Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.В. НЕДЕЛЬКО, Г.Н. МИРЕНКОВА

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО РЯДАМ И ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 517.518.45(075.8)
Н 421

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук, доцент *А.П. Ковалевский*
д-р физ.-мат. наук, профессор *В.А. Селезнев*

Неделько С.В.
Н 421 Типовые задачи по рядам и преобразованию Фурье. Специальные главы математического анализа: учебно-методическое пособие / С.В. Неделько, Г.Н. Миренкова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. – 62 с.

ISBN 978-5-7782-3962-3

Пособие является продолжением пособия, выпущенного в 2018 году. В нем сначала излагаются основные формулы, далее рассмотрены решения новых примеров, а затем приведены условия задач типового расчета и ответы к ним.

Предназначено студентам технических факультетов, в программе обучения которых содержится тема «Ряды Фурье. Преобразование Фурье».

Работа подготовлена кафедрой высшей математики
и утверждена Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

УДК 517.518.45(075.8)

ISBN 978-5-7782-3962-3

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие является продолжением пособия «Ряды и преобразование Фурье», изданного авторами в 2018 году.

В § 1 приводятся основные формулы, рассмотренные в предыдущей части пособия.

На основе практических занятий авторами выделены типы задач, вызывающие наибольшие затруднения у студентов. Эти задачи, а также задачи, не вошедшие в первую часть пособия, составляют содержание § 2. Рассмотрены задачи исследования спектральной плотности сигналов на основе преобразования Фурье, задачи построения интеграла Фурье в комплексной форме и переход к интегралу Фурье в действительной форме.

При нахождении преобразования Фурье отдельно показывается абсолютная интегрируемость функции $f(x)$, а также показывается, где это необходимо, что особая точка преобразования Фурье является устранимой особой точкой.

В § 3 приводятся условия задач типового расчета.

В § 4 содержатся ответы к заданиям типового расчета, условия которых входят в обе части пособия.

В приложениях указаны формулы тригонометрии и таблица интегралов, необходимые для выполнения типового расчета.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Пусть дана *2L*-периодическая функция $f(x) \in L_2$.

Тогда для нее *тригонометрический ряд Фурье в действительной форме на интервале* (*-L*, *L*) имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{L} + a_k \cos\frac{\pi kx}{L}.$$

Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье a_0, a_k, b_k находятся по формулам

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi kx}{L}dx, \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi kx}{L}dx.$$

Если сигнал $f(x)$ задан только на интервале (–*L*, *L*), то разложение в ряд справедливо только на (–*L*, *L*). Но *сумма ряда Фурье* есть функция всегда периодическая, значения которой по теореме Дирихле в точках непрерывности совпадают со значениями функции $f(x)$, а в точках разрыва есть среднеарифметическое пределов функции $f(x)$ слева и справа от точки разрыва.

В случаях четных или нечетных функций $f(x)$ нахождение тригонометрического ряда Фурье и его коэффициентов упрощается.

Для *четных функций* коэффициент $b_k = 0$, поэтому формулы имеют вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi kx}{L}, \quad a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{\pi kx}{L}dx$$

Для *нечетных функций* коэффициенты $a_0 = a_k = 0$, следовательно:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{L}, \quad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{\pi kx}{L}\,dx.$$

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f\left(x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{\pi kx}{L}}, \quad c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{\pi kx}{L}}\,dx.$$

Если значения коэффициентов a_k, b_k уже известны, то можно коэффициент c_k находить по формуле

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - ib_k\right),$$

а также использовать эту формулу для самопроверки.

Для *четных* функций $c_k = \frac{1}{2}a_k$, для *нечетных* функций $c_k = -\frac{i}{2}b_k$.

Периодические функции представляются рядами Фурье, а непериодические функции, заданные на всей числовой оси, представляются *интегралами Фурье*.

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой*, если сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx = Q < \infty$.

