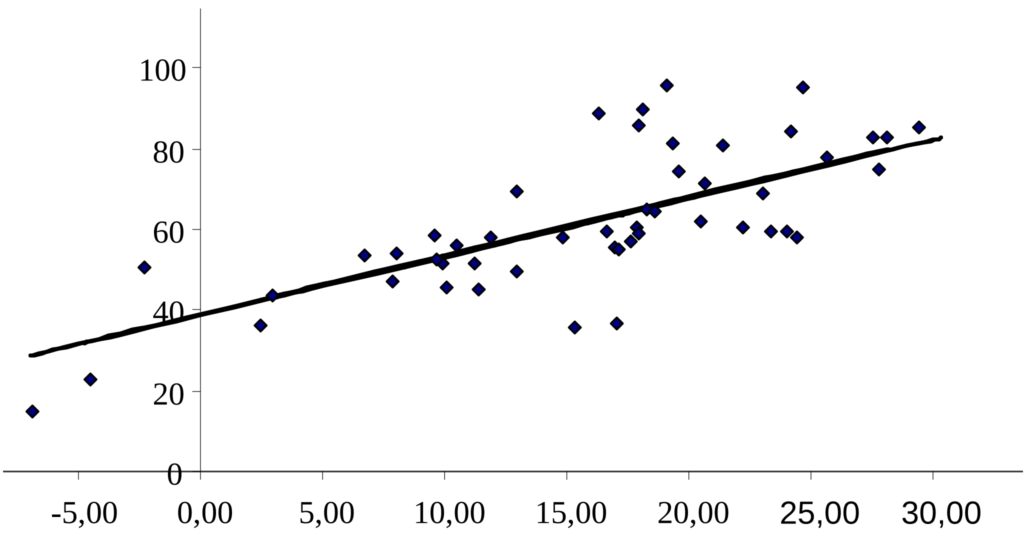
$$t_{r1} = 20{,}91671;$$
$$t_{r2} = 6{,}760276;$$
$$t_{r3} = -3{,}78136.$$

Полученные значения по модулю больше критического значения, равного 2,010635. Следовательно, все коэффициенты регрессии значимы, но наиболее значимый первый фактор.

Найдём уравнение частной регрессии для этого фактора:

$$y = a + b_1x_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 = 38{,}82924 + 1{,}451898x_1\,.$$

Построим поле регрессии для этого фактора и линию регрессии.



Найдём прогнозные значения факторов по формулам

$$x_{1p} = \bar{x}_1 + \sigma(x_1) = 24{,}00316;$$
$$x_{2p} = \bar{x}_2 + \sigma(x_2) = 20{,}89677;$$
$$x_{3p} = \bar{x}_3 + \sigma(x_3) = 30{,}44571.$$

Найдём прогнозное значение результативного признака по формуле

$$y_p = a + b_1 x_{1p} + b_2 x_{2p} + b_3 x_{3p} = 75{,}23054.$$

Найдём ошибку прогноза:

$$m_{\hat{y}_x} =$$
$$= \sqrt{S^2_{\text{ост}}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{1p} - \bar{x}_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2} + \frac{(x_{2p} - \bar{x}_2)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2} + \frac{(x_{3p} - \bar{x}_3)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{3i} - \bar{x}_3)^2}\right)} \approx$$
$$\approx 2{,}148042.$$

Доверительный интервал для прогнозного значения найдём по формуле

$$(y_p - t_{\alpha,k} m_{y_p}; y_p + t_{\alpha,k} m_{y_p})$$

или

$$(75{,}23054 - 2{,}148042 \cdot 2{,}008559 \,;\, 75{,}23054 + 2{,}148042 \cdot 2{,}008559),$$
$$(70{,}92;\ 79{,}55).$$

Глава 3. ОДНОМЕРНЫЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Основные элементы временного ряда

Можно построить эконометрическую модель, используя два типа исходных данных:

• данные, характеризующие совокупность различных объектов в определённый момент (период) времени;

• данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени. Модели, построенные по данным первого типа, называются пространственными моделями.

Модели, построенные на основе второго типа данных, называются моделями временных рядов.

Временной ряд – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы: первая группа формирует тенденцию; вторая формирует циклические колебания; остальные – случайные колебания.

При различных сочетаниях в изучаемом явлении или процессе этих факторов зависимость уровней ряда от времени может принимать различные формы.

Во-первых, большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию, характеризующую долговременное совокупное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя. Очевидно, что эти факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Однако в совокупности они формируют его возрастающую или убывающую тенденцию.

Во-вторых, изучаемый показатель может быть подвержен циклическим колебаниям. Эти колебания могут носить сезонный характер, поскольку экономическая деятельность ряда отраслей экономики зависит от времени года (например, цены на сельскохозяйственную продукцию в летний период ниже, чем в зимний; уровень безработицы в курортных городах в зимний период выше по сравнению с летним). При наличии больших массивов данных за длительные промежутки времени можно выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой конъюнктуры рынка.

Некоторые временные ряды не содержат тенденции и циклической компоненты, а каждый следующий их уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты.

Очевидно, что реальные данные не следуют целиком и полностью из каких-либо описанных выше моделей. Чаще всего они содержат все три компоненты. Каждый их уровень формируется под воздействием тенденции, сезонных колебаний и случайной компоненты. В большинстве случаев фактический уровень временного ряда можно представить как сумму или произведение трендовой, циклической и случайной компонент. Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, называется аддитивной моделью временного ряда. Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, называется мультипликативной моделью временного ряда. Основная задача эконометрического исследования отдельного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из перечисленных выше компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

Автокорреляция уровней временного ряда и выявление его структуры

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют автокорреляцией уровней ряда.

Количественно её можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени. Число периодов, на которые сдвигается ряд, называют лагом. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается.

Отметим два важных свойства коэффициента автокорреляции. Во-первых, он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и таким образом характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу второго порядка или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

Во-вторых, по знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержит положительную автокорреляцию уровней, однако при этом могут иметь убывающую тенденцию.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т. д. порядков называют автокорреляционной функцией временного ряда. График зависимости её значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется коррелограммой.

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором автокорреляция наиболее высокая, а следовательно, и лаг, при котором связь между текущим и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная, т. е. при помощи анализа автокорреляционной функции и коррелограммы можно выявить структуру ряда.

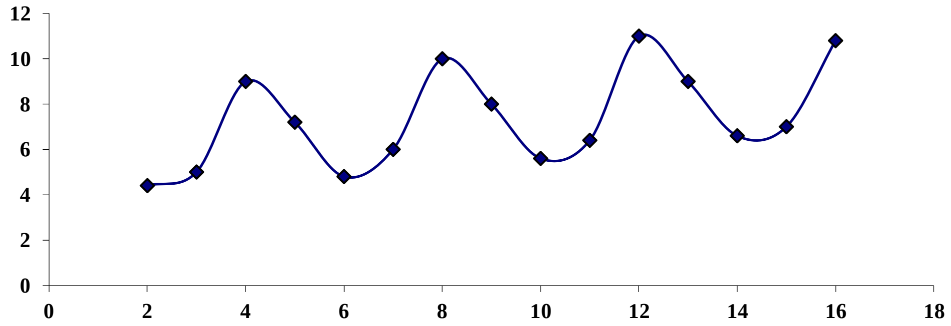
Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка T, ряд содержит циклические колебания с периодичностью в T моментов времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ. Поэтому коэффициент автокорреляции уровней и автокорреляционную функцию целесообразно использовать для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой компоненты и циклической (сезонной) компоненты.

Пример 15. Пусть имеются условные данные об объёмах потребления электроэнергии жителями региона за 16 кварталов.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	6	4,4	5	9	7,2	4,8	6	10	8	5,6	6,4	11	9	6,6	7,0	10,8

Провести анализ коррелограммы и сделать вывод о наличии либо отсутствии сезонных колебаний (периодично 4 квартала).

Решение. Построим график:

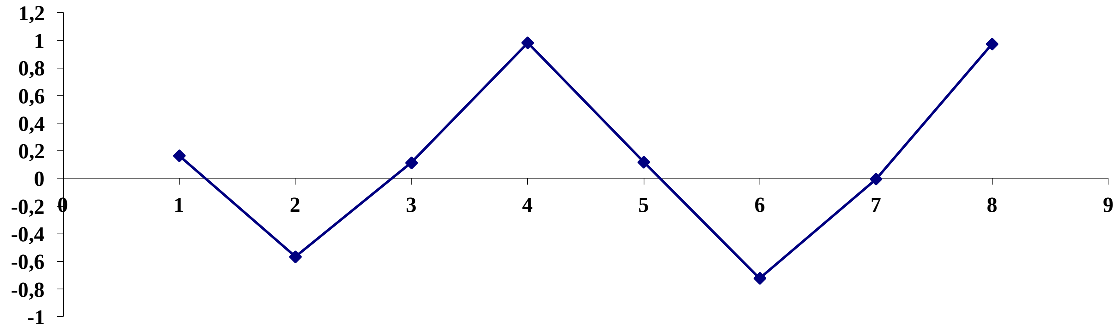


Из анализа графика видно, что в данном временном ряде есть тенденция, хотя $R^2 = 0{,}2625$ невелико.

Найдём коэффициенты корреляции уровней.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
r	0,165	–0,567	0,114	0,983	0,119	–0,722	–0,003	0,974

Их график имеет вид:



Анализ коррелограммы позволяет сделать вывод о наличии сезонных колебаний периодичностью в четыре квартала.

Моделирование тенденции временного ряда

Одним из наиболее распространённых способов моделирования тенденции временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней времени, или тренда. Этот способ называют аналитическим выравниванием временного ряда.

Поскольку зависимость от времени может принимать разные формы, для её формализации можно использовать различные виды функций. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

• линейный тренд: $y_t = a + bt$;

• гипербола: $y_t = a + b/t$;

• экспоненциальный тренд: $y_t = a \cdot b^t$;

• тренд в форме степенной функции: $y_t = a \cdot t^b$;

• парабола второго и более высоких порядков: $\hat{y}_t = a + b_1 t + b_2 t + \ldots + b_k t^k$.

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить обычным МНК, используя в качестве независимой переменной время $t = 1, 2, \ldots, n$, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда y. Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру линеаризации.

Существует несколько способов определения типа тенденции. К числу наиболее распространённых способов относят качественный анализ изучаемого процесса, построение и визуальный анализ графика, зависимости уровней ряда от времён расчёта некоторых основных показателей динамики. В этих же целях можно использовать и коэффициенты автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путём сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда. Если время имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни y_t и y_{t-1} тесно коррелируют. В этом случае коэффициент автокорреляции первого порядка уровней исходного ряда должен быть высоким. Если временной ряд содержит нелинейную тенденцию например, в форме экспоненты, то коэффициент автокорреляции первого порядка по логарифмам уровней исходного ряда будет выше, чем соответствующий коэффициент, рассчитанный по уровням ряда. Чем сильнее выражена нелинейная тенденция в изучаемом временном ряде, тем в большей степени будут различаться значения указанных коэффициентов.

Выбор наилучшего уравнения в случае, если ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путём перебора основных форм тренда, расчёта по каждому уравнению скорректированного коэффициента детерминации $\bar{R}^2$ и выбора уравнения тренда с максимальным значением скорректированного коэффициента детерминации. Реализация этого метода относительно просто при компьютерной обработке данных.

Моделирование сезонных и циклических колебаний

Существуют несколько подходов к анализу временных рядов, содержащих сезонные или циклические колебания.

Простейший подход – расчёт значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда. Общий вид аддитивной модели:

$$y = T + S + E.$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой T, сезонной S и случайной E компонент. Общий вид мультипликативной модели:

$$y = T \cdot S \cdot E.$$

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчёту значений S, T и E для каждого уровня ряда. При этом существуют два подхода. Первый основан на выравнивании методом скользящей средней, в котором выделяются следующие этапы:

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчёт значений сезонной компоненты S.
3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных $T + E$ в аддитивной или $E \cdot T$ в мультипликативной модели.

4. Аналитическое выравнивание уровней $T+E$ или $E \cdot T$ и расчёт значений T с использованием полученного уравнения тренда.

5. Расчёт полученных по модели значений $T+E$ или $E \cdot T$.

6. Расчёт абсолютных и/или относительных ошибок.

Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок E для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Второй метод основан на введении фиктивных переменных, которые могут принимать только два значения. Количество этих переменных определяется периодом циклических колебаний.

Подробнее методику построения каждой из модели рассмотрим на примерах.

Пример 16. По данным примера построить аддитивную модель временного ряда.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	6	4,4	5	9	7,2	4,8	6	10	8	5,6	6,4	11	9	6,6	7	10

Решение. Введём фиктивные переменные. Так как наибольшее значение имеет коэффициент автокорреляции четвёртого порядка, то вводим три фиктивные переменные. Получаем многофакторную модель. Фиктивные переменные принимают значения 0 или 1. Период единиц равен четырём.

Составим таблицу:

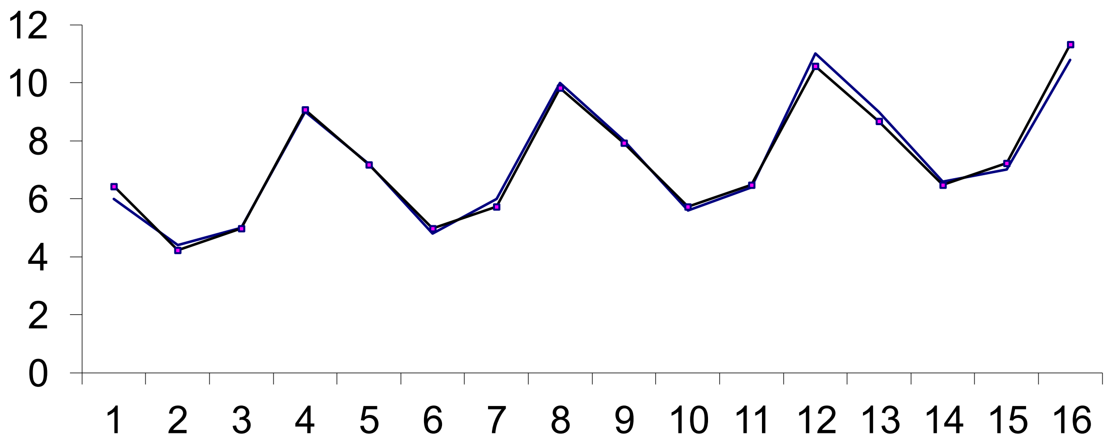
y	t	x_1	x_2	x_3	$y(t)$
6,0	1	1	0	0	6,425
4,4	2	0	1	0	4,225
5,0	3	0	0	1	4,975
9,0	4	0	0	0	9,075
7,2	5	1	0	0	7,175
4,8	6	0	1	0	4,975
6,0	7	0	0	1	5,725
10,0	8	0	0	0	9,825
8,0	9	1	0	0	7,925
5,6	10	0	1	0	5,725
6,4	11	0	0	1	6,475
11,0	12	0	0	0	10,575

y	t	x_1	x_2	x_3	$y(t)$
9,0	13	1	0	0	8,675
6,6	14	0	1	0	6,475
7,0	15	0	0	1	7,225
10,8	16	0	0	0	11,325

По этой многофакторной модели получаем уравнение множественной регрессии

$$y(t) = 8{,}325 + 0{,}1875 \cdot t - 2{,}0875 \cdot x_1 - 4{,}475 \cdot x_2 - 3{,}9125 \cdot x_4.$$

После построения графика видно, что различие между эмпирическими и расчётными значениями мало.

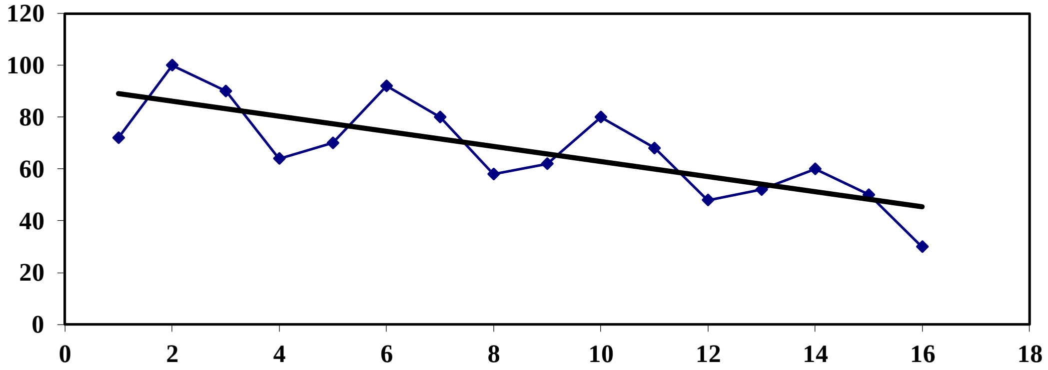


На это указывает и остаточная сумма $S_{\text{ост}} = 0{,}072143$ и коэффициент регрессии $R^2 = 0{,}984952$.

Пример 17. Построить мультипликативную модель по следующим данным:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	72	100	90	64	70	92	80	58	62	80	68	48	52	60	50	30

Решение. Построим график:



Из анализа графика видно наличие тренда (линейного) с уравнением $y = -2{,}9235t + 92{,}1$ и $R^2 = 0{,}5785$. Колебания затухают, следовательно, применяем мультипликативную модель. Проведём расчёт оценки сезонной компоненты методом скользящей средней.

t	y	Итого за IV квартал	Скользящая средняя за IV квартал	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	72				
2	100				
3	90	326	81,5	81,25	1,108
4	64	324	81	80	0,8
5	70	316	79	77,75	0,91
6	92	306	76,5	75,75	1,215
7	80	300	75	74	1,081
8	58	292	73	71,5	0,811
9	62	280	70	68,5	0,905
10	80	268	67	65,75	1,217
11	68	258	64,5	63,25	1,075
12	48	248	62	59,5	0,807
13	52	228	57	54,75	0,95
14	60	210	52,5	50,25	1,194
15	50	192	48		
16	30				

Взаимопогашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле, в нашем примере 5.

Составим таблицу «Расчёт сезонной компоненты в мультипликативной модели»:

Показатели	Год	№ квартала			
		I	II	III	IV
	1	-	-	1,108	0,800
	2	0,910	1,215	1,081	0,811
	3	0,905	1,217	1,075	0,807
	4	0,950	1,194	-	-
Итого за квартал		2,765	3,626	3,264	2,418
Средняя оценка сезонной компоненты $\bar{S}_i$		0,922	1,209	1,088	0,806
Скорректированная сезонная компонента S_i		0,913	1,202	1,082	0,803

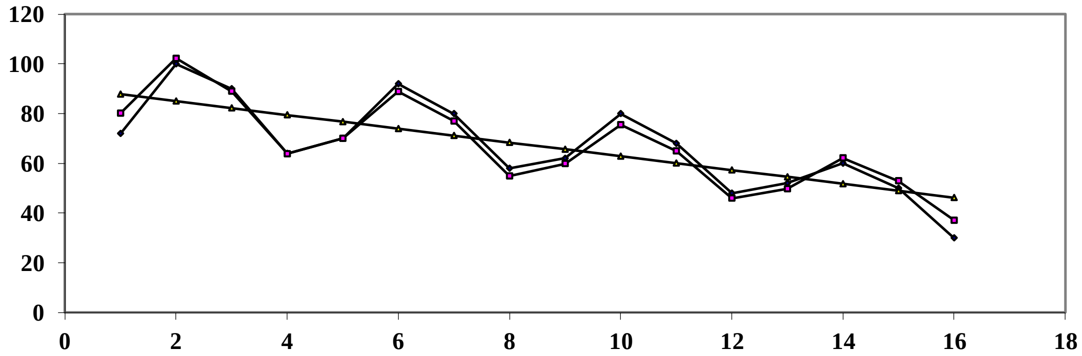
Табличная $S_i = \bar{S}_i \dfrac{4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = 0{,}9938\bar{S}_i$.

Составим таблицу для расчёта выровненных значений T и ошибок E в мультипликативной модели:

t	y_i	S	$T \cdot E = \dfrac{y_i}{S_i}$	T	$T \cdot S$	$E = \dfrac{y_i}{T \cdot S}$	$E = y_i - T \cdot S$	E^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	72	0,913	78,86	87,80	80,16	0,898	–8,16	66,66
2	100	1,202	83,19	85,03	102,20	0,978	–2,20	4,86
3	90	1,082	83,18	82,25	89,00	1,011	1,0	1,00
4	64	0,803	79,70	79,48	63,82	1,003	0,18	0,03
5	70	0,913	76,67	76,70	70,03	1,000	–0,03	0,00
6	92	1,202	76,54	73,93	88,86	1,035	3,14	9,85
7	80	1,082	73,94	71,15	76,99	1,039	3,01	9,08
8	58	0,803	72,23	68,38	54,91	1,056	3,09	9,57
9	62	0,913	67,91	65,6	59,90	1,035	2,10	4,43
10	80	1,202	66,56	62,83	75,52	1,059	4,48	20,08
11	68	1,082	62,85	50,05	64,98	1,047	3,02	9,14
12	48	0,803	59,78	57,28	45,99	1,044	2,01	4,03
13	52	0,913	56,96	54,50	49,76	1,045	2,24	5,02
14	60	1,202	49,92	51,73	62,18	0,965	–2,18	4,73
15	50	1,082	46,21	48,95	52,97	0,944	–2,97	8,79
16	30	0,803	37,36	46,18	37,08	0,809	–7,08	50,12

Уравнение тренда имеет вид $T = 90{,}59 - 2{,}773t$, коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}915239$.

Построим график:



Глава 4. ВЗАИМОСВЯЗИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
Специфика статистической оценки взаимосвязи двух временных рядов

Изучение причинно-следственных зависимостей переменных, представленных в виде временных рядов, является одной из самых сложных задач эконометрического моделирования. Применение в этих целях традиционных методов корреляционно-регрессионного анализа, рассмотренных в главах ранее, может привести к ряду серьёзных проблем, возникающих как на этапе построения, так и на этапе анализа эконометрических моделей. В первую очередь эти проблемы связаны со спецификой временных рядов как источника данных в эконометрическом моделировании. Ранее показано, что каждый уровень временного ряда содержит три основных компоненты: тенденцию, циклические или сезонные колебания и случайную компоненту. Рассмотрим подробнее, каким образом наличие этих компонент сказывается на результатах корреляционно-регрессионного анализа временных рядов данных.

Предварительный этап такого анализа заключается в выявлении структуры изучаемых временных рядов. Если на этом этапе было выявлено, что временные ряды содержат сезонные или циклические колебания, то перед проведением дальнейшего исследования взаимосвязи необходимо устранить сезонную или циклическую компоненту из уровней каждого ряда, поскольку её наличие приведёт к завышению истинных показателей силы и тесноты связи изучаемых временных рядов в случае, если оба ряда содержат циклические колебания одинаковой периодичности, либо к занижению этих показателей в случае, если сезонные или циклические колебания содержат только один из рядов или периодичность колебаний в рассматриваемых временных рядах различна.

Устранение сезонной компоненты из уровней временных рядов можно проводить в соответствии с методикой построения аддитивной и мультипликативной моделей, рассмотренной ранее. При дальнейшем изложении методов анализа взаимосвязей в этой главе мы предположим, что изучаемые временные ряды не содержат периодических колебаний. Пусть изучается зависимость между рядами x и y. Для количественной характеристики этой зависимости используется линейный коэффициент корреляции. Если рассматриваемые временные ряды имеют тенденцию, коэффициент корреляции по абсолютной величине будет высоким (положительным в случае совпадения и отрицательным в случае противоположной направленности тенденций рядов x и y). Однако из этого ещё нельзя сделать вывод о том, что x причина y или наоборот. Высокий коэффициент корреляции в данном случае есть результат того, что x и y зависят от времени или содержат тенденцию. При этом одинаковую или противоположную тенденцию могут иметь ряды, совершенно не связанные друг с другом причинно-следственной зависимостью. Например, коэффициент корреляции между численностью выпускников вузов и числом домов отдыха в РФ в период с 1970 по 1990 гг. составил 0,8. Это, естественно, не означает, что увеличение количества домов отдыха способствует росту числа выпускников вузов или увеличение числа последних стимулирует спрос на дома отдыха.

Для того чтобы получить коэффициенты корреляции, характеризующие причинно-следственную связь между изучаемыми рядами, следует избавиться от так называемой ложной корреляции, вызванной наличием тенденции в каждом ряде. Обычно это осуществляют с помощью одного из методов исключения тенденции, которые будут рассмотрены далее.

Предположим, что по двум временным рядам x и y строится уравнение парной линейной регрессии вида $y_t = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t$.

Наличие тенденции в каждом из этих временных рядов означает, что на зависимую переменную y и независимую переменную x_t оказывает воздействие фактор времени, который непосредственно в модели не учтён. Влияние фактора времени будет выражено в корреляционной зависимости между значениями остатков ε_t за текущий и предыдущие моменты времени, которая получила название «автокорреляция в остатках».

Автокорреляция в остатках есть нарушение одной из основных предпосылок МНК – предпосылки о случайности остатков, полученных по уравнению регрессии. Один из возможных путей решения этой проблемы состоит в применении к оценке параметров модели обобщённого МНК. При построении уравнения множественной регрессии по временным рядам данных, помимо двух вышеназванных проблем, возникает также проблема мультиколлинеарности факторов, входящих в уравнение регрессии, в случае если эти факторы содержат тенденцию.

Методы исключения тенденции

Сущность всех методов исключения тенденции заключается в том, чтобы устранить или зафиксировать воздействие фактора времени на формирование уровней ряда. Основные методы исключения тенденции можно разделить на две группы:

- методы, основанные на преобразовании уровней исходного ряда в новые переменные, не содержащие тенденции. Полученные переменные используются далее для анализа взаимосвязи изучаемых временных рядов. Эти методы предполагают непосредственное устранение трендовой компоненты T из каждого уровня временного ряда. Два основных метода в данной группе – это метод последовательных разностей и метод отклонений от трендов;
- методы, основанные на изучении взаимосвязи исходных уровней временных рядов при элиминировании воздействия фактора времени на зависимую и независимые переменные модели. В первую очередь это метод включения в модель регрессии по временным рядам фактора времени.

Рассмотрим подробнее методику применения, преимущества и недостатки каждого из перечисленных выше методов.

Метод отклонений от тренда

Пусть имеются два временных ряда x_t и y_t, каждый из которых содержит трендовую компоненту T и случайную компоненту ε. Проведение аналитического выравнивания по каждому из этих рядов позволяет найти параметры соответствующих уравнений трендов и определить расчётные по тренду уровни $\hat{x}_t$ и $\hat{y}_t$ соответственно. Эти расчётные значения можно принять за оценку трендовой компоненты T каждого ряда. Поэтому влияние трендовой компоненты можно устранить путём вычитания расчётных значений уровней ряда из фактических. Эту процедуру проделывают для каждого временного ряда в модели. Дальнейший анализ взаимосвязи проводят с использованием не исходных уровней, а отклонений от тренда $x_t - \hat{x}_t$ и $y_t - \hat{y}_t$ при условии, что последние не содержат тенденции.

Пример 18. По данным примера 17 оценить взаимосвязь методом отклонения от тренда.

Решение. Удалим сезонные колебания. Для этого из аддитивного временного ряда удалим сезонные колебания по формуле

$$\tilde{y}_i = y_i - b_1 \cdot x_{2,i} - b_2 \cdot x_{3,i} - b_3 \cdot x_{4,i},$$

а из мультипликативного ряда по формуле

$$\tilde{y} = {y_i}/{S_i}.$$

Полученные значения запишем в виде таблицы:

№	x_t	$\tilde{y}_t$
1	8,08750	78,86
2	8,8750	83,19
3	8,9125	83,18
4	9,0000	79,70
5	9,2875	76,67
6	9,2750	76,54
7	9,9125	73,94
8	10,0000	72,23
9	10,0875	67,91
10	10,0750	66,56
11	10,3125	62,85
12	11,0000	59,78

№	x_t	$\tilde{y}_t$
13	11,0875	56,96
14	11,0750	49,92
15	11,9125	46,21
16	10,8000	37,36

Проведя корреляционный анализ, получим:

$$\tilde{x}_t = 0{,}185t + 8{,}325;$$

$$R^2 = 0{,}9623;$$

$$\hat{y}_t = -2{,}774t + 90{,}57;$$

$$R^2 = 0{,}915;$$

$$\tilde{y}_t = -12{,}809\hat{x}_t + 194{,}044;$$

$$R^2 = 0{,}743.$$

Можно предположить, что полученные результаты содержат ложную корреляцию ввиду наличия в каждом из рядов линейной или близко к линейной тенденции. Применим метод устранения тенденции по отклонениям от тренда.

t	x_t	$\tilde{x}_t$	$x_t - \tilde{x}_t$	y_t	$\tilde{y}_t$	$y_t - \tilde{y}_t$
1	8,09	8,51	–0,42	78,86	87,8031	–8,9431
2	8,88	8,70	0,18	83,19	85,0282	–1,8382
3	8,91	8,89	0,03	83,18	82,2533	0,9267
4	9,00	9,08	–0,07	79,7	79,4784	0,2216
5	9,29	9,26	0,03	76,67	76,7035	–0,0335
6	9,28	9,45	–0,18	76,54	73,9286	2,6114
7	9,91	9,64	0,28	73,94	71,1537	2,7863
8	10,00	9,83	0,18	72,23	68,3788	3,8512
9	10,09	10,01	0,08	67,91	65,6039	2,3061
10	10,08	10,20	–0,13	66,56	62,829	3,731
11	10,31	10,39	–0,07	62,85	60,0541	2,7959
12	11,00	10,58	0,43	59,78	57,2792	2,5008
13	11,09	10,76	0,33	56,96	54,5043	2,4557
14	11,08	10,95	0,13	49,92	51,7294	–1,8094
15	10,91	11,14	–0,23	46,21	48,9545	–2,7445
16	10,80	11,33	–0,52	37,36	46,1796	–8,8196

Проверим полученные отклонения от трендов на автокорреляцию. Коэффициенты автокорреляции первого порядка по отклонениям от трендов составляют $r_1^{\Delta x} = 0{,}20531$, $r_1^{\Delta y} = 0{,}592968$. Следовательно, временные ряды отклонений от трендов можно использовать для получения количественной характеристики тесноты связи исходных временных рядов.

Проведём корреляционный анализ. Получим:

$$\Delta y_t = 10{,}7401 \Delta x_t - 0{,}0001;$$

$$R^2 = 0{,}4822.$$

Метод последовательных разностей

В ряде случаев вместо аналитического выравнивания с целью устранения тенденции можно применить метод последовательных разностей.

Если временной ряд содержит линейную тенденцию, её можно устранить путём замены исходных уровней ряда цепными приростами (первыми разностями). Если временной ряд содержит тенденцию в форме параболы второго порядка, то для её устранения можно заменить исходные уровни ряда на вторые разности.

Пример 19. По данным примера 18 рассмотреть зависимости по первым разностям.

Решение. Составим таблицу:

Время	y_t	x_t	$\Delta_t y$	$\Delta_t x$
1	78,86	8,09	-	-
2	83,19	8,88	4,33	0,7875
3	83,18	8,91	–0,01	0,0375
4	79,70	9,00	–3,48	0,0875
5	76,67	9,29	–3,03	0,2875
6	76,54	9,28	–0,13	–0,0125
7	73,94	9,91	–2,6	0,6375
8	72,23	10,00	–1,71	0,0875
9	67,91	10,09	–4,32	0,0875
10	66,56	10,08	–1,35	–0,0125
11	62,85	10,31	–3,71	0,2375
12	59,78	11,00	–3,07	0,6875
13	56,96	11,09	–2,82	0,0875
14	49,92	11,08	–7,04	–0,0125
15	46,21	10,91	–3,71	–0,1625
16	37,36	10,80	–8,85	–0,1125

Коэффициенты автокорреляции первого порядка для первых разностей составят:

$$r_1^{\Delta y} = -0{,}31958$$

и

$$r_1^{\Delta x} = -0{,}04148\,.$$

Найдём уравнение регрессии по первым разностям:

$$\Delta_t \hat{y} = 3{,}659 + 0{,}4937\Delta_t x\,.$$

Коэффициент детерминации равен $R^2 = 0{,}231$.

В отличие от уравнения регрессии по отклонениям от тренда параметрам данного уравнения легко дать интерпретацию. При изменении прироста дохода на 1 д. е. прирост потребления изменяется в среднем на 0,49 д. е. в ту же сторону.

При всей своей простоте метод последовательных разностей имеет два существенных недостатка. Во-первых, его применение связано с сокращением числа пар наблюдений, по которым строится уравнение регрессии, и, следовательно, с потерей числа степеней свободы. Во-вторых, использование вместо исходных уровней временных рядов их приростов или ускорений приводит к потере информации, содержащейся в исходных данных.

Включение в модель регрессии фактора времени

В корреляционно-регрессионном анализе устранить воздействие какого-либо фактора можно, если зафиксировать воздействие этого фактора на результат и другие включённые в модель факторы. Этот приём широко используется в анализе временных рядов, когда тенденция фиксируется через включение фактора времени в модель в качестве независимой переменной.

Модель вида $y_t = a + b_1 x_1 + b_2 t + \varepsilon_t$ относится к группе моделей, включающих фактор времени. Очевидно, что число независимых переменных в такой модели может быть больше единицы. Кроме того, это могут быть не только текущие, но и лаговые значения независимой переменной, а также лаговые значения результативной переменной.

Преимущество данной модели по сравнению с методами отклонений от трендов и последовательных разностей в том, что она позволяет учесть всю информацию, содержащуюся в исходных данных, поскольку значения y и x есть уровни исходных временных рядов. Кроме того, модель строится по всей совокупности данных за рассматриваемый период в отличие от метода последовательных разностей, который приводит к потере числа наблюдений. Параметры a и b модели с включением фактора времени определяются обычным МНК.

Пример 20. По данным примера 17 построить модель регрессии с включением фактора времени.

Решение. Построим уравнение регрессии, описывающее зависимость расходов на конечное потребление y от совокупного дохода x и фактора времени. Для расчёта параметров уравнения регрессии воспользуемся обычным МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} an + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} x_t + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t; \\ a \sum\limits_{t=1}^{n} x_t + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2 + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} x_t t = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t x_t; \\ a \sum\limits_{t=1}^{n} t + b_1 \sum\limits_{t=1}^{n} x_t t + b_2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 = \sum\limits_{t=1}^{n} y_t t. \end{cases}$$

Подставив требуемые суммы, получим:

$$\begin{cases} 16a + 1071{,}86b_1 + 136b_2 = 158{,}7; \\ 1071{,}86a + 919{,}76b_1 + 8167{,}36b_2 = 10465{,}46; \\ 136a + 8167{,}36b_1 + 1496b_2 = 1412{,}7. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим уравнение регрессии:

$$\hat{y}_t = 4{,}258419 + 0{,}044896x_t + 0{,}31208t + \varepsilon_t.$$

Коэффициент детерминации составит $R^2 = 0{,}959656$, что означает, что данное уравнение достаточно точно описывает реальный процесс.

Найдём значение r_{yx*t}, т. е. корреляцию между признаками без учёта фактора времени, используя матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}960253 & -0{,}86245 \\ 0{,}960253 & 1 & 0{,}95682 \\ -0{,}86245 & -0{,}95682 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$r_{yx*t} = \frac{r_{yx} - r_{yt} r_{xt}}{\sqrt{\left(1 - r_{yt}^2\right)\left(1 - r_{xt}^2\right)}} = 0{,}694398.$$

Коэффициент детерминации равен $R^2 = 0{,}4822$. Можно сделать вывод, что при использовании фактора времени уравнение достаточно точно описывает реальный процесс.

Проведём сравнительный анализ полученных результатов. Метод отклонения от тренда даёт коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}4822$, метод последовательных разностей $R^2 = 0{,}231$, при использовании фактора времени $R^2 = 0{,}4822$. Следовательно, в данном случае метод последовательных разностей показал самую слабую связь между временными рядами.

Автокорреляция в остатках. Критерий Дарбина – Уотсона

Рассмотрим уравнения регрессии вида

$$y_i = a + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j(t) + \varepsilon_t, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

где k – число независимых переменных модели.

Для каждого момента времени

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j(t) \right).$$

Рассматривая последовательность остатков как временной ряд, можно построить их зависимость от времени. Если каждое следующее значение зависит от предыдущих, то это указывает на наличие автокорреляции в остатках.

Автокорреляция остатков может быть вызвана несколькими причинами, имеющими различную природу. Во-первых, иногда она связана с исходными данными и вызвана наличием ошибок измерения в значениях результативного признака. Во-вторых, в ряде случаев причину автокорреляции остатков надо искать в формулировке модели. Модель может не включать фактор, оказывающий существенное влияние на результат, воздействие которого отражается в остатках.

Существуют два наиболее распространённых метода определения автокорреляции остатков. Первый метод – это построение графика зависимости остатков от времени и визуальное определение наличия или отсутствия автокорреляции. Второй метод – использование критерия Дарбина – Уотсона и расчёт величины:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^{n}\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}.$$

Значение этого критерия табулировано.

Покажем связь между d и коэффициентом автокорреляции остатков первого порядка, который определяется по формуле

$$r_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}_1\right)\left(\varepsilon_{j-1} - \bar{\varepsilon}_2\right)}{\sqrt{\sum_{j=2}^{n}\left(\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}_1\right)^2 \sum_{j=2}^{n}\left(\varepsilon_{j-1} - \bar{\varepsilon}_2\right)^2}},$$

где

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j;$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_{j-1}.$$

Так как ε_j – остатки, то можно предположить, что

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = 0;$$

$$\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j^2 \approx \sum_{j=2}^{n}\varepsilon_{j-1}^2.$$

С учётом этих предположений

$$r_1 \approx \frac{\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j\varepsilon_{j-1}}{\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j^2}.$$

Преобразуем формулу для расчёта критерия Дарбина – Уотсона:

$$d = \frac{\sum_{j=2}^{n}\left(\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2} \approx \frac{2\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j^2 - 2\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j\varepsilon_{j-1}}{\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j^2} \approx$$

$$\approx 2\left(1 - \frac{\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j\varepsilon_{j-1}}{\sum_{j=2}^{n}\varepsilon_j^2}\right) \approx 2\left(1 - r_1\right).$$

Таким образом, если в остатках существует полная положительная автокорреляция и $r_1 = 1$, то $d = 0$. Если в остатках полная отрицательная автокорреляция, то $r_1 = -1$, следовательно, $d = 4$. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $r_1 = 0$ и $d = 2$. Следовательно, $0 \le d \le 4$. Алгоритм выявления автокорреляции остатков на основе критерия Дарбина – Уотсона. Выдвигается гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции остатков. Альтернативные гипотезы H_1 и H_1^* состоят, соответственно, в наличии положительной и отрицательной автокорреляции в остатках. Далее по специальным таблицам определяются критические значения критерия Дарбина – Уотсона d_1 и d_2 для заданного числа наблюдений n, числа переменных в модели k и уровня значимости α. По этим значениям разбивают числовой промежуток $[0; 4]$ на пять отрезков. Принятие или отклонение каждой из гипотез рассматривается в таблице:

$[0; d_1)$	$[d_1; d_2]$	$(d_2; 4-d_2)$	$[4-d_2; 4-d_1]$	$(4-d_1; 4)$
Есть положительная автокорреляция остатков. H_0 отклоняется, принимается H_1	Зона неопределённости	Нет оснований отклонять гипотезу H_0. Автокорреляция остатков отсутствует	Зона неопределённости	Есть отрицательная автокорреляция остатков. H_0 отклоняется, принимается H_1^*

Если фактическое значение критерия Дарбина – Уотсона попадает в зону неопределённости, то на практике предполагают существование автокорреляции остатков и отклоняют гипотезу H_0.

Пример 21. По данным примера 17 проверить гипотезу о наличии автокорреляции в остатках.

Решение. Проверка гипотезы о наличии автокорреляции в остатках.

t	y	$\hat{y}$	ε_t	ε_t^2	$\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})^2$
1	6,0	6,425	–0,425	0,180625		
2	4,4	4,225	0,175	0,030625	–0,60	0,3600
3	5,0	4,975	0,025	0,000625	0,15	0,0225
4	9,0	9,075	–0,075	0,005625	0,10	0,01000
5	7,2	7,175	0,025	0,000625	–0,10	0,0100
6	4,8	4,975	–0,175	0,030625	0,20	0,0400
7	6,0	5,725	0,275	0,075625	–0,45	0,2025
8	10,0	9,825	0,175	0,030625	0,10	0,0100
9	8,0	7,925	0,075	0,005625	0,10	0,0100
10	5,6	5,725	–0,125	0,015625	0,20	0,0400
11	6,4	6,475	–0,075	0,005625	–0,05	0,0025
12	11,0	10,575	0,425	0,180625	–0,50	0,2500
13	9,0	8,675	0,325	0,105625	0,10	0,0100
14	6,6	6,475	0,125	0,015625	0,20	0,0400
15	7,0	7,225	–0,225	0,050625	0,35	0,1225
16	10,8	11,325	–0,525	0,275625	0,30	0,0900
			0	1,01000		1,2200

Значение критерия Дарбина – Уотсона равно

$$d=\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}(\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}=\frac{1{,}22}{1{,}01}\approx 1{,}207921.$$

Сформулируем гипотезы:

H_0 – в остатках нет автокорреляции;

H_1 – в остатках есть положительная автокорреляция;

H_1^* – в остатках отрицательная автокорреляция.

Зададим уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. По таблицам значений критерия Дарбина – Уотсона определим для числа наблюдений $n = 16$ и числа независимых переменных $k = 4$ критические значения $d_1 = 0{,}74$ и $d_2 = 1{,}93$. Так как расчётное значение критерия $d = 1{,}208$ больше d_1 и меньше d_2, т. е. попадаем в критическую область, следовательно, есть незначительная положительная автокорреляция.

Задачи для самостоятельного решения

Линейная регрессия

Задача № 1. По выборке 23, 18, 21, 20, 19, 19, 20, 23, 18, 19 найти выборочное среднее и эмпирическую дисперсию.

Задача № 2. По 20 наблюдениям найдены $S_x^2 = 28$, $S_y^2 = 7$, $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 5$, $r = 0{,}8$. Составить уравнение линейной регрессии.

Задача № 3. Найти выборочный коэффициент корреляции, составить уравнение регрессии, построить диаграмму рассеяния и линию регрессии для следующей выборки:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	43	38	35	37	36	32	36	27	30	26	23	24	13	15	14

Задача № 4. Найти уравнение регрессии, проверить равенство сумм, вычислить значение F-критерия двумя способами для следующей выборки:

x_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
y_i	2	8	10	14	20	24	28	28	34	40

Задача № 5. По десяти парам наблюдений получены следующие результаты: $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i = 140$; $\sum\limits_{i=1}^{10} y_i = 282$; $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i = 3420$; $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i^2 = 2290$; $\sum\limits_{i=1}^{10} y_i^2 = 8924$. Найти уравнения регрессии Y на X и X на Y и коэффициент корреляции двумя способами.

Задача № 6. Ежегодная прибыль двух компаний в течение десяти лет представлена в таблице

x_i	19	16	13	10	4	–6	–4	5	7	6
y_i	15	14	18	13	8	–7	–6	2	7	8

1. Рассчитать регрессионную модель вида $y = a + bx$.

2. Оценить статистическую значимость коэффициента и параметра регрессии.

3. Найти доверительные интервалы для параметров регрессионной модели при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha;k} = 2{,}306$).

4. Проверить значимость уравнения в целом при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($F_{\text{кр}} = 5{,}32$).

Задача № 7. По 20 наблюдениям найдено уравнение регрессии $y = 2 + 3x$. Известно, что факторная и общая суммы вместе равны 162, а остаточная и общая вместе равны 108. Найти остаточную дисперсию и коэффициент детерминации.

Задача № 8. Пусть имеется модель регрессии $y = 8 - 6x$. Известно также, что $r_{xy} = -0{,}8$, $n = 38$. Построить доверительный интервал для коэффициента регрессии и коэффициента корреляции при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha;k} = 2{,}028$).

Задача № 9. По 40 наблюдениям составлено линейное уравнение регрессии и найдено значение $F = 162$. Определить коэффициент корреляции.

Задача № 10. Для прогноза возможного объёма экспорта на основе ВНП предложено использовать линейную регрессионную модель. При этом использовались следующие данные за 16 лет:

ВНП	19	17	21	19	23	25	26	28	35	19	21	28	31	33	36	41
Экспорт	15	15	22	19	26	18	20	23	28	23	29	33	35	29	31	35

1. Найти параметры линейной модели.

2. Найти остаточную дисперсию.

3. Рассчитать стандартные ошибки коэффициентов регрессии и проанализировать статистическую значимость коэффициентов при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha,k} = 2{,}145$).

4. Определить доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

5. Определить коэффициент корреляции двумя способами. Определить доверительный интервал для коэффициента корреляции.

6. Найти среднюю ошибку аппроксимации.

Задача № 11. Наблюдались две переменные помесячно в течение года. Имеется следующая информация: $\bar{x} = 15$; $\bar{y} = 60$; $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 528$; $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 14146$; $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2640$. Найти:

1) коэффициенты парного линейного уравнения регрессии;

2) коэффициент детерминации;

3) остаточную дисперсию;

4) стандартные ошибки коэффициента и параметра регрессии и построить доверительные интервалы для коэффициентов регрессии при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha,k} = 2{,}228$);

5) построить доверительный интервал для коэффициента корреляции.

Задача № 12. Для прогноза возможного объёма экспорта на основе ВНП предложено использовать линейную регрессионную модель. При этом используются данные за 1989–1998 годы.

Годы	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
ВНП	90	110	120	120	130	130	140	150	150	160
Экспорт	190	220	240	240	260	250	280	290	310	360

1. Сформулировать соответствующую регрессионную модель, дав интерпретацию её параметрам.

2. Рассчитать на основе имеющихся данных оценки параметров модели.

3. Вычислить остаточную дисперсию.

4. Рассчитать стандартные ошибки коэффициентов.

5. Определить интервалы для теоретических коэффициентов регрессии при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha,k} = 2{,}306$).

6. Найти коэффициент корреляции между ВНП и экспортом. Построить доверительный интервал для коэффициента корреляции.

7. Найти коэффициент детерминации двумя способами.
8. Найти среднюю ошибку аппроксимации.

Задача № 13. По данным 15-летних наблюдений построена следующая регрессионная модель: $ВНП = -78 + 8{,}08M$ и найдены следующие значения: $m_b = 1{,}01$, $t_a = 10$.

1. Оценить статистическую значимость коэффициентов регрессии при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha,k} = 2{,}306$).

2. Оценить значимость уравнения регрессии $\alpha = 0{,}05$ ($F_{кр} = 5{,}32$).

3. Верно ли утверждение, что денежная масса M имеет существенное положительное влияние на ВНП?
4. Каков смысл отрицательного свободного члена?
5. Предложение денег в году, следующем за периодом наблюдений, планируется на уровне 350. Каково прогнозное значение ВНП на данный год?
6. Найти коэффициент детерминации.

Задача № 14. По 18 наблюдениям получено следующее уравнение регрессии: $y = 3 + 2x$ и найдено $t_b = 8$, найти коэффициент детерминации.

Нелинейная регрессия

Задача № 15. На основе наблюдений получены следующие результаты:

x_i	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10
y_i	8	6	4	2	2	4	6	8	14	16

1. Используя метод наименьших квадратов, найти параметры зависимости $y = a + bx + cx^2$.

2. Найти индекс корреляции для найденной зависимости и коэффициент корреляции.
3. Найти среднюю ошибку аппроксимации.
4. Определить среднее значение коэффициента эластичности.

Задача № 16. Для зависимости вида $y = a + b\sqrt{x}$ найти индекс корреляции по выборке

x_i	1	4	4	1	9	16	25	36	25	25
y_i	50	58	52	58	44	18	24	12	11	18

Задача № 17. Для зависимости вида $y = a + \dfrac{b}{\sqrt{x}}$ найти индекс корреляции по выборке

x_i	1	4	100	1	16	16	4	64	4	64
y_i	47	35	2	37	10	17	17	5	21	13

Задача № 18. Предполагая зависимость $y = a + b\log_2 x$, найти значение F-критерия по выборке

x_i	1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32
y_i	3	5	8	10	13	15	18	20	23	25	28	30

Задача № 19. Зависимость объёма производства y от численности занятых рабочих x по 15 заводам концерна описывается следующим уравнением регрессии: $y = 30 - 0{,}4x + 0{,}04x^2$, при этом доля остаточной дисперсии в общей составляет 20 %. Определить:

1) индекс корреляции;
2) значимость уравнения регрессии при $\alpha = 0{,}05$ ($F_{\text{кр}} = 3{,}885$);
3) коэффициент эластичности, предполагая, что $x = 30$.

Задача № 20. По группе 10 заводов, производящих однородную продукцию, получено уравнение регрессии себестоимости единицы продукции от уровня технической оснащённости: $y = 20 + 10\sqrt{x}$. Факторная дисперсия превышает общую дисперсию в 4,5 раза. Найти:

1) коэффициент эластичности, полагая, $x = 36$;
2) индекс корреляции и значение F-критерия.

Задача № 21. Найти $y(25)$ для зависимости вида $y = \dfrac{a\sqrt{x}}{b+\sqrt{x}}$, если уравнение в условных координатах имеет вид $Y = 5X + \dfrac{1}{3}$.

Задача № 22. Найти коэффициент эластичности при $x = 2$ для зависимости $y = ab^x$, если уравнение в условных координатах имеет вид $Y = \ln 2 - x\ln 3$.

Задача № 23. По данным выборки найти зависимость вида $y = a + \dfrac{b}{x}$, определить индекс корреляции и значение F-критерия.

x	5	10	15	20	25
y	39	34	20	18	15

Задача № 24. По 20 регионам страны изучается зависимость уровня безработицы y от индекса потребительских цен x. Получены результаты:

Показатель	$\ln x$	$\ln y$
Среднее значение	0,6	1,2
Среднее квадратическое отклонение	0,4	0,2

Коэффициент корреляции между логарифмами исходных показателей составил 0,8.

1. Построить уравнение регрессии в степенной форме.
2. Определить коэффициент эластичности.