Определение. Функция

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

называется *преобразованием Фурье* (*интегральным преобразованием Фурье*) или *фурье-образом* функции $f(x)$.

Функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

есть *обратное преобразование Фурье*.

Для представления функции $f(x)$ интегралом Фурье необходимо пользоваться следующими теоремами.

Теорема 1

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и на любом конечном промежутке (–L, L] представима рядом Фурье, то на числовой оси $-\infty < x < \infty$ функция $f(x)$ представима интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)e^{i\omega x}\,d\omega.$$

В действительной форме $f(x) = \int\limits_{0}^{\infty}\big(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\big)d\omega$, где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx\,,\ B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

или

$$A(\omega) = \frac{2\,\mathrm{Re}\,F(\omega)}{\sqrt{2\pi}},\ B(\omega) = -\frac{2\,\mathrm{Im}\,F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Причем в точках разрыва функции $f(x)$ при $x = x_0$

$$f(x) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Известны упрощения формулы интеграла Фурье для некоторых частных случаев: при нечетной функции $f(x)$ коэффициент $A(\omega)=0$, при четной функции $f(x)$ коэффициент $B(\omega)=0$.

Теорема 2

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx = Q < \infty$, и $F(\omega)$ есть ее преобразование Фурье, то $\left|F(\omega)\right| \le \frac{Q}{\sqrt{2\pi}}$.

Доказательство. Действительно,

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \right| \le \left[\text{учитываем, что } \left| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{x}} \right| = 1 \right] \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}}.$$

Если преобразование Фурье и интеграл Фурье найдены в комплексной форме, то легко можно перейти к действительной форме интеграла Фурье по формулам

$$A(\omega) = \frac{2\operatorname{Re} F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}, \; B(\omega) = -\frac{2\operatorname{Im} F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}.$$

В радиофизике преобразование Фурье без константы $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ называется *спектральной плотностью* (не путать с отличным от этого определением спектральной плотности в статистической физике, что выходит за рамки пособия). Таким образом, *спектральная плотность* равна $\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$. Спектральная плотность применяется в технике для определения свойств физических систем, поэтому бывает нужным исследовать и построить ее график.

Для построения графика спектральной плотности нужно исследовать особые точки $\tilde{F}(\omega)$ (если они возникают) и показать, что эти особые точки являются *устранимыми особыми точками*, т. е. если ω_0 есть особая точка, то $\lim\limits_{\omega \to \omega_0} \tilde{F}(\omega) = \text{const}$.

Если положить $\tilde{F}(\omega_0) = \lim\limits_{\omega \to \omega_0} \tilde{F}(\omega)$, то функции $\tilde{F}(\omega)$ и $F(\omega)$ становятся непрерывными в точке ω_0. Это удобно при исследовании и делает графики более наглядными.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Приведем пример разложения функции в ряд Фурье в действительной и комплексной формах.

Пример. Пусть дана *2L*-периодическая функция

$$f(x) = \begin{cases} ax; \ x \in [0, L] \\ a(x+L); \ x \in (-L, 0) \end{cases} \text{ (период } T = 2L\text{).}$$

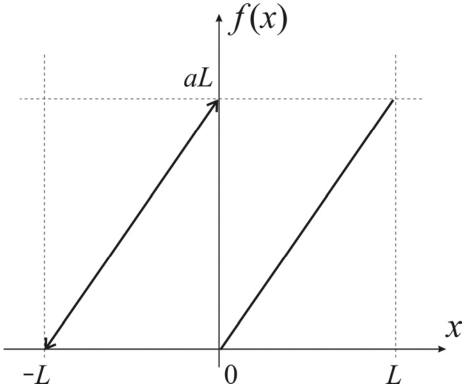

Рис. 1. График функции из примера

Функция $f(x)$ является функцией общего вида (не является нечетной либо четной), но сводится к нечетной функции. Ее график показан на рис. 1. Введем функцию

$$f_1(x) = f(x) - \frac{aL}{2}.$$

Тогда $f_1(x)=\begin{cases} a\left(x-\dfrac{L}{2}\right);\ x\in[0,L] \\ a\left(x+\dfrac{L}{2}\right);\ x\in(-L,0) \end{cases}$ является нечетной, и при ее разложении в ряд Фурье коэффициенты $a_0=a_k=0$.