Задача № 25. Предполагая зависимость $y = ae^{bx}$, найти значение параметров a и b, индекс корреляции по заданной выборке

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4,1	3,4	2,7	2,2	1,8	1,5	1,2	1,1

Множественная регрессия

Задача № 26. Для изучения рынка жилья в городе по данным о 40 коттеджах было построено уравнение множественной регрессии $y = 22 - 6x_1 + 0{,}9x_2 + 4{,}5x_3$, где y – цена объекта, тыс. долл.; x_1 – расстояние до центра города, км; x_2 – полезная площадь объекта, м^2; x_3 – общая площадь объекта, м^2. Кроме этого получены следующие результаты: $R = 0{,}8$, $m_a = 11$, $m_{b1} = 2$, $m_{b2} = 0{,}2$, $m_{b3} = 3$. Требуется проверить значимость уравнения регрессии в целом по F-критерию и построить доверительные интервалы для значимых параметров регрессии. Принять $t_{\text{крит}} = 2{,}024$.

Задача № 27. По 30 наблюдениям найдена матрица парных коэффициентов корреляции.

	y	x_1	x_2	x_3
y	1			
x_1	0,3	1		
x_2	0,6	0,1	1	
x_3	0,7	0,2	0,3	1

1. Построить уравнение регрессии в стандартизованном виде.
2. Проверить наличие мультиколлинеарности при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ $\left(\chi^2_{\text{кр}} = 7{,}814728\right)$.
3. Определить показатели множественной корреляции двумя способами и сравнить полученные значения.
4. Оценить значимость каждого фактора, используя частные критерии F.

Задача № 28. По 30 предприятиям отрасли были получены следующие результаты регрессионного анализа зависимости объёма выпуска продукции y от численности рабочих на предприятии x_1 и среднегодовой стоимости основных фондов x_2: множественный коэффициент корреляции $R = 0{,}85$; уравнение регрессии $y = a + 0{,}48x_1 + 20x_2$; стандартные ошибки параметров $m_a = 2$, $m_{b1} = 0{,}06$; значения t-критерия для параметров $t_a = 1{,}5$, $t_{b2} = 4$.

1. Найти значения параметра a.
2. Проверить значимость параметров регрессии при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ ($t_{\alpha,k} = 2{,}042$).

3. Построить доверительные интервалы для значимых параметров регрессии при том же уровне значимости.

Задача № 29. По 40 наблюдениям составлено уравнение $y = 5 + 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$, найдено значение $F = 108$. Найти R^2.

Задача № 30. По 30 наблюдениям получены следующие данные: уравнение регрессии $y = a + 0{,}26x_1 + 14{,}5x_2 - 1{,}35x_3$; показатель детерминации $0{,}64$; средние значения $\bar{y} = 200$, $\bar{x}_1 = 150$, $\bar{x}_2 = 20$, $\bar{x}_3 = 100$. Требуется:

1) найти скорректированный показатель корреляции;

2) оценить значимость уравнения регрессии в целом $\alpha = 0{,}05$ ($F_{кр} = 2{,}975$);

3) найти значение параметра a;

4) определить частные средние коэффициенты эластичности.

Задача № 31. По 40 предприятиям концерна изучается зависимость прибыли y от выработки продукции на одного работника x_1 и индекса цен на продукцию x_2. Данные приведены в таблице.

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Парный коэффициент корреляции
y	250	40	$r_{yx_1} = 0{,}68$
x_1	160	20	$r_{yx_2} = 0{,}44$
x_2	120	10	$r_{x_1x_2} = 0{,}4$

1. Найти линейные уравнения парной регрессии, оценить их значимость с помощью критерия Фишера.
2. Найти уравнение множественной регрессии в стандартизованном и натуральном масштабе.
3. Найти множественный коэффициент корреляции, общий и частные критерии Фишера и сделать выводы.
4. Найти частные коэффициенты корреляции.

Задача № 32. Изучается зависимость по 25 предприятиям концерна потребления материалов y от энерговооружённости труда x_1 и объёма произведённой продукции x_2. Получены следующие данные: $\bar{y}=12$, $\bar{x}_1=5$, $\bar{x}_2=10$, $S_y=2$, $S_{x_1}=0{,}5$, $S_{x_2}=1{,}8$, $r_{yx_1}=0{,}5$, $r_{yx_2}=0{,}8$, $r_{x_1x_2}=0{,}4$.

1. Составить уравнение множественной регрессии в стандартизованном и натуральном масштабе.
2. Определить частные средние коэффициенты эластичности.
3. Найти множественный коэффициент корреляции, общий и частные критерии Фишера.

Задача № 33. Для заданной выборки составить уравнение множественной регрессии, используя метод наименьших квадратов.

№	y	x	z	t
1	2	2	6	4
2	7	6	7	6
3	3	4	7	6
4	4	6	8	8
5	6	8	9	11
6	11	6	6	5
7	12	6	6	6
8	14	9	7	7
9	17	11	7	6
10	22	25	12	8
11	25	22	9	2
12	17	18	11	12
13	18	17	10	10
14	27	15	9	18
15	28	22	11	15
16	35	45	17	6
17	42	36	13	11
18	36	2	1	13
19	44	34	12	12
20	50	36	12	14

Временные ряды

Задача № 34. Имеются данные об урожайности зерновых в хозяйствах области:

Год	1	2	3	4	5	6	7	8
Урожайность зерновых, ц/га	10,2	10,7	11,7	13,1	14,9	17,2	20	23,2

1. Обосновать выбор типа уравнения тренда.
2. Рассчитать параметры линейного уравнения тренда.
3. Рассчитать параметры параболического тренда.
4. Дать прогноз урожайности зерновых на следующий год, используя уравнение параболического тренда.

Задача № 35. Имеются данные об уровне безработицы y_i (%) за 8 месяцев.

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	4	3	4	6	8	8	10	9

1. Найти коэффициенты автокорреляции уровней ряда первого и второго порядка.
2. Обосновать выбор уравнения тренда и найти его параметры.

Задача № 36. Пусть имеется следующий временной ряд:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_t	20	…	…	…	…	…	…	…	…	…	10

Известно: $\sum_{i=1}^{11} x_i = 200$, $\sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 4200$, $\sum_{i=2}^{10} x_i x_{i-1} = 3700$. Найти коэффициент автокорреляции первого порядка.

Задача № 37. Имеются поквартальные данные по розничному товарообороту России за 1995–1999 гг.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Товарооборот	132	113	84	107	140	120	88	123	148	127
Квартал	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Товаро-оборот	93	130	155	133	98	136	163	140	103	143

1. Построить график временного ряда.
2. Построить мультипликативную модель временного ряда.
3. Оценить качество модели с помощью средней ошибки аппроксимации и остаточной дисперсии.

Задача № 38. Имеются данные об объёме экспорта из России.

1. Построить график временного ряда.
2. Построить мультипликативную и аддитивную модели временного ряда.
3. Оценить качество каждой модели с помощью средней ошибки аппроксимации и остаточной дисперсии. Выбрать лучшую модель.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Экспорт	42	44	38	42	45	46	40	44	47	48	42	46

Квартал	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Экспорт	49	50	44	48	51	52	46	50	53	54	48	52

Задача № 39. Данные наблюдений за временными рядами приведены в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	5,6	7,5	6	12	14	16	17,7	20	21,3	22
y_t	25	27	26	21	15	12	11	10	2	2

1. Построить модель для каждого временного ряда.
2. Построить уравнение регрессии, используя метод первых разностей.
3. Построить уравнение регрессии, используя метод отклонения от тренда.
4. Охарактеризовать тесноту связи между рядами по уровням ряда, по первым разностям и отклонениям от тренда.
5. Охарактеризовать тесноту связи заданных временных с учётом фактора времени.

Задача № 40. Имеются данные об объёме экспорта из России.

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Экспорт	408	473	576	600	563	674	631	710	574	708	731	860

Квартал	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Экспорт	697	689	752	797	587	614	624	604	462	650	628	670

1. Построить график временного ряда.
2. Построить мультипликативную и аддитивную модели временного ряда.
3. Оценить качество каждой модели с помощью средней ошибки аппроксимации и остаточной дисперсии. Выбрать лучшую модель.

Задача № 41. Администрация торговой фирмы интересуется, есть ли взаимосвязь между объёмом продаж и удельным весом женщин среди работников компании. Для этого были собраны данные за последние девять лет.

Показатель	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объём продаж	y	378	385	393	403	414	428	444	462	481
Удельный вес женщин	x	25	24	27	30	31	29	31	33	34

Известны также следующие данные: $\sum_{i=1}^{9} y_i = 3788$, $\sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 1604488$, $\sum_{i=1}^{9} x_i = 264$, $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 7838$, $\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 112001$.

Уравнения тренда каждого из рядов составили:

$$x_t = 23{,}5 + 1{,}17t;$$

$$y_t = 374{,}14 + 3{,}33t + 0{,}95t^2.$$

1. Определить коэффициент корреляции между изучаемыми рядами по их уровням.
2. Определить коэффициент корреляции между изучаемыми рядами по отклонениям от трендов.

3. Охарактеризовать тесноту связи между временными рядами.

Задача № 42. Администрация торговой фирмы интересуется, есть ли взаимосвязь между объёмом продаж и удельным весом женщин среди работников компании. Для этого были собраны данные за последние десять лет.

Показатель	t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объём продаж	y	420	390	360	350	350	380	370	400	430	500
Удельный вес женщин	x	12	14	16	20	19	23	23	27	27	31

Уравнения тренда каждого из рядов составили:

$$x_t = 10{,}2 + 2t;$$

$$y_t = 462 - \frac{519}{11}t + 5t^2.$$

1. Определить коэффициент корреляции между изучаемыми рядами по их уровням.
2. Определить коэффициент корреляции между изучаемыми рядами по отклонениям от трендов.
3. Охарактеризовать тесноту связи между временными рядами.

Задача № 43. Имеются данные об экспорте и импорте Германии.

1. Построить график одновременного движения экспорта и импорта.
2. Построить по каждому ряду тренды и выбрать лучший из них.

3. Оценить автокорреляцию остатков.

4. Оценить тесноту связи по первым разностям, по отклонениям от тренда.

5. Выполнить прогноз уровней одного ряда исходя из его связи с уровнями другого ряда, т. е. составить уравнение линейной зависимости между уровнями этих временных рядов.

Год	Экспорт	Импорт	Год	Экспорт	Импорт
1985	184	158	1991	403	390
1986	243	191	1992	422	402
1987	294	228	1993	382	346
1988	323	280	1994	430	385
1989	341	270	1995	524	464
1990	410	346	1996	521	456

Задача № 44. Имеются данные о разрешениях на строительство нового частного жилья, выданных в США.

Месяц	1990 г.	1991 г.	1992 г.	1993 г.	1994 г.
Январь	72,9	61,4	71,2	78,3	86,4
Февраль	113,4	51	69,9	76,4	87,5
Март	86,2	55,3	74,3	74,5	80,2
Апрель	80,8	59,1	70,2	68,5	84,3
Май	73,7	59,5	68,4	71,6	86,8
Июнь	69,2	64,3	68,5	72,1	86,9
Июль	71,9	62,5	68,6	73,3	85,2
Август	69,9	63,1	70,6	76,2	85,0
Сентябрь	69,4	61,2	69,7	79,8	87,5
Октябрь	63,3	63,2	72,3	81,2	90,0
Ноябрь	60,0	64,3	73,5	83,5	88,4
Декабрь	61,0	63,9	72,5	88,0	85,7

1. Построить автокорреляционную функцию временного ряда, лаг меняется от 1 до 12.

2. Построить аддитивную модель этого ряда.

Задача № 45. На основе поквартальных данных об уровне безработицы в летнем курортном городе (в процентах от экономически активного населения) за последние 5 лет построена мультипликативная модель временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты за каждый квартал приводятся ниже:

I квартал	1,4
II квартал	0,8
III квартал	0,7
VI квартал	-

Уравнение тренда $T = 9{,}2 - 0{,}3t$ (при расчёте параметров тренда для нумерации кварталов использовались натуральные числа $t = 1, \ldots, 20$). На основе построенной модели дать точечные прогнозы уровня безработицы на первый и второй квартал следующего года.

Типовые расчёты

Типовой расчёт по парной регрессии

1. Выписать данные своего варианта.
2. Составить уравнение линейной регрессии.
3. Проверить равенство сумм.
4. Вычислить значение F-критерия двумя способами.
5. Проверить значимость уравнения регрессии в целом.
6. Определить стандартные ошибки коэффициентов регрессии непосредственно.
7. Проверить значимость параметров регрессии и построить доверительные интервалы для этих параметров.
8. Проверить значимость коэффициента корреляции и построить доверительный интервал для него.
9. Найти среднюю ошибку аппроксимации.
10. Рассчитать среднее ожидаемое значение результата, если значение фактора увеличится на S_x от среднего значения.
11. Построить доверительный интервал для прогнозного значения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.
12. Построить корреляционное поле и линию регрессии.

№	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	6,4	8,6	4,4	8,2	7,5	12,3	9,6	15,8	9,4	6,2	9,0	12,8	7,7	12,0
2	10,5	11,8	2,6	5,9	6,5	11,1	9,2	12,4	4,8	–0,4	9,1	11,7	5,3	9,6
3	5,6	7,4	3,6	5,3	3,3	5,8	5,0	8,7	5,5	2,6	6,2	9,7	7,0	13,5
4	2,8	5,7	5,9	9,0	6,2	9,8	7,3	11,4	6,3	4,9	11,6	16,3	9,5	15,3
5	6,3	9,5	6,3	11,1	9,7	13,1	6,8	11,2	6,6	3,5	6,1	13,0	13,8	15,5
6	6,0	11,4	10,9	15,3	8,7	14,6	11,8	15,5	5,7	2,7	7,8	14,0	12,3	16,6
7	10,3	12,2	3,8	7,8	8,1	12,5	8,8	16,0	10,8	5,7	6,4	10,8	8,9	12,7
8	6,8	9,8	6,0	10,1	8,4	11,5	6,2	11,9	8,5	5,1	11,6	15,0	6,7	10,3
9	4,1	6,8	5,3	7,3	4,0	7,1	6,3	10,9	6,9	4,9	9,0	15,7	13,4	15,4
10	7,1	10,2	6,4	12,0	11,4	13,1	3,5	7,2	5,5	2,0	8,2	10,7	5,0	7,2
11	1,8	6,8	9,9	12,1	4,4	7,3	5,7	11,4	8,5	7,6	9,8	15,6	11,8	15,6
12	7,9	12,3	8,7	12,8	8,2	10,3	4,3	7,4	4,8	0,8	12,5	13,5	1,9	7,5
13	8,4	12,2	7,6	10,2	5,1	8,4	6,5	11,4	7,3	3,1	4,1	10,0	11,8	14,1
14	8,1	11,8	7,3	9,9	5,2	10,6	10,8	16,1	8,0	3,9	0,3	5,5	10,3	13,9
15	7,1	11,5	8,7	13,0	8,7	11,6	5,7	9,2	5,2	1,6	4,2	8,0	7,6	14,7
16	9,2	11,5	4,6	6,5	3,9	8,1	8,4	13,9	8,3	3,7	7,2	13,4	12,5	16,2
17	11,4	16,4	9,9	14,7	9,6	13,2	7,2	11,9	7,0	1,3	4,0	9,2	10,4	15,2
18	7,9	11,4	6,9	9,4	4,9	6,6	3,5	9,2	8,7	4,7	12,5	14,6	4,2	9,4
19	7,9	12,0	8,2	11,9	7,4	9,9	4,9	11,3	9,5	5,5	6,4	11,2	9,5	12,9
20	6,4	9,0	5,3	8,0	5,4	8,4	6,1	10,2	6,1	2,9	7,9	12,2	8,7	12,7
21	6,0	10,3	8,7	12,7	8,0	10,9	5,8	12,2	9,6	6,6	12,6	18,2	11,2	13,1
22	3,5	7,5	8,1	11,5	6,8	10,3	7,1	10,9	5,7	4,0	4,9	8,9	8,1	9,2
23	5,9	10,3	8,7	13,0	8,6	12,6	7,9	13,5	8,4	5,4	5,7	7,2	3,0	5,8
24	10,3	14,1	7,6	11,7	8,2	13,5	10,7	14,9	6,3	1,2	5,4	10,3	9,8	12,9
25	9,1	12,7	7,3	11,9	9,3	12,6	6,7	10,3	5,4	0,9	3,1	4,6	3,1	6,3
26	9,2	12,1	5,8	9,9	8,1	12,1	8,1	12,3	6,4	1,8	9,8	14,7	9,8	13,9
27	6,1	8,3	4,3	9,8	11,0	13,9	5,9	10,6	7,2	4,1	6,7	11,3	9,3	11,8
28	6,5	12,9	12,7	17,4	9,5	13,9	8,8	15,2	9,7	6,4	11,8	14,1	4,7	7,2
29	7,4	11,4	8,1	11,3	6,5	8,8	4,6	10,9	9,5	5,8	6,4	8,6	4,5	9,0
30	6,4	8,6	4,4	8,7	8,5	12,8	8,6	13,8	7,9	4,6	13,4	17,6	8,5	11,6
31	7,8	10,7	5,7	9,9	8,4	12,5	8,1	14,2	9,2	5,2	10,4	18,4	15,9	19,8
32	1,5	5,4	7,9	12,9	9,9	11,7	3,6	8,3	7,1	6,4	13,7	17,0	6,6	9,2
33	9,7	14,9	10,4	14,1	7,5	11,1	7,3	14,4	10,7	5,9	10,2	13,6	6,8	13,8
34	6,9	9,8	5,7	10,1	8,8	12,3	7,0	13,0	9,1	5,6	8,6	14,8	12,6	18,3
35	7,9	12,8	9,9	13,3	6,8	9,3	5,1	7,7	3,9	0,0	12,8	16,8	7,9	13,0
36	1,9	5,5	7,2	11,0	7,6	11,1	7,0	11,9	7,4	6,5	7,8	10,6	5,5	10,8
37	7,5	12,5	10,0	13,5	7,2	9,6	4,8	7,6	4,2	0,5	11,1	15,5	8,8	11,8
38	7,4	11,8	8,9	10,9	4,0	6,9	5,8	11,1	8,0	4,4	5,9	11,2	10,7	16,1
39	6,6	9,7	6,3	9,6	6,7	9,7	6,1	9,7	5,4	2,1	4,3	8,1	7,7	15,3
40	8,3	11,8	7,1	11,9	9,5	13,3	7,5	12,3	7,1	3,0	4,9	9,7	9,5	13,2
41	7,5	11,2	7,4	10,9	7,0	9,3	4,6	9,5	7,5	3,7	9,3	15,9	13,2	16,6
42	7,3	11,5	8,5	11,3	5,5	9,6	8,2	13,2	7,4	3,8	5,5	7,7	4,2	5,5
43	7,2	11,6	8,7	14,0	10,6	12,8	4,4	7,4	4,5	0,9	4,6	8,1	7,0	9,0
44	8,1	12,8	9,4	12,0	5,2	6,6	2,7	6,2	5,2	1,1	9,9	13,3	6,9	10,8
45	7,4	11,3	7,9	10,4	5,0	7,7	5,3	10,6	7,9	4,2	12,7	16,1	6,8	11,2
46	7,2	10,2	5,9	9,5	7,2	9,8	5,1	8,6	5,2	1,6	2,9	9,2	12,6	14,1
47	9,1	14,2	10,3	13,1	5,7	9,0	6,7	11,5	7,2	2,7	11,1	15,7	9,3	12,7
48	10,7	14,8	8,2	13,3	10,3	14,0	7,4	14,1	10,1	4,8	14,3	21,8	15,0	20,6
49	5,7	8,2	5,1	9,8	9,4	13,8	8,8	11,2	3,5	0,7	6,9	11,4	9,0	12,2
50	9,5	12,8	6,6	9,0	4,7	6,4	3,2	6,8	5,4	0,6	6,1	10,1	8,0	12,7

№	Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	8,5	13,5	10,0	7,0	6,0	1,5	12,4	17,1	9,4	15,1	11,3	15,2	7,8	1,6
2	8,6	12,0	6,8	1,8	10,0	5,5	7,7	11,3	7,1	12,1	10,0	13,8	7,5	0,9
3	13,1	17,2	8,1	4,0	8,2	5,1	9,2	14,0	9,5	14,4	9,9	12,6	5,5	–2,4
4	11,8	15,0	6,4	0,3	12,3	6,5	7,2	12,8	11,1	18,1	14,2	21,6	14,8	10,7
5	3,3	7,0	7,3	4,4	5,9	2,8	10,6	16,6	12,0	17,6	11,1	14,7	7,1	4,7
6	8,6	13,5	9,7	6,5	6,3	2,4	9,8	14,5	9,4	13,2	7,5	12,1	9,3	4,8
7	7,6	12,1	9,1	5,8	6,7	3,5	12,1	16,5	8,8	17,8	18,1	21,5	6,8	0,5
8	7,2	10,8	7,2	4,3	5,7	–0,1	11,3	15,9	9,2	13,5	8,5	16,9	16,7	9,9
9	4,1	7,6	7,1	2,1	10,1	5,6	8,5	13,6	10,2	14,7	9,0	17,0	16,0	11,1
10	4,4	7,2	5,7	0,0	11,6	7,5	6,5	12,8	12,8	16,4	7,3	11,2	7,9	3,0
11	7,7	11,9	8,5	5,8	5,3	0,5	10,5	14,9	8,7	12,0	6,7	11,0	8,5	1,9
12	11,1	14,6	7,2	3,7	7,0	0,7	14,4	18,7	8,6	14,1	11,0	17,2	12,4	5,7
13	4,6	7,7	6,1	1,7	8,9	6,9	4,5	9,3	9,6	15,6	12,0	16,0	8,0	1,2
14	7,3	8,6	2,5	–4,2	13,4	13,2	14,5	19,7	10,4	18,9	16,9	21,3	8,7	4,8
15	14,2	18,5	8,6	0,7	15,6	13,5	12,3	14,5	4,3	7,1	5,5	10,0	9,0	4,4
16	7,4	10,1	5,4	4,4	1,9	–1,7	10,9	16,1	10,6	16,8	12,5	14,8	4,6	0,2
17	9,6	12,4	5,7	1,7	8,0	6,0	11,2	17,4	12,5	16,8	8,6	14,7	12,1	8,1
18	10,3	15,4	10,2	6,1	8,2	2,0	7,1	11,1	7,9	15,8	15,8	20,1	8,7	1,9
19	6,7	11,0	8,5	2,2	12,7	9,5	5,9	9,1	6,4	14,1	15,4	21,0	11,2	7,4
20	8,0	11,0	5,8	1,6	8,3	4,4	6,7	12,5	11,5	15,4	7,9	13,9	12,2	5,9
21	3,9	6,4	5,0	–1,5	13,0	6,7	6,7	12,1	10,7	17,3	13,3	17,2	7,9	1,4
22	2,3	7,6	10,7	7,1	7,3	4,9	10,4	14,3	7,9	11,4	7,1	12,2	10,2	7,3
23	5,7	7,1	2,8	–0,1	5,8	2,9	15,7	22,1	12,8	18,2	10,8	18,4	15,3	11,6
24	6,1	10,0	7,9	5,3	5,2	2,5	13,8	17,4	7,3	13,9	13,2	18,0	9,7	4,2
25	6,5	11,7	10,3	9,2	2,1	0,6	9,1	14,2	10,2	16,0	11,5	13,1	3,2	–0,4
26	8,2	13,6	10,7	9,6	2,2	–2,7	9,0	13,2	8,5	14,3	11,6	17,1	10,9	4,6
27	5,0	11,6	13,2	7,1	12,1	8,8	10,0	13,5	7,1	13,2	12,2	18,9	13,3	9,5
28	5,0	8,9	7,7	5,8	3,8	–2,1	12,9	19,9	13,9	18,9	9,9	16,9	14,1	4,9
29	9,1	12,2	6,3	1,9	8,7	5,5	10,0	15,8	11,5	17,0	11,1	17,6	13,0	7,2
30	6,2	7,6	2,8	0,3	4,9	–1,8	8,9	13,0	8,3	13,7	10,8	16,0	10,4	4,6
31	7,8	13,3	11,0	7,4	7,3	2,1	12,4	16,1	7,4	13,2	11,5	14,8	6,7	3,2
32	5,3	8,3	6,1	2,8	6,7	–0,2	7,4	16,5	18,3	24,1	11,6	18,6	13,9	8,3
33	14,0	17,2	6,5	3,0	6,9	1,7	11,8	17,2	11,0	18,7	15,5	21,5	12,1	6,8
34	11,4	13,9	5,0	5,1	–0,3	–4,6	7,8	12,6	9,6	13,2	7,2	12,0	9,5	2,6
35	10,2	14,5	8,6	4,1	8,9	2,5	10,1	19,9	19,6	22,5	5,7	9,3	7,2	1,3
36	10,4	13,4	6,0	4,1	3,8	–0,1	11,1	16,1	10,0	15,5	11,0	17,9	13,8	9,6
37	5,9	11,1	10,4	5,6	9,5	3,9	9,3	15,4	12,2	15,9	7,4	10,4	5,9	1,2
38	10,7	16,5	11,7	9,1	5,2	2,3	10,3	13,8	6,9	13,3	12,6	16,6	7,9	2,6
39	15,2	17,7	4,9	1,5	6,9	4,7	9,9	16,2	12,6	21,8	18,5	20,3	3,6	–1,5
40	7,3	10,4	6,2	–0,4	13,2	10,8	11,7	15,9	8,4	14,1	11,4	18,1	13,4	7,8
41	6,8	10,4	7,0	4,4	5,2	0,6	10,2	16,4	12,3	16,6	8,7	14,0	10,7	6,8
42	2,4	4,5	4,2	–0,4	9,3	6,5	12,8	17,9	10,2	15,1	9,9	14,6	9,4	3,5
43	4,1	5,4	2,7	–3,1	11,6	9,3	9,8	16,6	13,8	17,6	7,7	15,6	15,8	11,5
44	7,9	9,7	3,5	–3,8	14,6	9,7	11,5	16,7	10,5	17,3	13,7	18,9	10,5	5,3
45	8,8	11,2	4,8	3,8	2,0	–4,3	6,1	12,0	11,8	15,5	7,6	14,3	13,5	9,1
46	3,0	9,0	11,9	7,6	8,6	7,1	10,4	16,1	11,5	17,5	12,0	15,1	6,2	–1,9
47	6,8	9,7	5,7	2,3	6,7	1,2	9,4	15,1	11,4	15,0	7,2	11,7	9,1	3,0
48	11,2	16,6	10,8	10,2	1,1	–6,1	11,9	16,4	8,9	14,9	11,9	14,5	5,1	–0,6
49	6,3	8,1	3,5	0,5	6,1	2,7	12,6	19,1	13,0	18,4	10,7	17,3	13,2	6,7
50	9,5	12,1	5,1	0,2	9,8	6,8	15,1	19,7	9,1	13,9	9,5	12,6	6,2	0,9

№	Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20		Вариант 21	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	12,6	6,4	114	185	143	186	105	53	103	47	87	139	56,9	85,3
2	13,2	9,4	110	160	99	146	63	9	109	54	95	127	41,8	65,7
3	15,8	11,2	94	136	82	143	98	39	119	72	121	171	51,4	80,2
4	8,2	4,6	101	153	105	146	109	52	114	64	81	136	56,3	84,3
5	4,8	–0,5	105	164	118	164	110	43	134	82	91	147	74,6	99,5
6	9,0	4,1	94	138	88	128	53	–3	113	66	81	107	33,1	58,6
7	12,7	6,7	125	174	99	159	66	1	130	68	121	154	47,7	74,6
8	13,6	7,9	88	135	93	151	140	95	89	45	115	185	47,2	71,0
9	9,9	5,6	100	138	76	139	148	129	38	–12	125	199	65,0	90,3
10	9,8	6,6	120	188	137	186	98	56	84	24	98	147	57,5	75,9
11	13,2	8,0	104	150	91	162	90	54	72	20	142	186	60,7	77,3
12	13,5	6,3	97	133	73	113	119	64	110	62	80	139	30,3	63,3
13	13,5	11,2	95	132	74	139	73	21	105	58	130	166	29,1	60,3
14	7,7	0,5	114	171	115	157	86	59	54	–2	84	127	34,6	54,3
15	9,1	2,9	113	151	77	139	102	56	92	36	123	174	49,8	81,3
16	8,8	3,3	85	115	60	94	78	24	106	64	67	106	47,0	66,1
17	8,1	2,5	112	171	119	168	128	69	118	62	97	161	54,0	71,6
18	13,6	10,1	147	199	105	161	125	70	112	38	113	176	43,7	73,3
19	7,6	4,6	104	137	66	105	50	–1	101	49	77	102	59,1	81,6
20	12,4	9,1	99	155	111	156	94	35	117	67	91	138	40,0	68,0
21	13,0	9,6	89	137	97	162	108	67	82	37	131	185	68,2	93,1
22	5,7	0,5	77	127	102	160	99	43	111	73	116	166	55,5	80,4
23	7,4	–0,5	116	178	126	202	95	47	96	38	153	201	44,7	61,2
24	10,9	4,0	81	128	93	138	122	61	123	82	90	151	52,7	83,7
25	7,0	2,5	123	183	121	167	123	74	98	37	93	155	55,1	85,3
26	12,5	8,0	132	181	97	149	112	69	86	20	103	159	49,2	75,9
27	7,6	2,6	101	169	135	204	122	75	95	44	137	199	57,8	88,3
28	18,4	11,9	108	154	93	137	94	56	77	23	88	135	34,9	61,1
29	11,6	6,6	90	131	82	113	82	22	119	74	62	103	48,0	63,5
30	11,5	7,1	102	166	127	171	91	43	96	45	89	135	52,3	73,7
31	6,9	0,7	103	142	77	124	107	64	86	35	95	149	58,3	80,8
32	11,4	7,7	94	130	72	113	79	37	84	37	82	122	55,0	82,3
33	10,5	4,7	81	125	88	128	79	39	81	41	80	120	56,5	77,8
34	13,8	9,9	124	176	105	168	87	31	112	50	128	171	46,8	65,6
35	11,7	6,7	56	97	81	144	107	54	108	80	125	179	50,6	73,6
36	8,4	2,9	95	150	109	150	95	22	144	97	82	129	38,9	68,8
37	9,3	4,6	116	163	93	165	117	58	116	58	145	203	51,4	79,2
38	10,7	5,5	97	143	93	138	59	1	116	68	89	119	54,3	73,0
39	10,2	5,2	112	161	96	145	100	53	93	36	97	147	65,9	92,2
40	11,2	5,3	92	134	83	144	109	65	88	42	121	175	49,4	86,5
41	7,8	2,7	106	156	98	152	97	19	157	104	108	157	39,6	60,2
42	11,7	5,3	61	96	71	122	123	73	100	70	102	164	57,2	82,8
43	8,5	3,6	103	153	101	144	120	83	75	24	86	147	24,1	48,5
44	10,4	4,7	87	130	86	148	70	9	123	79	124	159	42,2	66,6
45	8,7	5,7	115	166	103	170	81	21	119	62	133	173	41,0	65,6
46	16,3	11,1	85	131	93	129	113	48	130	87	73	129	63,5	94,5
47	12,3	7,5	96	149	106	143	116	60	112	64	76	134	43,1	72,4
48	11,4	5,4	135	194	117	150	94	42	104	36	67	114	51,4	71,8
49	13,2	6,9	110	181	142	183	108	55	105	50	83	137	44,7	66,8
50	10,7	3,1	97	148	103	164	121	57	126	78	122	182	65,8	95,7

№	Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25		Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	56,9	85,3	57,0	79,1	44,3	11,6	65,4	37,0	30,0	39,0	35,9	57,5	43,1	63,1
2	47,7	68,5	41,6	72,7	62,3	38,9	46,7	25,8	39,6	49,6	40,3	61,2	41,8	61,5
3	57,7	80,0	44,6	63,2	37,0	13,5	47,0	21,3	35,0	43,8	35,3	55,1	39,7	56,5
4	56,2	73,5	34,6	55,1	41,0	12,7	56,5	28,4	41,4	50,2	35,0	50,9	31,8	52,1
5	61,0	88,2	54,3	81,2	53,8	34,1	39,3	2,0	40,1	52,6	50,0	70,7	41,4	63,7
6	51,0	80,7	59,5	74,3	29,7	2,6	54,2	37,6	34,9	44,9	40,0	62,4	44,9	65,4
7	53,8	79,0	50,5	76,6	52,3	27,3	50,0	26,1	44,4	54,2	39,2	57,9	37,4	60,9
8	47,4	68,1	41,3	63,0	43,4	17,2	52,3	28,7	39,6	48,6	35,9	54,0	36,4	56,4
9	50,8	73,8	46,1	66,1	40,1	20,5	39,4	6,9	37,6	46,6	35,8	58,0	44,5	70,1
10	36,8	57,9	42,3	74,8	64,9	32,9	64,1	35,4	35,1	44,7	38,3	56,6	36,5	54,8
11	33,1	63,8	61,3	87,2	51,7	27,4	48,5	18,1	35,4	46,7	44,9	62,1	34,4	55,1
12	66,0	95,1	58,2	93,3	70,2	53,5	33,5	18,3	37,2	45,0	31,1	52,5	42,8	63,5
13	62,5	86,7	48,4	69,7	42,5	19,9	45,2	30,6	37,5	45,2	31,1	49,7	37,2	56,8
14	39,5	62,3	45,7	73,1	54,8	27,2	55,3	38,0	47,8	56,5	34,8	52,4	35,2	57,8
15	63,0	96,6	67,2	92,7	50,9	29,6	42,7	17,8	39,8	49,5	38,6	58,0	38,7	64,8
16	38,2	57,7	39,1	64,3	50,4	29,3	42,2	18,7	45,8	55,6	39,2	52,5	26,6	45,2
17	35,2	53,8	37,3	60,0	45,3	16,1	58,3	31,3	45,8	58,1	49,0	62,9	27,8	47,9
18	59,2	88,1	57,9	91,5	67,3	37,6	59,3	37,5	38,3	48,8	42,2	60,3	36,3	58,2
19	45,0	65,1	40,2	71,1	61,8	35,5	52,7	23,1	29,8	38,8	36,3	54,2	35,7	57,6
20	55,9	83,2	54,5	78,8	48,6	29,1	39,0	19,0	39,1	48,1	36,2	48,6	25,0	43,6
21	49,9	68,4	36,9	61,3	48,6	26,7	44,0	9,9	51,8	63,7	47,7	64,5	33,6	52,4
22	49,7	80,0	60,5	81,9	42,8	19,2	47,4	19,6	45,5	56,8	45,3	65,6	40,6	60,2
23	33,1	53,6	41,0	72,5	62,9	26,8	72,2	49,9	48,5	57,7	37,0	60,5	46,9	69,2
24	62,0	92,3	60,5	83,9	46,7	21,6	50,2	23,9	37,1	47,2	40,3	59,0	37,4	56,5
25	60,5	80,7	40,3	65,8	51,0	18,8	64,2	36,7	40,9	50,1	36,9	59,7	45,7	67,5
26	53,4	78,8	50,8	78,9	56,2	28,5	55,4	30,8	42,9	52,6	38,9	61,6	45,4	65,9
27	60,9	83,4	45,0	71,4	52,9	32,0	41,7	12,8	39,2	47,6	33,6	52,3	37,4	52,3
28	52,4	72,3	39,9	57,0	34,2	19,8	28,7	11,3	42,8	51,3	34,3	53,0	37,4	57,7
29	31,1	52,5	42,7	68,4	51,4	30,4	42,0	18,0	35,1	46,2	44,4	66,8	44,7	65,3
30	42,8	78,1	70,7	90,8	40,1	14,9	50,4	24,2	43,3	53,0	38,6	62,5	47,7	68,4
31	44,9	62,5	35,2	58,6	46,8	17,8	58,0	28,8	51,0	62,5	45,7	63,7	35,9	54,0
32	54,5	83,3	57,6	81,4	47,6	13,6	67,9	40,4	31,8	42,2	41,7	63,9	44,5	60,0
33	42,6	63,8	42,3	68,6	52,6	25,1	54,9	26,7	31,8	42,4	42,2	60,2	36,0	59,0
34	37,6	57,2	39,1	55,6	33,0	4,5	57,1	33,7	31,0	41,6	42,4	60,6	36,4	55,2
35	46,0	71,0	50,0	79,2	58,5	36,5	44,2	18,9	42,5	53,8	44,9	67,1	44,3	65,6
36	59,8	78,3	37,0	58,3	42,6	16,9	51,3	31,9	34,8	45,8	44,0	62,3	36,6	54,6
37	55,5	90,4	69,8	99,3	59,1	35,2	47,8	22,1	42,8	50,6	31,0	48,2	34,3	57,3
38	37,3	65,8	57,1	84,7	55,2	34,1	42,1	15,0	44,4	56,5	48,1	65,9	35,6	56,1
39	52,6	78,2	51,1	69,4	36,5	11,9	49,2	16,2	37,7	46,6	35,6	56,1	41,1	59,5
40	74,1	97,5	46,8	68,5	43,4	17,5	51,8	27,1	40,0	50,7	42,6	58,9	32,6	55,0
41	41,2	60,9	39,3	62,3	46,1	25,2	41,7	21,9	44,2	53,7	37,9	58,9	42,1	63,0
42	51,2	78,8	55,1	80,9	51,5	31,6	39,8	11,2	35,5	43,7	32,6	48,4	31,6	51,5
43	48,9	80,5	63,1	83,4	40,8	8,5	64,7	52,6	43,6	54,6	43,9	66,3	44,7	59,8
44	48,7	77,7	57,9	78,4	41,1	12,5	57,2	36,1	51,2	60,2	35,8	57,6	43,5	66,5
45	49,2	73,6	48,7	68,1	38,9	15,8	46,3	25,8	39,6	49,1	38,1	56,1	36,0	54,5
46	62,0	88,8	53,6	66,4	25,5	0,5	50,1	18,3	45,6	55,9	41,2	62,0	41,6	63,3
47	58,5	88,5	60,1	91,3	62,5	33,1	58,9	37,3	48,6	58,9	41,0	64,7	47,5	67,1
48	40,8	62,3	42,9	65,5	45,0	17,6	54,8	29,1	41,5	50,8	37,3	59,0	43,5	62,3
49	44,2	66,0	43,5	74,0	61,1	27,9	66,3	43,9	38,0	47,9	39,4	58,7	38,6	57,3
50	59,9	80,9	42,0	64,7	45,4	19,5	51,8	18,9	40,7	49,7	36,0	61,1	50,1	68,5

№	Вариант 29		Вариант 30		Вариант 31		Вариант 32		Вариант 33		Вариант 34		Вариант 35	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	40,1	16,1	47,9	32,9	16,9	24,4	22,8	31,6	17,6	28,4	21,6	8,0	27,4	18,9
2	39,4	16,1	46,6	26,8	27,6	35,8	24,3	31,8	15,1	27,1	24,0	13,7	20,7	6,9
3	33,7	14,0	39,4	21,9	20,9	26,5	16,8	26,2	18,8	29,5	21,5	8,9	25,1	14,6
4	40,7	19,7	42,0	21,3	22,1	30,5	25,2	35,1	19,9	27,0	14,3	4,5	19,5	8,5
5	44,6	23,8	41,5	21,5	19,2	28,4	27,7	38,6	21,9	36,9	30,0	18,0	24,1	14,5
6	41,1	17,0	48,2	30,8	25,8	33,1	22,0	35,1	26,2	41,1	29,8	21,3	16,9	4,0
7	47,0	26,0	41,9	19,7	18,9	25,5	19,7	29,8	20,3	24,8	9,0	1,7	14,7	5,2
8	40,1	16,0	48,1	28,3	26,0	30,4	13,2	21,7	17,0	27,9	21,7	12,6	18,2	5,2
9	51,1	31,2	39,9	21,1	20,5	25,2	14,3	28,4	28,3	37,2	17,8	9,4	16,8	6,5
10	36,5	15,9	41,3	23,7	28,4	37,0	25,8	33,2	15,0	24,9	19,9	10,1	19,7	5,5
11	41,5	24,8	33,4	15,6	19,2	26,8	22,7	31,7	18,1	30,5	24,7	16,0	17,3	7,7
12	41,5	21,4	40,2	21,6	17,1	23,8	20,3	30,9	21,2	29,6	16,8	8,7	16,2	7,7
13	39,2	22,6	33,2	14,5	15,2	20,6	16,2	27,7	23,0	34,5	23,2	16,7	12,9	5,4
14	45,1	28,2	33,6	9,7	22,1	27,9	17,2	24,0	13,5	24,3	21,5	10,0	23,0	11,9
15	52,1	31,8	40,5	20,6	18,6	28,5	29,6	39,3	19,3	34,6	30,6	23,2	14,7	5,4
16	37,3	15,6	43,5	20,6	27,2	34,3	21,1	32,3	22,6	31,0	16,9	4,7	24,5	10,9
17	40,1	26,5	27,2	4,3	25,7	32,8	21,2	30,1	17,8	25,9	16,2	7,5	17,5	4,7
18	43,8	27,4	32,8	13,6	29,9	33,9	12,0	22,5	20,9	29,7	17,7	13,0	9,4	–5,6
19	43,8	25,2	37,2	22,3	12,4	16,6	12,6	22,6	20,1	31,2	22,2	10,5	23,5	17,3
20	37,3	16,3	41,9	22,4	15,9	24,3	25,2	32,2	14,1	25,0	21,8	9,2	25,4	17,4
21	37,6	14,1	46,9	21,0	9,0	13,5	13,3	26,8	27,0	38,4	22,9	12,2	21,5	16,9
22	39,2	19,4	39,6	16,8	13,2	19,9	20,2	28,2	16,1	23,5	14,8	2,9	23,8	17,2
23	44,5	26,2	36,6	12,4	19,7	26,6	20,6	30,6	20,0	30,4	20,8	7,5	26,5	16,7
24	38,3	16,0	44,5	26,0	7,5	14,7	21,4	32,8	22,7	30,8	16,2	8,3	15,9	12,2
25	43,6	26,0	35,1	14,6	18,2	26,7	25,5	32,7	14,4	24,2	19,7	13,1	13,2	4,1
26	40,9	19,4	43,1	21,7	20,8	29,7	26,8	40,7	27,9	41,6	27,4	18,4	18,2	7,8
27	29,9	8,0	43,6	24,0	20,0	26,8	20,5	29,9	18,8	26,8	15,9	1,3	29,2	19,2
28	40,6	17,8	45,5	24,1	21,2	27,0	17,3	31,1	27,5	39,9	24,8	17,5	14,6	4,0
29	41,2	22,9	36,6	19,1	18,5	23,5	15,1	27,6	25,1	35,5	20,7	15,3	10,8	1,6
30	41,4	18,3	46,2	24,5	21,8	29,1	21,9	34,1	24,4	32,5	16,3	7,2	18,2	7,3
31	36,3	15,6	41,4	15,9	7,3	15,6	24,8	39,6	29,5	38,9	18,8	5,0	27,5	23,9
32	31,1	8,4	45,4	29,5	17,1	24,6	22,3	35,2	26,0	35,9	20,0	11,5	17,0	8,4
33	45,9	21,5	48,9	33,0	20,8	29,6	26,4	36,7	20,6	29,2	17,2	6,6	21,2	10,8
34	37,6	16,3	42,5	27,0	27,5	32,7	15,7	28,7	26,1	39,2	26,3	16,0	20,6	6,8
35	42,5	24,8	35,5	14,2	17,0	23,3	19,0	28,1	18,2	30,8	25,2	14,4	21,8	13,2
36	36,0	16,6	38,9	21,4	17,5	23,3	17,4	28,0	21,3	31,1	19,6	12,0	15,3	6,6
37	46,0	26,2	39,6	18,2	24,0	29,8	17,7	27,7	20,1	29,2	18,3	7,4	21,8	9,8
38	40,9	21,3	39,2	17,0	19,0	25,0	18,1	24,8	13,5	24,6	22,3	11,4	21,8	12,3
39	36,9	16,7	40,4	21,6	23,0	31,1	24,6	32,0	14,9	26,9	24,2	10,9	26,5	15,1
40	44,7	26,7	35,8	15,8	11,0	14,4	10,0	17,6	15,2	22,7	15,1	7,6	14,9	9,3
41	41,9	25,1	33,5	11,4	30,1	36,7	19,8	29,3	19,1	29,4	20,7	8,2	24,8	9,8
42	40,0	18,6	42,8	25,0	25,7	28,8	9,1	19,4	20,7	29,3	17,1	5,3	23,6	10,7
43	30,1	12,7	34,8	13,0	22,3	28,7	19,1	29,4	20,7	22,7	4,0	–7,6	23,3	12,2
44	46,1	26,4	39,2	13,6	8,8	11,4	7,8	16,0	16,3	27,4	22,2	13,4	17,5	13,1
45	37,0	19,7	34,7	14,9	15,0	23,6	25,8	37,2	22,7	32,6	19,7	11,4	16,6	9,1
46	43,4	22,6	41,6	18,8	21,6	25,9	12,9	22,9	20,0	32,2	24,3	11,8	25,0	14,2
47	39,2	22,7	33,0	8,7	17,9	23,4	16,4	24,9	16,9	29,2	24,7	16,2	17,0	8,0
48	37,7	22,2	31,1	10,3	24,8	30,0	15,7	24,3	17,2	23,0	11,7	2,6	18,1	5,7
49	37,4	17,7	39,5	20,5	13,9	23,8	29,6	44,9	30,6	41,7	22,2	12,3	19,8	12,8
50	36,9	15,4	43,0	22,6	25,0	32,3	21,9	30,2	16,7	29,5	25,8	14,5	22,6	10,1

Типовой расчёт по нелинейной регрессии

Методом наименьших квадратов выбрать зависимость одного из следующих типов:

$$y = ab^x;\ y = a + b\ln x;$$

$$y = \frac{ax}{b+x}\ y = a + bx^2;\ y = a + b\sqrt{x}.$$

Для выбранной зависимости определить индекс корреляции и среднюю ошибку аппроксимации. Выяснить вопрос о возможности замены выбранной зависимости. Оценить адекватность выбора линейной зависимости при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Выбранную зависимость и эмпирические данные изобразить на чертеже.

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}
2	4,1	3,0	6,7	4,5	3,4	6,8	3,9	12,2	10,0	3,5	–3,2	14,2	1,7	6,4
3	5,3	3,5	9,2	6,5	3,9	7,5	8,0	10,9	13,6	6,8	–2,2	13,7	2,9	5,1
4	6,2	4,0	11,4	7,9	4,6	8,1	10,9	9,8	16,7	9,1	–0,8	13,3	4,1	4,1
5	6,8	5,0	13,3	9,0	5,5	8,5	13,1	8,9	19,2	10,9	1,0	13,1	4,9	3,3
6	7,4	6,0	15,0	10,0	6,6	8,9	14,9	8,0	21,4	12,3	3,2	12,8	5,8	2,6
7	7,8	7,0	16,5	10,7	7,9	9,3	16,5	7,2	23,3	13,6	5,8	12,7	6,6	2,1
8	8,2	8,6	17,8	11,4	9,4	9,7	17,8	6,5	25,0	14,6	8,8	12,5	7,3	1,7
9	8,6	10,3	18,9	12,0	11,1	10,1	19,9	5,8	26,5	15,6	12,2	12,4	8,1	1,3
10	8,9	12,4	20,0	12,5	13,0	10,3	20,0	5,2	27,8	16,4	16,0	12,2	8,6	1,1
11	9,2	14,9	21,0	13,0	15,1	10,6	21,0	4,7	28,9	17,2	20,2	12,1	9,3	0,9

x	y_{15}	y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{26}	y_{27}	y_{28}
2	8,9	2,1	18,6	3,6	8,6	26,5	17,2	48,7	2,7	0,1	2,0	5,0	0,5	3,0
3	12,6	5,3	17,8	4,0	12,0	24,5	16,5	47,1	3,9	2,5	2,3	6,9	0,7	4,3
4	16,0	8,0	17,2	4,4	15,0	23,1	16,1	44,7	5,0	6,0	2,4	8,6	1,0	5,5
5	19,0	10,4	16,8	4,8	17,6	22,0	15,5	42,7	5,9	10,5	2,5	10,0	1,5	6,7
6	21,8	12,5	16,4	5,3	20,0	21,0	15,1	37,9	6,8	16,0	2,6	11,3	2,3	7,7
7	24,3	14,5	16,1	5,8	22,1	20,3	14,7	33,7	7,6	22,5	2,6	12,4	3,4	8,8
8	26,7	16,3	15,8	6,4	24,0	19,6	14,3	28,7	8,3	30,0	2,7	13,3	5,1	9,7
9	28,8	18,0	15,6	7,1	25,7	19,0	13,9	23,1	9,0	38,5	2,7	14,2	7,7	10,6
10	30,8	19,6	15,4	7,8	27,3	18,5	13,6	16,6	9,6	48,0	2,7	15,0	11,5	11,4
11	32,6	21,2	15,2	8,6	28,7	18,0	13,3	9,7	10,3	58,5	2,8	15,7	17,3	12,2

x	y_{29}	y_{30}	y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}	y_{35}
2	2,9	6,6	7,2	17,2	14,6	3,3	4,3
3	3,8	5,8	4,3	16,5	14,1	4,6	5,2
4	4,4	5,2	2,6	16,0	13,4	5,7	6,2
5	5,0	4,8	1,6	15,5	12,5	6,7	7,5
6	5,5	4,4	0,9	15,1	11,4	7,5	9,0
7	5,8	4,1	0,6	14,7	10,1	8,2	10,7
8	6,2	3,8	0,3	14,3	8,6	8,9	12,9
9	6,4	3,6	0,2	14,0	6,9	9,5	15,5
10	6,7	3,4	0,1	13,7	5	10,0	18,6
11	6,9	3,2	0,1	13,4	2,9	10,5	22,3

Типовой расчёт по множественной регрессии

Из заданного набора факторов удалить фактор, ответственный за мультиколлинеарность. Для оставшихся факторов составить уравнение множественной регрессии в стандартизованном и в натуральном масштабе переменных.

1. Найти индекс множественной корреляции тремя способами и сравнить полученные значения.

2. Оценить значимость уравнения регрессии по F-критерию, значение критерия рассчитать двумя способами, оценить качество уравнения через среднюю ошибку аппроксимации.

3. Оценить значимость, оценить статистическую значимость параметров через частные F-критерии и с помощью t-критерия рассчитать частные коэффициенты корреляции и отобрать только информативные факторы, построить модель только с информативными факторами.

4. Построить уравнение частной регрессии для наиболее значимого фактора. Построить поле корреляции для этого фактора и признака, нанести на него полученное частное уравнение регрессии.

5. Рассчитать прогнозное значение результата, если прогнозные значения факторов составят $\bar{x}+S$, рассчитать ошибки и доверительный интервал для полученного прогнозного значения при уровне значимости 5 % ($\alpha = 0{,}05$).

Вариант 1

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	41,56	5,40	3,44	26,42	6,49
2	59,11	8,55	8,40	29,78	9,47
3	20,93	1,63	5,53	19,43	8,19
4	10,68	3,83	4,62	4,27	2,62
5	19,15	2,31	4,04	10,29	4,45
6	14,32	1,76	4,86	9,70	5,19
7	28,86	6,27	5,27	18,12	5,35
8	17,58	5,26	8,69	7,78	5,83
9	53,45	5,63	4,97	36,11	9,94
10	23,75	7,73	10,75	1,97	4,69
11	82,88	9,32	2,78	38,63	7,08
12	29,66	7,80	9,84	9,42	5,83
13	22,86	4,95	7,35	8,80	5,24
14	58,56	7,52	3,11	22,92	4,31
15	18,96	2,96	5,27	13,83	5,94
16	65,33	6,06	5,35	37,60	10,39
17	0,82	2,52	4,53	–5,17	0,84
18	66,37	8,90	3,44	26,24	4,69
19	39,65	7,52	6,93	25,23	7,75
20	51,75	7,19	3,26	19,69	3,77
21	26,63	7,39	6,65	11,32	4,12
22	23,87	5,52	6,26	20,71	7,12
23	47,57	6,28	4,18	39,10	9,77
24	42,28	6,97	6,14	26,15	7,66
25	40,01	7,72	4,73	17,88	4,15
26	44,21	8,22	3,60	17,18	2,88
27	53,57	7,42	7,28	34,66	10,41
28	52,21	8,89	8,61	16,86	6,23
29	41,38	6,00	6,91	15,08	5,95
30	34,51	3,89	2,45	31,06	7,66
31	38,95	6,89	7,24	17,78	6,43
32	11,36	3,95	8,48	3,97	5,38
33	24,98	4,32	4,36	16,14	5,14
34	30,15	5,09	4,95	26,12	7,70
35	37,76	7,03	4,78	34,14	8,61
36	9,68	2,48	7,10	6,72	5,77
37	42,77	6,08	4,69	17,69	4,90
38	44,62	7,70	7,61	20,23	6,91
39	30,27	7,38	9,26	13,41	6,61
40	27,62	7,18	9,71	6,55	5,33
41	54,58	8,08	6,29	30,42	8,28
42	42,62	5,70	4,44	30,69	8,15
43	21,11	4,84	7,07	16,84	7,09
44	25,51	5,37	5,12	8,45	3,27
45	78,13	9,99	4,87	30,06	6,17
46	22,91	5,53	11,67	10,07	8,50
47	31,77	7,76	8,66	15,03	6,38
48	27,62	7,08	5,50	11,90	3,56
49	41,66	8,53	5,42	14,35	3,39
50	31,07	7,53	7,57	19,78	6,86

Вариант 2

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	20,4	7,25	10,55	8,38	19,3
2	48,3	7,23	7,99	10,17	7,3
3	70,6	8,67	6,83	11,34	–1,4
4	30,4	8,67	11,74	6,45	23,1
5	57,5	12,29	10,84	9,09	9,7
6	43,4	7,99	8,33	7,48	9,9
7	14,4	5,79	8,00	4,67	15,7
8	36,0	11,23	10,37	7,25	11,8
9	35,5	10,82	11,91	10,02	16,0
10	20,1	8,53	11,09	8,38	18,9
11	36,2	11,33	9,93	7,81	9,2
12	24,8	7,84	13,81	10,96	28,6
13	47,7	8,60	9,87	8,37	13,9
14	12,4	5,38	10,53	9,94	21,4
15	45,8	7,63	7,53	7,31	7,6
16	27,4	6,56	9,91	8,12	18,4
17	32,2	6,01	4,71	8,50	–1,7
18	58,5	11,83	10,20	9,20	8,0
19	57,0	12,44	13,71	12,35	17,6
20	73,7	9,65	7,14	9,18	0,1
21	60,5	10,38	10,42	9,51	11,4
22	59,5	8,86	7,76	8,43	4,9
23	45,2	10,81	10,34	5,47	14,3
24	41,3	7,32	7,67	5,99	10,0
25	27,3	8,88	11,66	8,88	20,0
26	23,8	6,77	10,32	9,91	17,8
27	45,8	9,05	10,82	11,50	13,7
28	55,8	11,27	7,43	7,00	0,2
29	54,2	8,94	7,89	7,64	6,0
30	45,0	9,43	9,18	8,95	8,9
31	55,1	9,73	7,95	13,47	–1,1
32	32,9	8,72	9,26	7,36	12,2
33	41,3	9,44	6,27	6,95	–0,8
34	34,0	7,82	8,26	14,00	3,4
35	32,8	7,87	10,74	9,00	18,2
36	49,0	10,67	10,79	8,57	13,3
37	8,8	4,12	9,05	7,87	20,1
38	36,0	7,50	10,19	8,57	17,2
39	81,2	11,31	6,82	7,29	–2,6
40	65,3	9,93	7,17	9,31	–0,5
41	25,6	5,61	8,15	11,41	10,0
42	58,6	9,38	7,10	10,77	–1,1
43	53,4	10,83	11,08	9,30	13,3
44	36,8	9,71	8,78	7,99	7,7
45	50,6	12,68	9,02	8,26	2,5
46	75,7	11,21	7,82	8,01	0,9
47	58,9	9,69	7,47	10,75	–0,2
48	13,6	8,46	11,86	5,65	24,9
49	52,7	8,17	9,27	11,71	9,0
50	57,9	9,05	6,93	5,83	3,8

Вариант 3

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	53,7	13,7	17,4	8,7	23,6
2	41,6	16,8	12,6	14,4	54,0
3	66,1	8,3	17,1	9,6	10,1
4	20,9	14,8	9,6	15,8	56,8
5	6,9	10,5	8,7	16,4	46,9
6	45,9	9,3	13,7	10,6	21,7
7	39,6	20,3	14,6	14,7	61,2
8	2,0	4,8	9,3	16,6	29,1
9	8,0	8,4	9,5	15,2	36,8
10	10,0	3,6	7,8	8,2	11,6
11	17,8	16,0	7,5	8,6	50,3
12	55,1	8,3	9,1	0,3	7,4
13	45,4	14,6	10,9	10,1	42,2
14	51,8	19,4	17,0	11,3	46,7
15	53,2	13,6	13,9	11,1	35,1
16	46,9	12,0	16,6	17,8	38,4
17	53,6	9,8	19,4	7,7	6,1
18	41,2	2,7	15,1	8,7	–4,7
19	50,8	13,6	15,2	10,5	31,7
20	20,4	5,3	12,1	15,8	23,5
21	44,8	11,0	12,6	10,7	29,3
22	30,2	15,3	9,1	12,0	51,6
23	47,7	11,5	11,7	5,5	22,3
24	76,9	6,6	20,7	12,7	4,1
25	25,5	13,2	13,4	15,9	44,7
26	20,0	16,8	7,8	11,8	58,4
27	45,9	12,3	13,0	9,1	29,2
28	9,6	15,5	6,0	12,5	59,3
29	81,0	10,0	18,7	6,8	6,4
30	26,4	10,3	11,5	12,4	32,6
31	54,9	13,3	15,5	4,7	18,1
32	63,5	9,1	17,3	2,4	–2,6
33	9,4	4,5	10,3	14,1	21,1
34	22,6	4,6	11,9	7,6	5,3
35	47,1	12,0	19,0	19,6	37,4
36	63,9	6,4	19,3	9,1	–1,3
37	67,1	11,5	15,4	6,9	17,6
38	63,6	13,7	12,2	5,8	28,1
39	40,5	11,8	11,4	10,4	33,4
40	8,8	12,3	4,9	10,4	48,0
41	26,0	9,4	13,5	14,0	29,1
42	34,2	12,8	11,2	9,7	35,5
43	25,0	10,5	9,4	10,7	34,1
44	36,5	12,9	12,9	7,2	27,2
45	26,0	5,7	14,5	11,9	12,1
46	74,4	12,2	22,1	16,5	25,4
47	33,7	20,5	8,4	8,7	62,1
48	2,1	4,2	8,0	13,9	24,4
49	17,9	14,0	10,0	16,7	55,4
50	77,8	11,2	17,1	7,2	13,8

Вариант 4

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	22,45	3,61	4,26	3,95	4,22
2	22,16	4,98	5,70	3,10	14,64
3	43,51	5,27	3,84	4,00	6,05
4	55,68	4,71	3,86	5,39	–0,54
5	39,80	4,90	4,20	5,12	1,91
6	38,91	4,98	4,54	4,27	6,52
7	33,07	5,08	5,50	5,31	5,40
8	4,62	2,58	4,41	2,09	10,02
9	28,51	4,46	3,73	4,62	1,64
10	19,46	4,21	4,82	4,37	5,41
11	27,55	4,20	5,41	6,14	0,10
12	42,37	3,93	4,45	4,82	1,94
13	58,09	4,39	3,99	5,62	–1,74
14	29,16	6,11	4,64	3,96	10,27
15	52,13	4,78	5,40	6,03	1,64
16	43,71	3,96	5,37	5,37	2,56
17	41,93	5,34	4,49	6,63	–2,38
18	32,64	4,42	4,80	4,71	4,38
19	23,02	3,91	4,20	3,30	7,22
20	31,93	4,36	4,08	3,32	7,72
21	30,07	4,66	5,77	4,08	10,31
22	50,92	5,40	3,14	4,21	3,39
23	30,94	6,59	5,19	3,41	15,09
24	30,93	3,63	6,36	4,83	7,06
25	39,04	5,25	3,82	5,22	1,08
26	44,91	5,48	5,78	6,52	2,20
27	21,04	3,29	4,68	3,53	6,52
28	44,61	3,97	3,66	6,33	–6,41
29	54,45	4,78	3,85	5,56	–1,11
30	21,06	3,25	5,26	4,15	5,70
31	32,10	5,05	3,54	4,23	3,77
32	21,99	3,21	5,08	4,46	3,83
33	32,70	4,09	5,10	6,30	–1,71
34	21,40	5,33	6,97	5,41	9,93
35	35,51	3,21	4,47	4,88	0,30
36	25,23	4,84	4,25	3,10	10,03
37	38,21	3,54	5,36	5,35	1,78
38	44,46	5,23	4,50	4,28	6,84
39	40,91	5,39	3,90	3,74	7,50
40	48,35	6,20	5,13	5,40	6,19
41	25,01	5,33	3,79	3,22	9,14
42	35,62	4,37	4,86	5,16	2,69
43	43,27	5,02	4,67	5,13	3,52
44	37,08	4,48	3,39	5,73	–3,81
45	19,88	5,57	5,88	4,00	12,78
46	55,40	4,81	3,47	5,32	–1,25
47	31,44	5,12	3,51	3,49	6,80
48	22,22	5,32	2,93	3,15	6,81
49	54,93	6,36	4,77	5,29	5,87
50	34,24	5,11	4,98	3,78	10,04

Вариант 5

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	33,82	9,15	3,95	7,37	26,53
2	114,46	7,82	10,53	10,13	–2,64
3	100,73	5,79	9,31	8,42	–7,38
4	98,35	9,51	9,86	6,74	11,23
5	90,03	5,10	11,49	6,97	–15,96
6	71,20	6,29	6,44	7,90	4,24
7	47,43	5,60	4,53	10,11	4,32
8	45,41	8,38	7,43	6,93	12,69
9	35,69	4,24	5,89	3,76	–0,24
10	46,38	10,99	8,32	8,18	21,82
11	46,58	7,08	8,50	6,24	3,64
12	98,98	3,57	9,03	7,45	–16,70
13	87,37	8,57	8,63	5,28	11,71
14	56,51	9,32	7,79	7,77	15,48
15	85,91	8,22	7,67	8,96	9,11
16	66,60	8,51	7,13	3,55	17,63
17	33,53	6,66	4,96	5,35	13,07
18	68,30	5,75	7,61	8,17	–2,22
19	56,67	9,81	6,46	7,01	22,68
20	81,82	10,18	8,14	6,01	20,47
21	108,42	6,26	9,43	10,60	–7,60
22	102,78	5,34	8,50	10,59	–9,38
23	55,00	10,12	5,36	8,73	25,82
24	77,35	7,27	5,48	10,18	9,71
25	41,74	5,31	6,33	3,38	4,18
26	93,20	9,64	12,11	8,65	3,18
27	88,18	7,42	9,62	8,33	–0,08
28	38,15	5,75	5,35	3,95	8,74
29	93,58	7,62	8,96	8,84	2,37
30	58,49	8,74	6,36	8,86	15,73
31	32,48	7,93	3,76	6,94	21,45
32	42,94	5,28	6,05	4,34	3,92
33	46,88	6,81	5,51	11,15	6,38
34	47,82	7,15	7,64	9,47	3,36
35	121,02	6,90	12,05	11,08	–12,74
36	62,43	8,15	7,26	6,29	12,68
37	61,65	5,65	5,06	8,16	4,93
38	85,24	9,41	6,61	10,41	16,83
39	98,49	5,62	9,56	7,19	–7,78
40	59,54	8,80	6,80	5,52	18,07
41	59,81	7,56	7,73	8,74	5,87
42	78,03	5,41	10,58	4,21	–8,89
43	72,24	2,04	7,92	5,03	–18,59
44	67,27	7,36	9,61	10,38	–2,42
45	44,49	8,21	7,42	5,87	12,93
46	63,26	5,08	5,10	8,05	2,04
47	65,69	5,45	6,94	8,91	–2,47
48	32,25	9,52	5,86	5,60	24,42
49	77,47	10,36	9,19	3,56	20,67
50	90,11	7,61	9,39	5,22	4,65

Вариант 6

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	37,38	5,32	6,79	9,68	–4,91
2	102,28	6,27	9,03	19,35	–17,83
3	139,52	6,31	14,42	11,53	–31,38
4	121,21	6,61	13,75	8,75	–24,06
5	100,29	7,07	12,90	15,98	–25,17
6	95,90	7,13	12,93	7,78	–16,74
7	61,08	7,31	10,63	12,00	–10,65
8	52,79	7,55	10,94	13,19	–11,65
9	15,29	7,64	7,78	5,17	9,54
10	96,32	7,81	19,01	12,45	–41,59
11	25,04	7,87	7,80	12,14	3,90
12	197,73	8,15	18,84	18,37	–44,85
13	103,78	8,51	13,89	8,17	–12,67
14	31,37	8,71	8,41	12,68	5,94
15	71,05	8,78	10,95	11,65	–2,74
16	16,36	8,98	7,83	6,65	15,87
17	18,43	9,88	9,60	7,46	13,45
18	1,08	10,32	5,98	13,30	24,71
19	34,12	10,52	11,33	6,99	10,79
20	–16,00	10,56	7,05	5,36	29,78
21	73,98	10,59	12,93	11,38	0,42
22	74,97	10,65	12,27	13,91	0,94
23	36,48	10,71	10,24	11,91	11,40
24	47,94	10,88	9,79	14,76	11,34
25	16,69	11,00	9,59	9,55	18,09
26	67,29	11,09	15,10	9,50	–3,37
27	4,53	11,11	8,57	7,96	24,41
28	4,44	11,13	8,04	10,14	24,45
29	–2,72	11,16	9,24	3,41	26,60
30	35,69	11,38	12,64	6,52	11,16
31	1,92	11,38	7,67	11,26	26,31
32	22,55	11,46	12,21	4,21	15,71
33	46,44	11,83	15,32	7,67	2,04
34	38,19	11,90	13,93	11,28	4,42
35	14,11	13,10	9,72	13,48	26,27
36	22,18	13,35	11,62	10,90	22,71
37	–13,97	13,64	8,59	10,32	37,14
38	–16,94	13,70	7,60	13,52	38,27
39	–18,69	13,83	8,49	10,08	38,99
40	56,33	14,01	13,90	16,12	12,34
41	16,86	14,12	12,22	10,75	25,07
42	72,66	14,19	17,22	13,29	2,96
43	–33,61	14,43	7,36	10,28	46,82
44	17,64	14,55	13,36	9,35	24,52
45	2,50	14,61	11,49	8,89	32,78
46	42,60	14,66	13,39	14,11	20,31
47	0,86	14,88	11,65	8,32	34,37
48	10,22	15,18	12,49	11,57	29,55
49	–59,18	15,28	6,75	8,44	56,21
50	26,67	15,79	14,05	10,39	28,13

Вариант 7

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	48,68	4,04	7,91	4,47	–9,89
2	10,37	8,71	5,88	5,52	21,59
3	–15,80	9,64	5,83	4,61	32,75
4	19,62	6,95	5,83	4,59	14,01
5	11,97	7,85	5,94	5,07	17,74
6	24,79	8,33	4,96	6,66	15,11
7	–9,52	10,71	5,93	5,67	34,76
8	32,58	5,33	6,46	5,30	–2,16
9	27,25	5,04	5,83	4,60	0,65
10	3,82	8,53	7,31	4,47	22,75
11	20,29	4,45	5,29	3,86	1,24
12	11,10	9,40	6,15	6,03	23,34
13	9,43	8,66	5,79	5,41	21,94
14	46,82	5,92	6,07	6,85	–4,98
15	56,74	3,62	5,15	4,53	–7,59
16	37,08	6,14	6,01	4,88	6,52
17	6,15	9,77	5,13	6,76	24,33
18	–9,31	10,08	4,84	5,74	32,17
19	15,80	7,77	5,67	5,38	16,19
20	47,06	6,89	7,48	5,51	5,78
21	–32,87	10,80	6,14	4,34	41,61
22	–5,46	10,59	6,41	5,87	32,00
23	70,63	3,99	5,41	6,43	–15,03
24	–30,34	10,68	6,17	4,51	39,87
25	7,55	8,69	8,34	4,36	22,36
26	10,55	7,51	4,94	5,14	16,97
27	18,55	7,70	7,85	4,44	16,04
28	23,16	6,89	5,82	5,40	9,61
29	3,36	7,57	5,70	4,15	20,83
30	–21,97	10,07	6,32	3,94	38,15
31	31,41	5,97	6,67	5,09	2,99
32	–7,17	9,57	7,01	4,37	31,10
33	–10,01	8,68	6,21	3,56	30,58
34	3,28	6,83	6,21	3,44	18,24
35	41,67	4,30	6,12	3,88	–1,52
36	18,48	7,24	5,76	5,07	13,85
37	47,91	6,33	4,85	6,56	1,82
38	39,48	5,29	7,56	3,55	4,21
39	63,03	4,20	6,06	5,02	–7,82
40	22,08	6,39	5,55	4,62	10,54
41	16,50	9,37	6,98	6,48	19,23
42	45,97	4,95	5,58	5,53	–4,16
43	52,82	6,37	7,28	6,08	–0,41
44	3,35	7,37	4,10	4,86	19,10
45	31,47	5,38	6,42	5,16	–0,95
46	30,13	8,87	6,80	6,58	15,56
47	31,00	4,16	6,20	3,29	0,24
48	2,10	7,70	5,82	4,22	21,11
49	36,60	5,01	5,89	4,09	2,84
50	50,28	5,30	5,81	5,20	–0,50

Вариант 8

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	77,66	12,25	8,93	7,79	6,09
2	97,70	11,63	7,96	2,92	4,04
3	132,68	8,51	13,94	6,48	–16,56
4	105,62	8,37	11,19	9,37	–5,63
5	74,81	14,53	7,02	9,78	18,72
6	119,70	9,79	12,72	8,40	–8,59
7	114,88	12,30	14,12	6,92	–10,16
8	81,97	7,90	12,40	5,21	–15,99
9	99,77	13,86	13,11	7,93	–3,37
10	71,81	10,75	11,04	9,42	–2,20
11	75,25	9,14	12,01	8,58	–9,11
12	123,20	10,91	11,46	5,22	–5,52
13	113,38	10,78	10,98	10,65	1,25
14	68,21	11,66	7,62	7,00	8,03
15	114,52	10,45	11,20	6,99	–3,97
16	107,49	12,57	9,52	9,21	7,72
17	78,17	13,34	9,56	8,76	7,13
18	44,21	6,21	5,60	8,23	4,82
19	115,51	10,99	13,46	9,41	–7,87
20	143,04	12,89	13,01	6,71	–4,64
21	96,15	7,53	10,09	6,68	–6,79
22	111,21	12,53	10,01	8,05	4,88
23	138,38	13,33	14,80	7,06	–9,46
24	117,88	12,24	10,67	9,31	3,75
25	77,35	20,04	5,95	9,15	31,99
26	98,16	10,75	11,36	6,15	–5,54
27	96,45	18,63	7,44	9,42	25,64
28	120,18	15,38	13,55	6,80	–2,38
29	120,87	13,41	12,12	12,22	4,28
30	94,68	12,30	10,39	8,10	2,45
31	94,07	12,45	11,18	6,39	–1,68
32	104,22	14,62	12,26	10,10	3,23
33	68,68	10,83	9,00	7,66	2,61
34	63,51	13,79	8,17	9,15	12,23
35	121,79	12,29	12,49	8,72	–2,73
36	121,69	18,42	10,93	7,96	13,15
37	101,17	10,86	10,16	9,15	1,99
38	151,08	12,30	14,01	6,84	–8,66
39	81,34	10,96	7,42	8,75	10,13
40	107,60	11,52	11,30	8,24	–1,30
41	90,78	17,59	9,36	10,13	17,82
42	82,10	11,75	8,56	7,31	6,12
43	70,28	9,06	7,50	8,53	5,47
44	112,04	12,54	15,98	10,00	–12,51
45	71,46	8,68	9,76	3,81	–7,85
46	121,70	13,84	10,52	5,11	2,89
47	108,29	13,22	12,31	10,72	1,20
48	60,90	12,36	7,99	8,43	9,23
49	115,30	16,17	9,84	10,25	14,72
50	101,78	5,29	10,89	3,17	–17,12

Вариант 9						Вариант 10					
№	y	X_1	X_2	X_3	X_4	№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	70,53	13,41	8,46	10,59	12,61	1	19,51	12,96	11,66	9,80	11,53
2	86,86	12,62	8,66	8,88	9,89	2	67,68	18,07	9,30	5,00	–2,22
3	89,78	16,36	7,22	7,17	19,99	3	98,77	24,13	11,75	6,73	–6,22
4	110,58	19,24	9,08	9,5	22,57	4	97,44	16,93	6,84	8,52	–13,18
5	73,99	9,19	9,53	8,26	–1,01	5	64,35	16,57	10,25	12,00	–3,19
6	92,42	14,82	8,4	6,81	12,83	6	73,38	18,95	10,71	8,75	–2,20
7	93	14,53	10,97	8,12	4,96	7	115,44	26,33	10,73	9,93	–18,97
8	92,8	13,51	12,64	6,54	–4,17	8	27,74	21,31	16,40	7,79	15,39
9	106,85	18,31	12,67	5,82	4,73	9	95,47	23,20	8,41	6,56	–19,00
10	85,73	18,09	10,64	8,76	13,02	10	83,69	22,02	9,62	10,07	–15,60
11	88,17	20,03	10,73	11,6	19,51	11	60,66	19,09	11,11	11,26	–4,97
12	126,94	20,41	10,38	7,45	18,94	12	87,99	21,39	12,54	11,52	–2,33
13	146,93	21,48	12,4	9,32	17,08	13	115,06	24,56	10,35	5,39	–11,12
14	95,98	12,14	13,76	13,45	–2,99	14	–23,03	9,38	13,23	7,40	27,32
15	84,03	11,89	8,01	5,82	7,29	15	115,98	20,55	7,21	7,08	–17,61
16	99,52	13,16	8,86	4,03	5,67	16	104,53	17,51	8,13	12,15	–12,74
17	65,17	12,75	8,42	11,09	11,68	17	38,75	21,20	14,91	7,65	9,94
18	105,49	14,5	12	7,88	1,87	18	75,58	17,20	8,42	9,09	–8,83
19	60,08	5,84	8,45	8,16	–4,41	19	48,10	17,67	12,43	9,97	5,51
20	115,57	19,97	8,84	7,09	22,38	20	–18,85	15,23	16,90	8,26	30,75
21	104,28	21,11	7,58	8,94	30,18	21	25,32	19,40	16,04	8,61	18,50
22	96,05	13,24	8,74	4,82	6,88	22	–6,80	13,56	14,75	9,20	24,48
23	95,24	16,38	8,83	5,98	13,46	23	77,51	22,49	11,55	5,85	–3,41
24	88,51	16,95	7,39	12,22	25,92	24	48,48	17,24	11,15	6,17	5,92
25	103,38	17,55	11,35	6,56	8,26	25	104,38	21,74	6,98	6,70	–21,64
26	104,35	12,92	12,77	7,69	–3,9	26	109,81	17,49	4,69	9,83	–25,19
27	80,65	14,22	8,43	11,07	15,47	27	134,62	25,28	7,55	5,76	–24,84
28	114,52	20,27	12,16	8,66	13,43	28	66,42	20,30	11,30	8,27	–2,96
29	118,2	13,63	13,24	11,67	0,8	29	35,37	14,73	11,25	8,78	8,36
30	76,16	12,56	8,25	6,85	8,15	30	96,90	20,20	7,73	7,68	–16,23
31	103,13	17,08	11,51	5,96	6,18	31	76,05	18,69	9,19	9,84	–9,89
32	75,95	16,15	7,25	6,13	17,34	32	41,51	15,20	8,77	4,60	0,77
33	79,68	14,56	9,78	7,65	7,73	33	30,18	12,62	10,43	11,30	5,48
34	84,25	18,75	9,95	8,22	15,9	34	8,02	15,05	14,97	10,20	19,60
35	100,49	17,64	8,95	8,21	18,1	35	96,45	21,00	9,78	8,79	–10,22
36	100,69	14,5	10,36	5,25	4,32	36	46,63	17,62	12,85	10,68	6,65
37	114,16	14	12,03	8,96	2,46	37	64,86	17,89	9,63	5,84	–1,49
38	128,75	18,47	10,84	6,29	12,63	38	70,24	19,34	11,12	7,25	0,50
39	87,09	16,66	6,7	6,77	21,73	39	26,71	16,92	14,19	9,40	15,25
40	112	17,2	10,56	5,63	9,67	40	97,50	26,79	14,08	8,60	–4,55
41	91,03	15,35	10,28	6,26	6,71	41	48,01	19,34	12,98	9,14	4,69
42	147,21	20,34	15,6	5,58	0,46	42	58,53	20,89	12,40	6,54	2,28
43	106,54	11,92	12,2	7,42	–4,02	43	–34,81	9,32	13,50	6,50	30,19
44	70,72	16,54	7,45	8,3	19,35	44	–10,03	13,26	14,39	6,18	25,19
45	79,76	19,85	7,65	6,72	23,73	45	37,59	21,24	14,69	6,90	9,65
46	108,43	14,17	10,79	7,55	5,2	46	107,44	23,95	10,39	6,20	–10,86
47	85,94	14,46	9,8	11,6	12,1	47	15,66	13,85	13,19	10,48	15,55
48	92,14	17,71	11,64	7,87	8,44	48	53,18	19,44	12,30	10,78	–0,41
49	95,03	17,84	7,55	7,43	22,12	49	167,82	26,54	8,25	11,32	–29,76
50	148,57	16,77	13,86	2,98	–3,28	50	114,32	19,97	7,06	7,23	–17,11

Вариант 11

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	20,49	6,77	4,70	–5,74	0,03
2	27,44	3,23	3,72	–5,09	–6,19
3	19,92	4,88	5,24	–2,73	0,44
4	23,44	5,58	6,28	–2,71	0,59
5	22,69	5,16	6,20	–2,65	–1,27
6	32,16	3,66	6,73	–2,50	–5,91
7	1,73	6,11	2,82	–2,44	8,50
8	15,33	4,61	4,77	–2,44	–0,37
9	21,35	4,60	6,10	–2,37	–2,83
10	6,45	6,17	3,91	–2,19	6,31
11	9,80	5,39	4,31	–2,05	3,51
12	–0,06	6,13	3,31	–1,99	9,62
13	8,72	3,49	3,15	–1,90	2,36
14	14,81	3,18	4,02	–1,89	–1,69
15	5,47	5,50	4,23	–1,38	7,01
16	–10,79	6,23	2,88	–0,34	14,15
17	4,04	5,58	4,43	–0,28	7,69
18	4,21	5,41	4,60	–0,18	7,66
19	2,98	6,50	5,13	–0,14	10,06
20	6,69	4,30	4,63	–0,09	5,34
21	7,38	4,05	4,67	0,08	4,70
22	3,06	5,05	4,63	0,09	7,87
23	14,03	4,91	6,34	0,11	3,45
24	–6,04	7,59	4,91	0,14	15,20
25	3,10	5,82	4,81	0,20	8,88
26	5,50	4,40	4,49	0,25	5,62
27	16,63	4,94	6,97	0,30	2,73
28	8,81	5,24	5,87	0,54	5,78
29	16,22	5,37	7,38	0,61	4,18
30	4,81	3,68	4,35	0,86	5,01
31	20,51	2,25	6,66	0,95	–4,08
32	–7,65	5,99	3,39	1,10	14,05
33	9,04	4,02	5,54	1,12	3,53
34	6,70	5,31	5,90	1,22	6,61
35	10,97	5,34	6,92	1,25	6,15
36	–1,84	5,89	4,92	1,30	11,60
37	–16,22	8,09	4,48	1,80	20,52
38	–1,29	5,53	5,68	2,00	11,17
39	1,03	3,32	4,62	2,11	6,66
40	1,52	4,91	5,76	2,38	9,30
41	–13,40	6,44	3,56	2,67	18,12
42	–12,29	5,50	4,15	3,47	16,12
43	–19,85	5,21	3,48	4,24	18,49
44	–13,10	6,54	4,64	4,36	19,40
45	–8,91	4,80	4,97	5,18	15,09
46	–20,68	6,14	5,03	5,23	20,50
47	–16,78	5,58	4,68	5,31	18,98
48	–0,01	4,69	7,19	5,73	11,18
49	–39,44	6,53	3,26	6,83	28,37
50	–34,76	5,85	4,26	7,45	25,73

Вариант 12

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	75,73	8,50	6,45	15,69	–25,84
2	36,79	7,19	6,15	8,48	0,64
3	78,52	9,65	6,47	16,78	–26,65
4	84,64	11,63	7,37	17,72	–23,70
5	81,92	10,46	4,74	16,04	–28,10
6	74,32	13,39	5,40	13,45	–9,22
7	32,91	10,36	7,05	6,52	16,50
8	67,94	7,30	5,82	15,01	–27,76
9	34,08	6,37	6,02	7,99	–0,85
10	79,90	10,71	4,65	15,07	–24,91
11	34,09	9,93	6,51	6,72	12,57
12	89,65	12,38	7,45	18,34	–24,45
13	69,45	7,26	5,39	15,07	–27,59
14	69,54	8,85	4,55	13,23	–20,98
15	44,69	9,49	6,91	10,03	1,31
16	58,50	5,06	6,35	14,24	–25,86
17	82,17	10,52	3,40	14,64	–26,97
18	50,40	9,30	7,62	11,07	–1,82
19	26,26	6,91	7,31	6,79	9,73
20	65,92	11,52	5,87	12,98	–9,37
21	52,98	9,61	6,63	11,34	–4,53
22	55,30	9,15	4,85	10,91	–8,98
23	71,53	6,50	6,62	16,10	–30,36
24	69,64	8,01	5,98	15,05	–24,24
25	42,89	11,01	5,14	7,01	10,01
26	56,27	9,00	5,92	11,78	–10,48
27	55,76	7,17	3,93	11,31	–17,87
28	59,65	8,71	5,13	11,90	–14,09
29	41,72	8,91	7,13	9,17	4,13
30	55,78	7,04	6,79	13,02	–16,68
31	63,40	8,41	4,52	12,33	–18,33
32	72,01	8,74	7,93	15,75	–21,06
33	58,93	13,64	7,63	10,96	6,65
34	62,24	11,56	6,23	11,46	–4,00
35	73,08	11,07	6,20	14,73	–16,73
36	62,37	9,69	5,95	12,60	–12,04
37	70,54	11,06	6,96	14,41	–13,01
38	52,24	9,42	5,19	10,52	–5,74
39	31,84	9,04	6,05	6,58	11,67
40	65,26	5,57	6,06	15,17	–30,04
41	66,66	11,77	5,69	12,63	–9,35
42	62,68	6,91	6,42	13,98	–21,85
43	72,78	9,16	6,05	15,41	–23,85
44	68,28	10,35	6,26	13,50	–14,18
45	90,25	10,03	6,01	18,39	–35,21
46	62,70	8,58	5,95	13,38	–16,82
47	45,94	12,38	6,29	8,16	11,98
48	65,70	9,63	5,20	12,65	–15,70
49	80,93	7,03	5,60	17,37	–36,98
50	65,81	7,64	7,17	15,03	–21,54

Вариант 13

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	90,9	12,8	20,4	10,1	–6,6
2	85,1	14,1	20,4	8,5	2,2
3	62,7	20,1	14,6	8,3	50,2
4	79,3	18,8	17,5	12,2	30,9
5	111,9	16,2	25,5	14,1	–8,5
6	88,5	16,4	19,5	12,7	12,4
7	36,4	14,7	5,4	11,1	46,8
8	84,8	15,2	19,0	11,8	7,6
9	80,4	15,8	19,3	7,5	14,1
10	113,4	16,4	25,7	13,4	–8,4
11	94,8	16,4	20,6	13,7	6,6
12	106,7	7,6	23,8	14,8	–46,1
13	84,7	15,1	19,5	10,3	8,5
14	82,0	9,6	18,9	7,9	–16,1
15	87,2	19,0	21,8	7,9	23,3
16	99,2	9,1	24,2	9,0	–34,5
17	55,2	16,0	11,0	9,0	38,2
18	132,1	19,3	29,5	17,1	–8,2
19	83,2	15,8	19,2	9,6	12,7
20	70,9	12,9	14,7	13,5	9,0
21	83,5	19,7	19,4	10,3	31,6
22	87,8	12,0	20,5	10,2	–10,0
23	108,5	14,0	25,4	10,8	–16,1
24	106,3	14,3	24,3	13,1	–12,2
25	106,5	16,1	24,7	10,7	–3,8
26	107,2	19,2	26,7	8,3	8,5
27	93,5	15,5	21,8	10,6	2,9
28	98,9	14,8	22,9	10,9	–4,6
29	92,8	7,9	20,2	13,6	–33,2
30	38,8	15,3	7,3	9,3	46,3
31	91,7	14,5	20,1	12,1	0,9
32	105,9	13,9	23,2	13,6	–13,3
33	86,6	12,1	17,1	16,2	–6,9
34	62,3	22,1	11,5	12,4	63,4
35	100,6	19,7	23,6	11,5	17,8
36	92,5	16,4	21,3	10,6	8,7
37	88,4	18,2	20,7	9,7	21,1
38	81,4	16,2	18,8	10,4	16,1
39	107,0	9,1	24,7	12,8	–39,5
40	108,0	8,6	25,6	11,2	–43,6
41	96,4	11,0	22,4	11,0	–22,8
42	83,7	1,9	19,2	9,5	–56,7
43	120,1	15,7	28,7	12,2	–18,1
44	81,9	13,7	18,6	9,4	3,5
45	93,4	14,5	22,1	9,2	–2,4
46	117,9	11,8	28,9	10,0	–36,0
47	101,7	10,0	24,0	10,5	–31,8
48	81,8	18,5	18,4	9,7	27,8
49	66,4	14,2	14,1	10,1	20,5
50	107,7	13,0	25,4	11,3	–20,6

Вариант 14

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	49,68	11,14	9,06	3,61	27,63
2	52,62	9,99	10,14	4,55	16,55
3	62,87	5,70	12,99	3,08	–19,05
4	52,21	8,32	10,32	4,35	6,11
5	59,41	6,07	11,71	4,21	–13,68
6	42,24	8,98	8,05	4,06	19,17
7	63,59	7,33	12,33	4,23	–8,88
8	56,72	7,45	11,19	4,14	–4,00
9	53,39	6,71	10,58	3,05	–4,79
10	28,90	10,82	5,08	3,46	41,15
11	36,35	7,53	7,21	2,18	14,18
12	48,98	6,72	8,83	6,37	0,42
13	48,59	5,57	9,43	4,09	–6,38
14	54,88	9,44	10,27	3,39	12,75
15	44,54	7,21	8,95	4,23	4,95
16	56,12	3,57	11,02	4,31	–25,05
17	36,29	6,39	6,27	3,64	9,96
18	57,21	6,40	10,84	4,75	–8,74
19	58,71	7,33	11,15	4,92	–4,44
20	54,04	5,58	10,60	4,85	–11,85
21	45,54	8,65	9,94	0,86	13,03
22	50,61	5,88	9,34	5,73	–6,00
23	45,67	13,25	7,70	6,39	43,54
24	54,05	12,42	9,94	6,00	30,75
25	55,47	8,61	10,01	5,06	7,23
26	58,99	9,03	11,22	5,48	4,69
27	33,17	8,70	6,17	3,79	24,98
28	49,57	7,97	9,11	4,87	7,23
29	64,64	9,94	12,61	4,32	6,50
30	33,90	9,33	6,90	2,27	27,01
31	51,84	9,13	9,95	3,09	12,48
32	48,08	8,98	9,10	2,89	15,27
33	49,35	8,83	9,81	2,39	11,62
34	56,77	11,81	10,27	4,86	24,90
35	70,89	5,82	14,92	1,96	–25,30
36	49,72	8,05	9,56	3,81	7,39
37	58,31	9,52	11,73	2,99	8,80
38	51,70	7,25	10,46	3,54	0,05
39	38,01	7,57	7,09	4,40	14,42
40	52,08	8,36	9,67	5,46	7,32
41	51,01	7,50	9,93	3,97	1,89
42	58,40	8,20	11,10	4,36	1,43
43	34,13	6,22	6,57	3,66	8,71
44	41,33	9,10	7,90	2,57	20,76
45	56,41	6,90	10,88	3,84	–5,71
46	56,33	12,25	10,67	5,50	27,01
47	50,78	7,70	10,32	2,28	3,61
48	55,84	7,64	10,58	3,80	–0,24
49	52,12	3,51	10,16	2,96	–20,85
50	46,42	6,61	8,50	5,43	1,98

Вариант 15

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	69,09	5,32	14,04	13,19	–36,79
2	60,60	5,68	13,45	12,54	–30,51
3	67,28	5,65	15,42	11,18	–37,24
4	48,15	6,39	10,67	15,65	–18,16
5	51,36	5,99	12,17	11,17	–22,99
6	71,79	7,46	16,73	13,63	–34,21
7	12,15	7,45	4,70	11,55	15,06
8	36,62	3,69	7,12	12,31	–18,47
9	90,43	4,88	17,75	16,48	–57,89
10	62,55	5,51	12,33	16,15	–32,42
11	64,06	6,40	14,62	12,15	–32,20
12	39,26	7,51	11,47	8,77	–7,74
13	65,26	6,87	15,06	13,34	–30,38
14	53,93	6,34	11,11	15,07	–20,88
15	31,11	6,13	8,83	9,85	–6,70
16	27,11	7,53	6,77	16,38	3,66
17	38,80	7,26	9,01	13,85	–6,00
18	68,75	6,16	15,52	11,74	–35,88
19	73,26	6,67	15,86	15,20	–37,53
20	72,04	6,52	15,94	15,11	–37,87
21	78,77	6,37	18,88	9,17	–44,74
22	19,28	8,46	7,62	9,93	12,12
23	67,50	4,99	14,55	10,63	–37,73
24	57,88	5,22	12,34	13,06	–29,14
25	54,51	5,60	11,91	11,30	–24,75
26	84,74	6,42	19,62	10,54	–49,59
27	56,60	5,20	12,06	13,03	–28,84
28	77,48	6,55	17,26	12,75	–41,80
29	86,16	5,43	18,52	12,27	–52,16
30	54,27	5,79	12,28	12,47	–25,87
31	60,98	6,65	13,84	12,32	–27,18
32	46,23	4,85	10,25	9,24	–20,44
33	66,62	6,80	15,87	10,33	–32,72
34	67,78	5,28	13,38	14,71	–36,53
35	41,64	5,96	9,69	12,91	–14,45
36	73,95	6,67	16,52	13,37	–38,29
37	96,05	4,65	20,16	11,94	–63,08
38	59,60	6,57	15,49	7,71	–28,34
39	80,60	5,38	16,41	15,98	–47,60
40	76,43	6,57	15,95	17,25	–40,32
41	87,41	5,61	18,12	15,35	–53,59
42	52,36	4,88	10,25	14,51	–25,26
43	18,85	5,85	4,78	13,17	4,13
44	67,30	7,40	14,97	14,92	–30,07
45	83,50	6,23	18,56	11,77	–48,41
46	46,64	6,78	12,03	10,27	–16,07
47	34,43	6,03	10,69	3,74	–9,37
48	62,43	5,07	13,61	10,17	–34,13
49	65,33	6,99	15,32	11,54	–29,22
50	63,16	6,52	13,71	15,42	–29,36

Вариант 16

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	85,6	3,7	14,4	4,4	–55,2
2	115,4	9,1	20,8	4,4	–62,5
3	92,5	10,0	15,0	2,8	–43,4
4	59,4	5,7	8,0	4,6	–30,8
5	95,9	9,5	15,7	4,1	–47,2
6	64,4	6,7	8,6	4,6	–31,0
7	84,9	6,1	13,8	4,7	–48,6
8	95,5	11,2	15,1	3,4	–42,7
9	80,2	11,0	10,9	4,2	–30,4
10	99,1	10,3	15,8	3,7	–46,9
11	98,5	6,8	17,1	4,6	–57,7
12	96,1	3,3	18,1	4,4	–66,0
13	102,9	8,8	17,8	4,0	–53,7
14	94,0	9,4	14,5	3,7	–44,0
15	102,1	11,7	17,0	4,1	–45,7
16	83,5	7,5	13,4	4,0	–43,3
17	83,8	8,7	12,0	4,6	–38,3
18	68,7	8,4	9,0	3,7	–29,1
19	76,8	8,0	11,2	4,2	–36,5
20	80,5	2,6	14,8	3,6	–57,1
21	89,9	11,0	13,7	4,7	–37,5
22	79,8	8,2	12,1	3,9	–37,9
23	98,2	8,6	16,2	3,6	–50,4
24	99,9	9,7	16,5	4,9	–48,1
25	95,1	6,4	15,8	5,2	–54,0
26	80,8	6,6	13,1	3,5	–45,2
27	77,0	6,9	11,8	4,0	–40,5
28	84,3	8,2	13,0	3,0	–41,9
29	120,6	10,4	21,5	3,8	–62,1
30	120,7	11,7	21,3	3,6	–59,5
31	110,6	7,9	19,6	3,7	–62,4
32	111,7	10,5	18,8	3,1	–54,8
33	86,0	9,7	12,8	3,5	–38,6
34	88,4	6,2	14,3	3,5	–50,6
35	71,2	7,2	10,4	3,9	–35,3
36	80,6	7,9	12,3	3,4	–39,8
37	83,4	6,2	13,7	4,0	–47,0
38	87,1	7,4	14,5	4,1	–46,7
39	100,2	7,7	17,6	3,8	–55,5
40	109,0	14,0	17,3	4,0	–42,4
41	62,2	7,9	7,8	2,6	–27,0
42	65,2	5,2	9,3	2,9	–36,4
43	80,8	4,2	14,0	3,4	–52,4
44	96,7	9,6	15,4	3,7	–46,6
45	90,1	9,4	14,0	3,1	–43,1
46	97,3	7,6	16,9	3,5	–53,7
47	84,0	6,7	13,6	4,2	–46,4
48	73,4	2,9	11,9	4,0	–50,0
49	77,0	6,7	11,4	4,4	–39,2
50	120,2	10,9	21,3	4,4	–60,3

Вариант 17

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	22,42	8,44	3,47	3,43	20,78
2	13,53	6,33	3,80	3,77	18,08
3	14,90	7,26	4,18	4,12	20,20
4	16,63	7,83	4,30	4,14	21,14
5	11,98	5,56	4,51	4,30	15,73
6	16,80	7,20	4,68	4,31	19,20
7	17,01	6,90	4,72	4,37	17,80
8	5,60	2,75	4,83	4,37	8,68
9	27,65	10,75	5,35	4,58	24,10
10	31,38	11,80	5,50	4,63	25,61
11	19,85	7,60	5,50	4,72	17,62
12	27,49	10,96	5,62	4,75	25,86
13	14,91	5,90	5,67	4,80	15,98
14	26,62	9,18	5,72	4,80	20,98
15	20,99	9,19	5,73	4,90	22,55
16	23,31	9,35	5,81	4,92	22,87
17	29,43	10,36	5,88	4,95	23,24
18	26,52	10,10	5,88	4,98	23,48
19	15,26	5,71	5,89	5,01	14,90
20	9,61	4,29	5,92	5,07	13,01
21	5,93	2,77	6,05	5,28	10,25
22	18,00	7,21	6,18	5,35	19,05
23	24,58	9,13	6,22	5,40	22,39
24	10,69	4,24	6,27	5,47	13,52
25	14,97	5,01	6,30	5,54	13,89
26	21,95	9,02	6,34	5,65	22,50
27	24,57	9,95	6,37	5,69	24,82
28	15,01	6,01	6,45	5,98	17,31
29	18,57	7,81	6,52	6,15	22,27
30	22,66	9,92	6,56	6,26	26,14
31	19,93	7,70	6,70	6,27	20,96
32	22,95	8,65	6,76	6,30	22,89
33	16,84	6,56	6,94	6,33	17,93
34	33,45	12,44	7,02	6,34	29,20
35	20,58	8,67	7,04	6,34	23,02
36	24,16	9,54	7,15	6,42	24,48
37	17,82	7,18	7,20	6,47	20,24
38	30,46	12,77	7,34	6,58	31,79
39	27,10	11,04	7,39	6,60	28,03
40	25,18	10,19	7,42	6,69	26,22
41	11,79	5,05	7,44	6,83	15,69
42	14,21	5,80	7,45	7,07	18,54
43	15,75	7,13	7,60	7,15	21,41
44	22,70	8,79	7,73	7,21	23,54
45	17,78	6,84	7,98	7,22	18,87
46	17,94	7,46	8,15	7,35	21,54
47	16,22	6,47	8,17	7,37	18,91
48	23,94	9,07	8,20	7,52	23,69
49	12,51	5,13	8,25	7,89	18,72
50	15,36	5,52	10,33	8,84	17,23

Вариант 18

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	140,7	19,7	6,9	9,6	–21,0
2	–0,2	4,9	14,6	11,0	39,4
3	207,3	31,9	12,6	10,2	–21,8
4	204,6	29,8	12,6	17,9	–25,4
5	106,5	23,0	21,4	8,9	31,8
6	76,9	15,5	15,4	11,2	21,0
7	142,7	23,1	15,8	16,6	1,1
8	125,3	21,7	14,5	10,7	4,2
9	115,3	24,4	22,9	10,3	32,7
10	134,0	20,9	10,8	10,0	–8,7
11	65,3	13,7	14,3	9,7	20,2
12	103,1	19,5	16,5	11,4	17,3
13	132,2	26,4	20,9	7,7	25,0
14	118,2	19,5	13,8	12,7	4,1
15	104,6	18,9	13,4	9,4	8,0
16	117,7	19,8	13,3	12,1	3,6
17	110,7	20,3	17,6	12,8	17,4
18	148,4	26,4	17,3	9,0	8,6
19	153,3	26,4	15,3	7,7	2,1
20	77,4	15,3	14,3	11,1	17,7
21	80,2	15,7	15,1	12,3	18,5
22	97,2	14,6	7,8	10,8	–6,9
23	78,5	15,3	14,8	10,7	19,0
24	65,9	16,6	18,0	5,5	35,2
25	122,2	21,4	15,0	9,6	8,3
26	155,8	27,5	16,1	6,5	3,8
27	137,7	24,1	15,0	8,0	4,9
28	48,1	12,1	13,8	5,2	26,7
29	107,3	15,2	7,1	11,9	–12,3
30	85,3	16,8	17,6	15,2	22,4
31	136,5	23,6	15,2	9,0	5,2
32	87,3	16,0	14,4	11,3	14,8
33	133,7	22,4	13,0	8,4	–0,9
34	96,1	17,7	11,5	2,5	8,0
35	76,0	16,2	14,7	6,5	21,3
36	138,6	21,7	10,7	9,4	–9,0
37	148,4	24,9	12,5	5,4	–3,5
38	128,3	15,1	0,6	11,5	–37,6
39	68,9	14,3	13,2	7,3	18,6
40	124,5	22,1	17,0	13,5	11,5
41	122,6	20,2	14,0	14,0	1,9
42	147,3	27,1	21,9	15,0	19,4
43	76,1	15,2	14,1	9,4	17,9
44	102,9	18,4	15,2	12,2	12,2
45	98,5	19,3	15,8	7,2	17,6
46	57,0	11,0	12,8	14,0	16,8
47	116,0	23,7	21,4	10,9	28,3
48	118,5	24,6	19,7	3,8	25,8
49	104,2	15,2	9,6	15,0	–5,4
50	79,3	18,3	17,9	5,8	31,1

Вариант 19

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–5,69	5,13	4,22	0,70	20,72
2	–9,37	6,09	4,48	0,81	24,13
3	–1,98	7,25	3,50	2,01	18,71
4	–0,35	7,59	3,98	2,60	18,54
5	–5,52	7,65	6,46	2,68	24,88
6	–1,05	7,72	4,98	2,76	20,91
7	–1,34	8,13	5,49	2,76	22,35
8	0,18	8,26	4,52	2,85	18,88
9	–0,64	8,28	5,45	2,95	21,42
10	–0,16	8,76	5,58	2,95	22,44
11	3,33	8,91	3,98	2,97	17,93
12	–0,66	8,95	5,91	3,40	23,84
13	2,63	9,02	4,70	3,41	20,51
14	9,08	9,26	3,85	3,58	16,31
15	–0,84	9,59	5,86	3,72	23,62
16	0,09	9,86	6,24	3,76	25,29
17	9,65	9,88	4,06	3,85	16,92
18	6,09	9,90	4,80	3,96	19,36
19	4,31	10,01	5,75	4,14	21,81
20	2,29	10,24	6,00	4,27	23,31
21	5,66	10,27	5,03	4,36	19,93
22	6,11	10,35	5,19	4,38	20,56
23	8,34	10,41	5,09	4,41	19,67
24	7,26	10,53	5,11	4,52	20,29
25	12,71	10,73	4,60	4,86	16,46
26	9,54	10,80	5,11	5,06	17,60
27	11,04	11,08	4,76	5,11	17,28
28	15,22	11,30	3,70	5,19	13,67
29	9,46	11,43	5,71	5,20	20,80
30	11,67	11,67	4,69	5,30	17,15
31	12,45	11,76	5,66	5,48	19,16
32	16,35	11,93	4,47	5,54	15,78
33	16,17	11,94	4,18	5,62	14,23
34	14,38	12,38	5,57	5,66	18,87
35	14,59	12,61	4,16	5,67	16,48
36	17,73	13,05	3,60	5,74	15,10
37	11,57	13,26	5,86	5,76	22,63
38	8,05	13,26	6,83	5,85	25,55
39	12,34	13,34	5,57	5,88	21,61
40	14,05	13,43	5,17	5,94	19,95
41	12,94	13,45	5,75	6,04	20,56
42	20,01	13,89	4,01	6,29	15,61
43	14,75	13,91	5,33	6,32	19,84
44	18,03	14,09	6,56	7,14	19,63
45	21,60	14,68	5,01	7,20	15,85
46	17,64	14,87	6,02	7,23	20,54
47	22,41	15,01	5,30	7,68	16,19
48	24,24	15,48	5,56	7,85	16,29
49	39,15	16,18	4,56	10,50	5,71
50	35,48	19,26	6,53	11,11	15,47

Вариант 20

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–45,0	3,2	27,3	18,8	84,8
2	–42,5	3,2	27,3	21,9	82,4
3	–38,3	3,7	26,0	21,1	77,4
4	–18,2	5,2	25,1	26,6	65,4
5	–12,7	6,3	24,1	23,9	60,7
6	–16,9	6,6	23,9	20,1	64,0
7	–25,5	7,0	23,9	13,4	68,8
8	–25,7	7,0	23,6	13,4	67,0
9	–16,1	7,7	23,5	16,3	62,6
10	–3,6	7,8	23,4	22,3	55,5
11	–7,8	7,9	23,2	19,9	57,3
12	7,1	8,1	22,9	27,7	49,4
13	–6,7	8,2	22,6	18,8	57,2
14	2,2	8,4	22,3	20,9	52,1
15	7,1	8,7	22,2	25,8	47,5
16	2,5	9,0	22,0	21,0	51,1
17	–9,2	9,1	22,0	11,9	58,3
18	–14,2	9,7	21,9	8,4	60,9
19	–1,6	9,9	21,8	14,9	53,6
20	13,9	10,3	21,6	23,3	44,4
21	1,4	10,3	21,5	15,7	51,5
22	17,0	10,6	21,5	23,4	43,2
23	–0,8	10,7	21,3	11,4	53,5
24	19,7	10,7	21,3	24,0	41,6
25	21,0	10,8	21,2	22,9	40,9
26	26,9	10,9	20,7	26,7	35,3
27	15,5	10,9	20,6	19,5	42,2
28	23,0	11,0	20,5	22,8	37,8
29	26,2	11,2	20,4	24,5	36,5
30	21,3	11,2	20,4	22,2	38,1
31	37,8	11,2	20,4	29,9	29,6
32	35,6	11,3	20,3	28,0	31,1
33	19,0	11,3	20,1	18,9	39,2
34	18,0	11,4	19,6	16,2	39,4
35	27,0	11,8	19,4	21,7	33,7
36	36,5	11,8	19,4	26,4	28,7
37	4,4	11,9	19,3	7,8	47,2
38	23,1	12,2	18,9	17,6	35,6
39	4,6	12,4	18,9	5,8	46,5
40	19,4	12,5	18,4	12,9	37,0
41	17,5	12,6	18,3	11,4	37,1
42	30,9	12,9	18,1	17,0	30,5
43	40,0	12,9	17,1	21,3	22,6
44	50,1	13,1	16,8	24,5	16,9
45	37,3	13,3	16,7	17,1	23,6
46	23,6	13,3	16,4	9,4	31,3
47	47,2	13,3	15,9	21,4	16,6
48	53,6	15,1	15,4	18,0	13,5
49	55,2	15,7	14,9	16,4	13,3
50	77,4	16,8	13,9	24,9	–1,1

Вариант 21

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–23,1	26,6	4,8	6,6	112,9
2	121,4	23,2	4,4	13,0	–39,9
3	149,9	26,6	1,2	13,5	–60,1
4	81,0	16,2	3,6	8,6	–24,7
5	118,1	25,6	5,3	6,1	–35,0
6	121,7	18,4	–1,0	15,6	–55,0
7	109,6	18,5	1,4	12,7	–43,6
8	126,0	23,1	1,7	10,3	–49,7
9	73,3	14,5	3,6	8,3	–22,4
10	96,2	18,9	5,3	11,5	–28,1
11	92,1	14,1	–1,8	9,2	–44,6
12	157,6	26,7	1,4	17,6	–63,6
13	129,7	22,9	1,4	12,4	–50,5
14	105,3	20,7	5,9	12,0	–29,1
15	95,3	16,9	0,6	9,7	–39,1
16	152,5	30,1	6,8	15,7	–47,0
17	105,0	18,7	2,5	10,6	–37,6
18	123,1	21,8	1,1	10,7	–48,9
19	121,3	17,7	–6,8	5,6	–67,1
20	149,9	25,2	–1,4	12,4	–66,7
21	113,1	22,7	5,4	11,8	–33,9
22	130,8	23,4	2,2	13,2	–49,5
23	101,7	19,4	3,2	8,9	–33,8
24	107,1	17,5	–0,7	10,5	–46,5
25	61,4	8,7	4,3	18,3	–17,8
26	100,9	14,9	–0,5	15,1	–45,9
27	93,2	17,3	2,5	9,5	–32,9
28	125,9	22,1	–0,7	7,5	–54,0
29	82,8	15,0	5,4	15,8	–22,6
30	91,4	19,4	4,5	7,0	–26,7
31	73,3	13,4	3,7	10,5	–22,1
32	134,7	20,5	0,6	19,0	–56,9
33	121,8	23,3	3,4	9,8	–42,7
34	129,1	26,5	5,8	9,0	–38,6
35	108,1	18,2	0,6	12,0	–44,6
36	156,7	28,3	1,1	11,2	–62,3
37	102,3	20,7	5,9	11,8	–28,0
38	98,1	17,4	3,6	15,1	–33,6
39	159,0	27,9	0,7	13,4	–64,8
40	94,5	17,3	2,3	9,9	–34,0
41	75,4	14,2	3,2	9,7	–24,7
42	97,2	16,8	2,1	11,9	–36,0
43	117,6	22,2	1,7	8,4	–44,7
44	120,2	19,5	–0,9	10,8	–53,1
45	79,3	13,4	3,0	13,1	–27,7
46	105,7	19,0	0,2	7,4	–43,0
47	116,2	19,5	0,3	12,0	–48,6
48	122,5	22,5	4,6	14,6	–41,0
49	86,3	16,8	5,0	11,5	–23,2
50	101,7	18,6	2,0	9,8	–37,1

Вариант 22

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	59,6	11,4	18,8	15,6	–21,7
2	49,9	9,6	14,7	20,6	–20,0
3	55,5	11,3	17,4	27,0	–27,1
4	62,8	11,3	14,1	34,3	–21,4
5	61,5	11,2	14,9	28,2	–19,6
6	123,8	16,0	13,4	21,5	22,5
7	49,3	8,5	16,8	–22,7	7,2
8	168,5	21,3	16,3	23,1	39,7
9	133,6	16,6	11,1	26,8	28,6
10	70,2	12,5	17,0	24,7	–17,8
11	70,0	11,7	14,9	19,8	–9,2
12	97,1	12,9	11,2	21,1	13,1
13	79,9	12,3	14,4	22,4	–4,3
14	64,0	10,6	14,4	18,7	–11,9
15	78,1	13,2	17,2	22,0	–10,0
16	22,8	7,5	15,5	22,8	–38,0
17	99,5	14,1	14,7	19,4	6,3
18	10,7	8,1	21,0	22,5	–57,1
19	119,4	14,8	11,1	18,1	27,4
20	144,8	18,3	15,0	18,8	33,0
21	39,1	8,6	13,3	27,4	–27,5
22	60,9	10,9	15,3	23,9	–17,7
23	82,4	13,0	16,4	19,6	–6,2
24	97,7	12,5	8,7	30,0	12,2
25	24,1	8,6	18,4	27,9	–49,0
26	–3,2	5,9	16,6	30,5	–60,4
27	111,2	15,6	15,2	24,4	9,5
28	65,3	9,8	11,4	14,4	–0,3
29	49,6	10,1	15,4	27,8	–27,6
30	78,9	14,0	18,8	29,2	–19,5
31	87,0	13,3	15,3	22,9	–3,9
32	36,7	7,7	11,3	29,5	–27,8
33	108,8	16,4	19,2	19,5	2,4
34	115,4	15,5	13,9	23,5	13,8
35	86,8	13,5	16,2	21,0	–3,1
36	45,0	9,7	17,1	14,2	–23,5
37	62,7	10,9	15,0	21,7	–14,8
38	64,8	11,4	15,3	24,1	–15,3
39	67,1	11,9	17,2	18,8	–14,7
40	32,4	7,2	11,5	22,8	–24,3
41	24,6	7,6	13,7	29,2	–38,1
42	45,5	8,8	12,5	27,1	–23,1
43	28,0	8,3	15,5	28,4	–39,2
44	68,8	12,2	16,8	25,6	–19,1
45	40,3	9,2	15,8	20,3	–27,9
46	43,3	11,2	22,3	18,2	–38,4
47	3,1	7,2	19,0	32,5	–64,1
48	78,5	10,2	7,2	23,1	9,3
49	35,7	8,3	14,4	26,3	–32,4
50	63,7	12,0	17,5	28,1	–24,4

Вариант 23

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	42,15	0,85	17,45	7,50	19,08
2	31,24	0,36	10,30	6,19	18,73
3	52,49	1,12	7,35	8,65	36,86
4	68,12	1,64	7,63	10,63	48,20
5	61,49	1,60	7,56	9,46	42,40
6	79,04	1,87	10,25	12,39	53,98
7	39,23	–0,09	10,61	9,36	26,89
8	37,04	0,88	4,91	6,30	26,67
9	42,14	1,55	8,62	5,37	24,00
10	47,15	0,46	10,09	9,71	31,94
11	46,02	0,65	7,95	8,93	32,39
12	52,47	0,15	10,14	11,38	38,26
13	28,99	0,08	10,95	6,26	16,63
14	41,07	0,51	16,83	7,85	18,73
15	44,70	0,61	4,26	8,49	35,71
16	17,20	–0,06	9,91	4,06	7,83
17	50,79	0,72	15,73	9,52	27,72
18	46,45	0,80	11,10	8,30	28,69
19	39,40	1,07	10,86	5,91	21,36
20	56,97	0,82	7,27	10,52	42,43
21	48,66	0,84	8,01	8,61	34,02
22	46,74	0,81	10,54	8,15	29,57
23	45,96	1,67	14,24	5,50	20,66
24	43,85	0,96	11,80	7,01	24,91
25	55,66	0,91	15,18	10,01	31,84
26	43,80	0,74	7,56	8,00	30,51
27	52,48	1,99	9,72	6,17	30,10
28	51,82	1,43	11,22	7,71	30,37
29	63,51	2,19	12,11	7,91	36,43
30	34,19	0,67	7,29	6,04	22,50
31	55,82	1,83	13,47	7,41	29,57
32	36,36	0,19	15,31	7,74	17,70
33	71,08	1,27	10,20	12,64	49,55
34	64,45	1,45	14,36	10,56	38,05
35	69,50	1,96	8,11	10,07	47,35
36	50,42	0,96	11,25	8,69	31,35
37	54,15	0,74	11,30	10,06	35,71
38	54,56	1,34	8,10	8,42	36,90
39	46,05	0,81	10,11	8,04	29,46
40	37,61	1,38	10,08	4,57	19,19
41	49,80	0,28	7,50	10,77	38,12
42	33,15	0,58	12,67	5,91	16,00
43	38,44	0,24	7,81	8,16	27,82
44	50,91	0,82	12,38	9,35	31,09
45	51,22	0,98	9,86	9,03	33,41
46	46,54	1,01	9,66	7,58	29,43
47	60,51	0,84	9,82	11,38	42,56
48	63,97	2,10	12,00	8,63	37,25
49	28,85	0,13	15,23	6,03	11,43
50	37,68	0,63	11,12	6,64	21,63

Вариант 24

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	47,92	4,20	20,44	28,70	5,07
2	82,50	10,58	11,86	24,15	35,63
3	53,51	6,31	21,20	28,66	8,09
4	71,83	10,68	16,35	23,79	21,70
5	53,20	7,59	15,72	21,64	12,23
6	57,82	5,53	21,11	31,50	12,31
7	59,87	7,80	16,93	24,76	15,02
8	49,84	7,59	17,50	22,47	7,82
9	38,22	6,04	17,76	20,20	–0,49
10	32,00	8,38	20,10	15,20	–13,15
11	27,40	7,37	27,36	21,82	–23,69
12	59,75	7,78	13,28	21,15	19,84
13	61,18	8,09	18,75	25,76	13,44
14	68,05	8,90	19,83	27,83	14,54
15	80,17	10,90	17,83	28,65	27,34
16	49,85	6,81	19,78	24,52	5,24
17	35,60	8,58	24,64	19,36	–17,68
18	78,53	9,71	11,74	24,23	33,64
19	25,00	4,01	24,23	23,51	–16,53
20	40,38	7,07	11,71	13,41	7,71
21	16,19	5,44	21,37	14,80	–21,89
22	90,19	8,53	19,45	37,77	36,05
23	63,97	7,91	16,50	25,17	17,87
24	63,67	7,61	19,92	28,61	14,67
25	62,49	5,88	15,44	27,55	21,15
26	23,10	5,12	17,17	15,02	–10,34
27	82,64	7,04	7,30	27,13	47,72
28	43,11	4,63	17,39	24,02	5,86
29	56,43	7,18	26,17	31,99	1,43
30	78,92	11,74	10,61	20,13	32,87
31	48,32	5,79	20,26	26,27	3,93
32	53,59	6,42	11,74	19,54	17,38
33	54,06	8,23	19,22	23,75	6,61
34	53,52	7,60	16,54	21,90	9,41
35	61,37	10,95	20,94	23,01	6,57
36	58,62	6,91	18,01	26,59	14,09
37	40,37	6,18	16,80	19,08	1,73
38	64,23	6,05	12,24	25,58	28,48
39	30,15	3,94	21,04	22,85	–7,82
40	66,73	6,65	17,74	30,29	22,00
41	66,79	3,97	10,95	30,07	35,82
42	35,60	6,82	19,96	18,72	–7,80
43	61,84	7,77	15,52	24,53	19,36
44	25,70	8,56	21,02	12,58	–20,46
45	57,44	3,89	18,31	32,58	18,25
46	67,15	10,06	22,31	27,99	10,84
47	62,03	8,65	15,84	23,09	16,96
48	72,02	9,02	19,14	29,55	19,77
49	64,00	6,17	19,53	30,76	16,94
50	54,69	7,86	17,93	22,83	9,39

Вариант 25					
№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	88,83	4,41	16,87	24,16	55,45
2	118,08	5,61	13,33	27,27	82,05
3	45,13	5,03	18,12	14,96	17,30
4	58,49	5,01	17,87	17,77	29,30
5	79,47	5,71	16,90	21,17	46,32
6	97,65	3,21	14,26	26,28	70,34
7	88,58	4,53	20,34	26,61	55,16
8	134,30	6,12	10,97	29,52	97,62
9	73,26	4,75	13,04	18,62	45,17
10	35,66	5,37	17,15	12,03	7,40
11	68,81	5,57	18,22	19,96	36,37
12	88,23	5,38	17,54	23,53	54,08
13	27,02	4,38	18,76	11,80	1,71
14	96,68	3,52	16,57	26,85	65,33
15	78,46	4,80	17,36	22,41	48,89
16	29,31	4,63	19,61	12,64	2,90
17	108,56	4,54	18,27	29,44	72,38
18	79,95	4,85	5,71	15,09	53,92
19	56,54	5,17	16,50	16,20	26,75
20	79,47	5,21	18,24	22,42	47,28
21	33,50	4,52	22,43	15,64	6,05
22	19,21	4,70	18,14	9,37	–5,74
23	116,25	3,85	12,14	28,09	84,87
24	40,04	4,62	19,37	14,73	12,03
25	83,25	6,29	14,77	19,48	46,82
26	87,27	4,51	13,00	21,96	58,72
27	65,95	4,10	19,14	21,29	37,21
28	112,71	6,23	14,51	26,21	74,48
29	106,92	4,68	14,75	26,70	73,53
30	83,15	6,16	20,16	23,48	46,73
31	64,25	5,61	16,89	17,55	31,31
32	110,98	6,65	6,20	19,85	74,77
33	69,25	6,28	20,96	20,67	32,67
34	109,49	6,09	10,51	23,10	73,09
35	54,26	3,52	9,68	13,59	33,83
36	71,99	3,77	18,20	22,37	43,56
37	53,57	5,48	17,11	15,39	22,82
38	86,44	4,49	12,15	20,99	58,44
39	71,79	5,25	14,58	18,21	41,34
40	67,40	3,98	18,86	21,55	38,90
41	110,64	6,99	15,25	25,59	71,17
42	115,03	3,92	17,57	31,29	81,27
43	74,95	2,73	14,96	22,49	51,88
44	103,23	3,32	17,10	29,28	72,76
45	100,50	4,45	10,66	23,49	71,10
46	74,40	3,81	17,61	22,49	46,40
47	153,58	5,36	14,38	36,32	113,84
48	57,96	5,01	15,30	16,12	28,66
49	77,49	5,81	10,46	15,87	45,37
50	106,19	4,49	5,16	20,84	78,64

Вариант 26					
№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	118,5	7,9	30,1	21,1	84,3
2	139,9	12,6	31,2	17,1	84,1
3	148,8	12,6	34,2	19,2	94,4
4	154,4	14,2	35,6	22,1	93,7
5	123,7	9,7	29,5	17,1	82,4
6	84,7	11,6	19,3	18,1	37,3
7	97,3	12,0	22,8	19,7	48,1
8	167,8	9,2	40,1	16,4	125,9
9	148,3	6,6	38,0	19,5	119,6
10	75,0	10,7	17,0	15,5	31,2
11	179,5	13,7	41,4	20,0	118,3
12	119,3	13,1	28,1	22,7	65,3
13	119,6	11,8	26,3	15,7	67,7
14	68,4	15,1	12,8	16,9	4,6
15	124,8	10,7	30,4	20,4	81,7
16	45,3	8,5	13,8	23,1	16,9
17	140,6	11,1	31,7	16,1	88,9
18	152,4	8,6	39,0	23,8	115,9
19	100,4	12,7	21,5	15,8	45,9
20	97,6	13,5	25,2	28,4	47,4
21	143,0	13,2	29,4	10,8	82,0
22	100,9	11,3	25,2	23,6	56,5
23	149,7	12,0	35,6	22,3	97,1
24	164,6	13,5	39,6	26,4	107,3
25	128,9	13,1	29,0	19,4	71,0
26	128,2	16,8	28,1	21,6	57,9
27	138,2	13,8	31,5	20,6	79,0
28	121,2	9,4	31,1	23,3	83,2
29	171,6	11,0	39,5	17,7	120,1
30	107,6	13,0	26,4	23,9	56,5
31	130,8	11,9	29,7	17,6	77,9
32	165,8	12,3	37,5	18,1	108,1
33	67,3	11,6	16,7	21,2	22,9
34	202,7	8,5	49,8	21,4	161,0
35	150,2	12,8	34,7	20,1	94,7
36	87,2	8,5	21,9	18,6	53,1
37	129,9	11,5	30,8	20,7	80,8
38	90,1	6,7	23,8	19,0	64,7
39	142,0	14,2	32,2	21,1	81,2
40	182,9	20,7	39,4	24,6	92,8
41	43,1	12,6	11,4	23,3	–2,2
42	152,5	18,5	30,5	16,7	69,2
43	133,8	15,7	31,5	25,9	70,1
44	105,6	12,7	23,2	17,0	50,8
45	166,4	10,5	38,3	15,3	116,9
46	128,9	15,8	25,8	14,5	58,9
47	124,1	14,5	26,3	16,4	60,8
48	155,0	7,7	38,6	19,4	119,8
49	157,1	15,0	35,3	22,2	90,6
50	101,9	12,7	22,6	18,2	48,4

Вариант 27

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	74,18	6,98	21,30	35,27	49,47
2	73,15	5,19	11,02	34,47	64,22
3	64,09	5,32	13,59	30,56	51,65
4	46,67	6,88	22,79	18,20	13,26
5	40,91	4,90	15,40	18,29	21,41
6	65,73	6,00	17,66	31,78	47,83
7	46,59	6,76	17,75	12,78	11,05
8	43,46	4,91	8,92	13,48	24,04
9	64,45	4,61	9,12	30,74	57,40
10	68,87	7,12	14,17	23,85	40,71
11	57,24	4,23	12,56	32,34	52,29
12	66,33	5,41	11,81	28,77	51,97
13	67,87	7,02	23,51	33,46	42,96
14	57,30	5,14	19,95	32,83	41,74
15	63,18	6,62	16,96	26,35	40,36
16	71,96	6,24	17,29	34,36	54,78
17	56,35	5,78	23,15	32,28	35,97
18	76,42	6,59	11,89	29,29	55,57
19	60,23	3,92	6,65	27,82	55,21
20	59,34	5,91	17,07	27,29	40,04
21	67,40	6,36	15,81	28,87	46,95
22	57,75	6,08	20,18	27,97	35,62
23	67,66	5,13	13,83	33,49	55,93
24	84,19	7,05	12,25	31,74	62,12
25	50,50	6,05	19,31	21,27	22,69
26	47,03	5,70	25,96	30,83	27,72
27	62,17	5,57	11,93	25,19	44,50
28	43,62	4,00	10,64	19,66	30,75
29	48,05	5,51	15,97	18,81	23,81
30	60,67	7,17	18,43	22,48	30,52
31	56,69	7,05	20,97	21,99	23,77
32	56,23	5,95	17,85	24,45	31,71
33	76,19	6,67	15,15	33,38	56,76
34	65,18	6,23	17,40	29,69	43,30
35	66,82	5,60	8,72	24,90	50,60
36	61,43	4,59	10,19	28,60	51,73
37	70,78	7,13	16,25	26,28	43,04
38	42,03	4,45	12,19	17,22	25,35
39	53,30	6,33	17,20	19,40	25,14
40	52,68	5,97	15,67	19,77	27,42
41	67,33	6,71	19,70	32,34	46,01
42	74,36	5,47	11,24	33,83	62,59
43	60,20	5,83	15,37	26,66	41,40
44	78,48	6,91	16,11	34,13	57,10
45	60,76	6,68	18,65	25,83	34,67
46	68,53	6,69	15,82	27,24	44,58
47	80,27	6,09	6,94	29,74	64,85
48	70,88	6,62	16,36	30,83	48,84
49	57,97	5,47	11,76	20,69	35,93
50	54,29	5,60	18,18	25,89	33,99

Вариант 28

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–0,25	2,76	14,12	16,78	–18,63
2	53,46	7,67	18,10	10,42	29,71
3	17,26	3,55	15,60	13,44	1,88
4	15,26	10,77	11,60	18,59	–16,18
5	–12,27	–0,58	18,62	19,63	–22,86
6	3,36	6,75	6,54	13,02	–17,38
7	–4,00	0,65	15,75	16,31	–16,00
8	48,56	10,31	12,66	8,92	23,09
9	29,96	8,69	15,24	15,04	3,23
10	24,08	6,00	18,24	16,42	1,03
11	73,44	9,12	23,83	10,88	46,22
12	29,86	7,27	14,32	13,21	6,46
13	49,85	9,39	18,37	13,75	20,88
14	14,96	1,34	20,50	16,58	–1,57
15	13,46	4,50	20,04	19,30	–6,32
16	37,38	9,47	12,61	12,03	10,54
17	17,35	5,59	13,34	14,08	–4,75
18	19,76	8,41	14,85	17,68	–8,35
19	39,41	5,98	17,29	11,62	18,48
20	45,46	12,25	20,48	19,74	8,89
21	2,70	8,01	11,01	18,49	–23,18
22	33,66	2,85	15,64	8,38	20,89
23	26,08	4,17	19,43	15,60	5,43
24	–5,34	3,38	12,13	16,97	–22,76
25	59,01	4,52	16,53	4,04	43,11
26	21,58	6,26	17,14	16,44	–0,96
27	49,83	10,34	14,67	11,17	21,28
28	14,63	6,92	8,58	11,72	–6,61
29	40,67	4,19	16,08	8,41	24,58
30	27,35	6,58	14,85	13,10	6,23
31	52,92	11,80	13,30	10,87	20,61
32	32,57	2,09	14,97	7,36	20,31
33	33,26	6,69	16,34	13,00	10,70
34	29,43	6,82	16,05	14,27	4,70
35	2,97	4,39	16,88	19,55	–17,34
36	7,98	8,55	15,61	21,90	–22,51
37	72,27	7,67	17,73	4,84	50,77
38	54,96	8,27	15,88	8,52	32,04
39	28,17	5,78	15,28	12,85	7,74
40	44,39	5,50	18,63	10,87	24,74
41	64,52	7,97	20,10	8,86	41,40
42	49,69	7,22	15,98	9,07	27,09
43	48,42	6,36	20,07	11,79	27,11
44	33,75	–0,92	20,42	8,18	27,03
45	25,72	7,22	13,06	12,72	3,00
46	53,81	8,55	16,20	9,52	29,29
47	–25,44	0,85	6,79	14,50	–34,95
48	46,27	13,56	15,21	16,16	8,17
49	38,85	6,16	12,27	8,02	18,72
50	1,30	2,20	16,44	17,54	–14,66

Вариант 29

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	61,23	4,21	10,60	28,92	31,38
2	53,74	4,34	17,22	36,23	20,98
3	43,35	5,12	15,07	19,20	16,68
4	41,31	4,61	16,02	23,45	14,08
5	54,27	4,70	12,82	26,48	26,55
6	41,16	3,67	11,60	21,73	17,89
7	15,74	3,55	16,57	14,70	–5,96
8	46,01	5,22	12,60	17,25	21,37
9	61,14	6,31	15,41	23,92	28,48
10	40,08	4,32	11,44	16,72	16,97
11	27,80	3,93	19,40	26,87	0,13
12	57,96	3,87	12,18	33,18	29,39
13	32,89	3,03	16,37	29,61	6,72
14	–11,63	2,05	19,67	11,52	–30,56
15	5,43	2,05	16,19	19,14	–11,31
16	6,27	5,28	27,12	13,92	–23,25
17	44,12	3,54	11,97	25,15	17,94
18	11,94	3,72	20,75	18,36	–13,15
19	37,83	3,32	13,62	26,18	13,02
20	50,82	4,93	15,19	26,18	21,92
21	16,16	3,08	14,21	13,96	–2,27
22	18,15	4,68	23,96	20,99	–11,65
23	41,93	5,99	15,39	10,66	13,66
24	49,03	3,70	10,35	24,10	24,59
25	40,72	4,56	15,88	22,23	11,67
26	10,07	3,32	15,27	10,51	–7,86
27	9,55	2,71	13,17	10,12	–6,47
28	24,56	4,07	17,49	18,48	–0,70
29	36,37	4,50	19,00	25,59	6,22
30	12,31	2,88	15,43	15,88	–6,41
31	22,83	4,32	14,62	9,34	0,59
32	40,41	3,80	12,25	20,86	15,21
33	26,52	4,24	18,84	21,73	–0,61
34	28,91	4,54	16,24	15,23	2,86
35	44,78	1,84	3,93	24,55	28,91
36	17,22	2,49	14,69	19,96	–3,05
37	24,18	4,65	17,32	12,70	–0,48
38	44,68	3,89	9,46	18,64	23,34
39	48,13	5,35	11,83	13,93	22,94
40	47,98	4,66	10,45	16,85	24,10
41	26,91	3,00	11,06	17,16	8,57
42	21,16	3,02	16,59	22,04	–2,58
43	67,17	5,45	12,29	28,41	36,49
44	35,70	3,37	14,44	26,06	10,04
45	68,72	6,20	12,62	24,56	36,55
46	12,45	3,37	17,42	14,94	–8,73
47	44,90	4,45	14,37	24,17	17,63
48	40,74	4,04	13,15	22,22	15,12
49	58,83	5,19	12,57	23,04	28,52
50	24,26	3,38	17,88	23,74	–1,10

Вариант 30

№	y	X_1	X_2	X_3	X_4
1	34,06	2,05	2,58	8,68	18,00
2	42,28	3,14	5,07	7,58	23,81
3	52,93	3,84	7,40	9,90	30,56
4	–16,39	–4,73	2,60	8,03	–1,73
5	40,87	2,81	5,74	8,69	23,80
6	38,67	2,52	4,99	8,26	22,40
7	63,57	7,62	2,60	3,81	29,95
8	24,54	1,65	4,92	5,06	15,13
9	67,98	6,89	4,08	9,48	34,53
10	75,70	7,08	5,86	11,93	39,04
11	–2,24	–2,15	2,01	7,11	2,70
12	47,45	4,14	4,82	6,56	25,62
13	7,00	–1,63	2,92	8,02	8,03
14	43,60	3,23	4,09	8,28	22,63
15	18,34	–0,14	3,44	9,81	14,55
16	85,06	9,10	6,45	6,98	42,63
17	30,30	0,85	3,01	11,92	17,84
18	65,04	6,20	7,45	6,55	33,60
19	47,07	4,21	5,43	5,75	24,91
20	25,49	1,38	2,23	7,81	16,07
21	47,76	3,65	4,83	9,58	27,10
22	23,03	0,58	5,04	6,60	15,19
23	72,88	6,70	4,59	11,29	37,19
24	47,10	5,28	0,81	4,30	22,92
25	3,55	–2,51	5,72	7,17	5,99
26	82,69	8,39	7,26	9,18	42,47
27	16,59	0,63	0,74	6,66	10,54
28	98,91	11,61	4,06	7,22	46,83
29	29,25	1,83	2,27	7,33	16,68
30	17,87	–0,15	3,12	9,67	13,29
31	21,14	0,24	5,48	6,69	13,48
32	18,74	0,09	2,57	8,03	11,55
33	–5,85	–4,48	7,63	9,64	4,13
34	22,90	0,55	3,56	8,38	13,62
35	40,06	2,97	4,58	8,03	22,97
36	62,37	5,79	4,23	9,54	32,31
37	36,25	2,71	1,76	8,52	20,01
38	47,82	4,24	5,54	6,07	26,26
39	47,10	3,28	3,99	11,21	26,76
40	–7,84	–4,51	2,60	12,47	2,88
41	10,67	–1,05	1,99	10,32	9,74
42	–37,56	–8,35	6,63	6,50	–10,94
43	22,43	0,24	6,16	7,68	15,89
44	10,17	–1,76	6,22	8,43	9,71
45	7,03	–1,51	3,16	8,66	7,53
46	90,11	10,69	4,86	4,59	43,20
47	–1,61	–2,79	3,05	8,47	4,14
48	35,85	2,31	3,36	9,51	19,85
49	24,56	–0,10	6,33	8,66	16,35
50	7,37	–2,24	5,05	9,22	9,33

Вариант 31

№	*y*	X_1	X_2	X_3	X_4
1	66,6	8,6	6,2	19,3	29,4
2	93,1	12,2	19,6	15,8	31,9
3	2,1	4,3	14,9	17,5	–15,5
4	90,4	10,7	10,7	14,1	41,0
5	20,9	5,3	8,2	19,0	2,5
6	38,7	6,3	9,2	15,9	11,8
7	65,9	8,7	13,4	12,2	22,8
8	88,6	11,6	16,3	15,4	33,4
9	67,2	9,4	14,3	15,0	22,5
10	76,8	9,8	14,7	12,0	27,4
11	40,8	6,6	10,1	14,2	11,9
12	134,5	13,2	7,2	9,1	70,4
13	88,3	11,6	15,0	19,0	34,0
14	59,3	9,4	14,9	21,6	15,4
15	169,9	15,6	0,3	10,7	99,9
16	24,0	6,9	10,7	28,1	0,9
17	90,4	11,7	18,0	15,8	30,4
18	85,1	10,4	14,3	12,0	32,9
19	54,8	9,4	11,5	26,2	17,6
20	56,4	9,2	18,2	17,3	12,6
21	51,9	6,7	7,8	10,9	21,9
22	47,7	7,0	13,1	11,7	12,9
23	34,7	6,2	9,3	17,6	8,3
24	85,9	9,9	10,0	13,1	38,4
25	76,6	8,7	7,9	11,2	34,4
26	61,7	8,6	12,1	15,0	22,2
27	86,6	11,8	10,0	26,0	38,1
28	18,3	5,4	12,6	18,3	–4,7
29	77,4	11,6	12,4	28,2	29,5
30	71,6	10,4	15,9	18,3	23,6
31	43,2	7,4	12,8	17,4	9,2
32	101,6	12,2	10,2	19,7	45,8
33	109,7	13,1	19,6	11,8	41,2
34	121,3	13,3	11,8	13,7	55,7
35	65,8	9,3	10,7	19,1	26,1
36	53,2	8,7	17,5	16,3	10,5
37	85,8	10,3	9,3	16,0	38,9
38	75,0	10,7	14,6	20,5	27,2
39	22,7	6,2	14,5	19,8	–3,8
40	130,6	14,2	5,2	21,2	69,4
41	112,0	12,3	12,3	10,5	51,6
42	104,9	11,1	9,7	9,8	49,5
43	38,0	6,6	14,7	12,2	5,9
44	103,0	12,2	9,8	18,6	47,5
45	19,6	5,5	12,9	16,8	–4,1
46	86,6	10,2	10,6	13,7	38,5
47	71,9	10,0	11,2	20,4	28,5
48	98,3	11,1	16,0	7,2	38,5
49	7,9	5,0	15,7	19,7	–14,7
50	118,3	14,4	23,0	13,9	42,7

Вариант 32

№	*y*	X_1	X_2	X_3	X_4
1	59,38	20,40	7,65	11,52	41,48
2	47,42	10,05	13,04	12,67	8,05
3	102,88	17,59	13,53	10,82	17,99
4	89,16	17,76	5,38	6,93	35,07
5	12,58	7,48	0,02	5,30	26,42
6	130,37	20,80	13,98	7,80	16,86
7	105,91	22,88	7,40	2,30	28,86
8	56,48	14,90	12,79	9,29	10,20
9	105,47	22,54	23,76	11,90	–2,10
10	56,25	13,13	19,04	10,40	–10,04
11	64,42	18,29	20,28	15,03	5,83
12	34,67	10,74	10,18	13,69	20,15
13	119,59	16,89	12,13	6,29	11,95
14	110,58	23,64	19,54	10,36	9,95
15	–30,45	1,89	6,03	13,87	15,14
16	70,08	16,95	5,33	9,77	39,37
17	30,08	12,84	6,08	9,54	26,91
18	78,62	13,76	15,37	8,73	–0,13
19	57,42	11,77	10,07	7,76	9,96
20	111,83	16,77	13,00	8,36	13,16
21	61,21	16,73	9,15	14,42	36,62
22	61,21	19,35	4,86	13,47	52,86
23	55,59	20,66	4,89	13,81	55,48
24	68,65	17,17	4,54	9,57	41,82
25	–14,21	3,29	7,61	13,79	11,96
26	41,61	4,61	11,27	4,13	–15,45
27	58,31	16,78	4,72	9,31	39,28
28	58,94	20,01	6,63	11,82	44,49
29	52,43	12,30	9,05	10,11	19,26
30	77,84	19,80	14,15	14,98	28,06
31	39,24	13,76	8,81	11,33	24,32
32	42,83	11,93	12,18	11,27	10,53
33	48,38	10,81	7,55	2,77	4,81
34	50,79	16,18	9,70	7,33	17,94
35	13,33	16,22	1,31	16,59	63,14
36	101,21	18,86	11,91	7,00	17,13
37	117,88	15,81	21,81	11,59	–9,02
38	131,14	17,48	13,44	5,97	8,52
39	108,57	20,49	13,23	12,28	27,58
40	31,65	12,04	10,15	15,02	25,00
41	45,60	11,82	14,57	13,04	6,59
42	82,43	18,37	3,44	2,27	31,95
43	11,55	15,22	–7,82	7,75	70,71
44	59,01	16,00	11,44	8,66	15,33
45	27,64	7,75	12,85	10,78	–1,23
46	50,35	16,28	7,23	14,03	40,59
47	42,86	12,72	7,45	9,86	23,78
48	53,67	16,58	8,76	6,50	19,93
49	95,29	21,39	3,82	6,69	46,35
50	89,86	22,66	6,31	12,65	53,49

Типовой расчёт «Временные ряды»

1. Построить график для каждого из временных рядов и провести визуальный анализ полученных графиков.
2. Построить автокорреляционную функцию для каждого ряда для выявления структуры ряда.
3. Удалить сезонные колебания из каждого ряда.
4. Провести аналитическое выравнивание для каждого ряда.
5. Оценить качество каждой модели с помощью средней ошибки аппроксимации и остаточной дисперсии.
6. Используя критерий Дарбина – Уотсона, сделать выводы о наличии автокорреляции в остатках для каждого из рядов.
7. Построить уравнение линейной регрессии, используя метод первых разностей.
8. Охарактеризовать тесноту связи между рядами по уровням, по первым разностям.
9. Построить уравнение линейной регрессии, используя метод отклонения от тренда.
10. Определить коэффициент корреляции между изучаемыми рядами по отклонениям от трендов.
11. Оценить взаимосвязь этих рядов, используя метод регрессии с включением фактора времени. Оценить взаимосвязь без учета фактора времени.
12. Сделать выводы.

№	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7	
	x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
1	4,6	14,8	6,9	24,0	1,8	40,6	46,2	45,2	51,9	20,8	45,8	42,7	51,8	40,4
2	2,3	13,2	2,8	19,6	7,6	28,0	50,3	32,6	45,7	18,6	49,7	32,2	45,7	27,7
3	7,8	12,6	7,7	19,3	6,4	26,1	47,6	30,5	46,7	17,8	46,4	31,2	46,4	25,7
4	7,3	15,1	6,6	23,5	9,2	35,7	48,9	39,2	47,7	21,5	48,1	40,6	49,1	34,7
5	6,9	14,0	10,5	24,9	5,0	38,4	43,1	41,3	47,6	20,0	40,9	43,8	46,9	37,0
6	4,4	12,7	6,5	21,1	10,9	26,9	47,4	30,7	41,6	18,1	44,6	34,2	40,6	26,1
7	10,4	12,1	11,2	20,8	9,5	25,1	44,2	28,9	42,1	17,3	41,8	33,2	41,8	24,3
8	9,8	14,1	10,2	24,5	12,4	33,8	45,6	35,9	43,2	20,5	43,4	41,9	44,4	31,8
9	9,3	13,2	14,1	25,8	8,2	36,2	39,9	37,4	43,2	19,2	36,1	44,9	42,1	33,7
10	7,1	12,1	10,0	22,5	14,0	25,8	43,9	28,7	36,9	17,5	40,1	36,1	36,1	24,4
11	12,7	11,7	14,9	22,4	12,8	24,2	41,1	27,2	37,8	16,9	36,9	35,3	36,9	22,8
12	12,4	13,1	13,7	25,5	15,5	31,8	42,2	32,5	38,6	19,5	38,8	43,3	39,8	28,9
13	12,0	12,4	17,6	26,6	11,3	33,9	36,4	33,5	38,5	18,4	31,6	46,0	37,6	30,3
14	9,5	11,5	13,6	23,9	17,2	24,7	40,7	26,7	32,5	16,9	35,3	38,1	31,3	22,7
15	15,1	11,2	18,5	23,9	16,0	23,2	37,9	25,5	33,4	16,4	32,1	37,4	32,1	21,4
16	14,8	12,1	17,3	26,5	18,7	29,9	39,0	29,2	34,2	18,5	34,0	44,6	35,0	26,1
17	14,3	11,6	21,3	27,5	14,6	31,7	33,3	29,5	34,2	17,6	26,7	47,2	32,7	26,9
18	11,8	11,0	17,2	25,4	20,4	23,6	37,6	24,8	28,2	16,4	30,4	40,0	26,4	21,0
19	17,4	10,7	22,1	25,4	19,2	22,2	34,8	23,8	29,1	15,9	27,2	39,5	27,2	20,0
20	17,0	11,2	21,0	27,6	22,0	28,0	36,0	25,8	30,0	17,6	29,0	46,0	30,0	23,2

№	Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14	
	x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
1	9,1	45,6	6,2	49,7	59,0	41,5	58,8	35,5	58,6	46,1	7,6	38,4	15,3	30,3
2	5,2	33,4	3,4	35,1	54,0	29,8	55,7	33,1	54,3	44,4	6,3	36,8	9,7	29,4
3	16,0	31,7	13,3	33,0	59,7	28,8	58,0	23,8	59,4	35,4	14,4	27,9	13,5	24,0
4	12,8	40,8	6,2	44,0	52,4	39,3	57,5	25,4	58,7	37,6	16,7	30,3	19,5	25,7
5	16,8	43,3	10,3	47,0	54,3	42,9	53,2	33,3	52,2	46,8	13,2	39,9	19,7	31,8
6	12,7	33,1	7,3	34,7	49,1	32,3	49,7	31,2	47,5	45,2	11,5	38,5	13,7	31,1
7	24,4	31,7	18,1	33,0	55,7	31,4	53,5	23,6	54,1	37,1	21,1	30,3	19,0	26,4
8	21,0	39,1	10,8	41,9	48,2	41,0	52,7	24,9	53,1	39,2	23,1	32,6	24,7	28,0
9	24,8	41,0	14,7	44,2	49,9	44,3	48,0	31,1	46,2	47,4	19,2	41,4	24,5	33,3
10	21,2	32,7	12,2	34,2	45,2	34,8	45,3	29,4	42,3	46,0	18,3	40,2	19,3	32,8
11	32,1	31,6	22,2	32,9	51,0	34,1	47,9	23,3	47,7	38,9	26,7	32,8	23,4	28,9
12	29,3	37,3	15,5	39,8	44,1	42,6	47,9	24,3	47,5	40,8	29,5	35,0	29,9	30,4
13	33,3	38,7	19,6	41,4	46,0	45,6	43,6	29,0	41,0	47,9	26,0	42,9	30,1	34,8
14	29,2	32,3	16,6	33,8	40,8	37,3	40,1	27,6	36,3	46,8	24,3	41,9	24,1	34,5
15	40,1	31,5	26,6	32,8	46,6	36,7	42,7	23,1	41,7	40,7	32,7	35,3	28,2	31,4
16	37,4	35,6	20,0	37,7	39,8	44,3	42,8	23,8	41,6	42,4	35,6	37,3	34,8	32,7
17	41,1	36,3	23,8	38,6	41,4	47,0	38,1	26,8	34,7	48,5	31,7	44,5	34,6	36,4
18	37,1	32,0	20,9	33,4	36,3	39,8	34,7	25,7	30,1	47,6	30,1	43,6	28,7	36,2
19	48,0	31,4	30,9	32,7	42,1	39,3	37,3	22,9	35,5	42,6	38,5	37,8	32,8	33,9
20	45,1	33,8	24,1	35,6	35,1	46,0	37,1	23,2	35,1	44,0	41,1	39,6	39,1	35,0

№	Вариант 15		Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20		Вариант 21	
	x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
1	14,9	34,5	43,3	38,5	41,0	27,0	36,7	28,0	2,1	30,7	1,9	32,7	7,7	31,2
2	8,9	32,4	35,7	37,4	41,0	31,0	40,4	31,0	9,2	34,2	9,8	36,2	15,4	43,3
3	12,3	24,2	37,5	30,2	37,3	37,8	36,4	36,8	7,6	41,2	7,0	42,3	12,4	45,0
4	10,9	25,5	34,5	32,5	33,6	41,2	31,4	39,2	7,0	43,8	6,2	45,4	9,4	37,3
5	17,7	32,2	39,7	40,2	37,7	30,4	32,2	27,4	7,2	28,5	6,2	35,3	11,2	34,0
6	11,3	30,3	31,7	39,3	37,9	33,9	36,1	29,9	14,5	31,3	14,3	38,5	19,1	44,8
7	16,2	23,4	35,0	33,4	33,3	39,8	31,2	34,8	12,0	36,8	10,6	43,9	15,2	46,4
8	14,5	24,4	31,7	35,4	29,8	42,7	26,4	36,7	11,6	38,7	10,0	46,7	12,4	39,6
9	20,9	29,9	36,5	41,9	34,1	33,8	27,4	26,8	12,0	26,3	10,2	37,9	14,4	36,8
10	15,3	28,2	29,3	41,2	33,8	36,8	30,8	28,8	18,8	28,4	17,8	40,8	21,8	46,3
11	19,0	22,5	31,4	36,5	30,0	41,7	26,7	32,7	17,1	32,5	14,9	45,6	18,7	47,7
12	18,1	23,2	28,9	38,2	25,9	44,1	21,3	34,1	16,1	33,7	13,7	48,1	15,3	42,0
13	24,9	27,6	34,1	43,6	30,0	37,1	22,1	26,1	16,3	24,2	13,7	40,6	17,1	39,6
14	18,5	26,1	26,1	43,1	30,2	39,7	26,0	27,7	23,6	25,5	21,8	43,1	25,0	47,8
15	22,2	21,6	28,2	39,6	26,4	43,6	21,9	30,6	21,9	28,2	18,9	47,3	21,9	49,1
16	21,4	22,1	25,8	41,1	22,2	45,6	16,4	31,6	20,8	28,6	17,6	49,4	18,4	44,3
17	27,8	25,2	30,6	45,2	26,6	40,5	17,5	25,5	21,3	22,0	17,9	43,2	20,5	42,4
18	21,5	24,0	22,7	45,0	26,7	42,6	21,3	26,6	28,5	22,6	25,9	45,4	28,3	49,3
19	25,2	20,7	24,8	42,7	22,9	45,5	17,2	28,5	26,8	23,9	23,0	49,0	25,2	50,5
20	24,1	21,0	22,1	44,0	18,9	47,0	11,9	29,0	25,9	23,6	21,9	50,8	21,9	46,6

№	Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25		Вариант 26		Вариант 27		Вариант 28	
	x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
1	46,1	43,5	44,5	32,9	53,5	23,5	45,4	34,6	53,2	53,7	43,2	56,5	9,0	52,7
2	52,2	57,7	53,0	47,5	52,0	39,0	51,8	47,3	45,4	65,5	33,4	72,0	3,0	62,9
3	47,6	58,2	48,2	48,4	48,2	40,8	47,9	49,0	49,3	66,3	40,3	72,6	9,7	63,5
4	43,0	47,1	43,4	37,7	45,4	30,4	45,0	40,8	46,2	57,2	36,2	60,4	7,4	55,6
5	43,2	41,8	41,8	32,8	50,8	25,8	42,3	37,3	49,3	52,8	39,3	54,5	12,3	51,8
6	49,5	53,0	50,1	44,4	49,1	38,9	48,5	48,3	41,3	62,9	29,3	66,8	6,1	60,3
7	44,0	53,2	46,2	45,0	46,2	40,4	45,5	49,8	46,1	63,5	37,1	67,0	13,7	60,7
8	39,6	44,2	41,2	36,4	43,2	31,7	42,4	42,8	42,8	55,6	32,8	57,2	11,2	54,0
9	40,0	40,0	39,4	32,6	48,4	28,0	39,5	39,9	45,7	51,8	35,7	52,5	15,9	50,8
10	45,8	48,3	48,2	41,3	47,2	38,9	46,2	49,3	38,2	60,3	26,2	61,6	10,2	57,7
11	41,1	48,1	43,5	41,5	43,5	40,1	42,4	50,6	42,2	60,7	33,2	61,4	17,0	57,9
12	36,1	41,4	39,1	35,2	41,1	33,1	39,9	44,8	39,5	54,0	29,5	54,0	15,1	52,4
13	36,3	38,1	37,5	32,3	46,5	30,1	37,2	42,4	42,6	50,7	32,6	50,5	20,0	49,7
14	42,6	43,6	45,8	38,2	44,8	38,9	43,4	50,3	34,6	57,7	22,6	56,4	13,8	55,1
15	37,9	43,1	41,1	38,1	41,1	39,8	39,6	51,4	38,6	57,9	29,6	55,8	20,6	55,1
16	32,8	38,5	36,8	33,9	38,8	34,4	37,2	46,8	36,0	52,4	26,0	50,8	18,8	50,8
17	33,3	36,3	34,9	32,1	43,9	32,3	34,2	45,0	38,8	49,7	28,8	48,5	23,4	48,7
18	39,5	38,9	43,3	35,1	42,3	38,8	40,5	51,3	30,9	55,1	18,9	51,2	17,3	52,5
19	34,8	38,1	38,6	34,7	38,6	39,5	36,7	52,2	34,9	55,1	25,9	50,2	24,1	52,3
20	29,9	35,6	34,1	32,6	36,1	35,8	34,1	48,8	32,1	50,8	22,1	47,6	22,1	49,2

Список литературы

1. Практикум по эконометрике : учеб. пособие / под ред. И. И. Елисеевой. – Москва : Финансы и статистика, 2007. – 192 с.
2. Айвазян С. А. Теория вероятностей и прикладная статистика / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 656 с.
3. Кремер Н. Ш. Эконометрика : учеб. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко ; под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 311 с.
4. Эконометрика : учебник / под ред. И. И. Елисеевой. – Москва : Финансы и статистика, 2007. – 344 с.
5. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

Оглавление

Николаева Евгения Александровна
Грибанов Евгений Николаевич

ЭКОНОМЕТРИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 30.05.2017. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 7,00
Тираж 100 экз. Заказ......
КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28
Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4а