$$b_k=\frac{2}{L}\int_0^L a\left(x-\frac{L}{2}\right)\sin\frac{\pi kx}{L}dx=\left[\text{интегрируем по частям}\right]=$$

$$=\frac{2a}{\pi k}\left(-(x-\frac{L}{2})\cos\frac{\pi kx}{L}+\frac{L}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{L}\right)\Bigg|_0^L=\frac{aL}{\pi k}\left((-1)^{k+1}-1\right),$$

$$f_1(x)=\frac{aL}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}-1}{k}\sin\frac{\pi kx}{L}.$$

Разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{aL}{2}+f_1(x)=\frac{aL}{2}+\frac{aL}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}-1}{k}\sin\frac{\pi kx}{L}.$$

Для функции $f(x)$ имеем $\dfrac{aL}{2}=\dfrac{a_0}{2}$, $a_k=0$, в чем можно убедиться, вычислив коэффициенты по общим формулам. Но вычисление по общим формулам всех коэффициентов ряда сложнее, чем в предложенном решении.

Сумма ряда Фурье есть функция периодическая, имеющая в точках разрыва $x=kL$ значение $\dfrac{aL}{2}$.

Ряд Фурье в комплексной форме с учетом $c_k=-\dfrac{i}{2}b_k$ имеет вид

$$f(x)=\frac{aL}{2}-\frac{iaL}{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}-1}{k}e^{i\frac{\pi kx}{L}},$$

здесь $c_0=\dfrac{aL}{2}$.

Приведем теперь примеры нахождения преобразования Фурье $F(\omega)$ и представления функции интегралом Фурье.

Пример 1. $f(x)=\begin{cases}|x|;\ x\in[-a,a]\\ 0;\ x\notin[-a,a]\end{cases},\ a>0$.

Сначала покажем, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и, следовательно, существует преобразование Фурье и функция представима интегралом Фурье.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{-a}0\cdot dx+\int_{-a}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{a}x\,dx+\int_{a}^{\infty}0\cdot dx=-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-a}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{a}=a^2.$$

Находим преобразование Фурье:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{-a}^{0}x\,e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{a}x\,e^{-i\omega x}dx\right)=$$

$$=\left[\text{интегрируем по частям}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-i\omega x}\left.\left(\frac{x}{(-i\omega)}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right|_{-a}^{0}+e^{-i\omega x}\left.\left(\frac{x}{(-i\omega)}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right|_{0}^{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2}{\omega_2}+\frac{1}{\omega^2}\left(e^{ia\omega}+e^{-ia\omega}\right)+\frac{a}{(-i\omega)}\left(e^{-ia\omega}-e^{ia\omega}\right)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{по формуле Эйлера}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{ia\omega}}+e^{-ia\omega}=2\cos a\omega\\ \mathrm{e}^{\mathrm{ia\omega}}-e^{-ia\omega}=2i\sin a\omega\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2(a\omega\sin a\omega+\cos a\omega-1)}{\omega^2}.$$

Покажем, что для $F(\omega)$ (и для $\tilde{F}(\omega)$) точка $\omega=0$ является устранимой особой точкой.

$$\lim_{\omega\to 0}\tilde{F}(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{2(a\omega\sin a\omega+\cos a\omega-1)}{\omega^2}=\left[\begin{array}{c}\text{неопределенность}\\ \text{вида }\left(\dfrac{0}{0}\right)\end{array}\right]=$$

$$=2\left(\lim_{\omega\to 0}\frac{a\omega\sin a\omega}{\omega^2}-\lim_{\omega\to 0}\frac{1-\cos a\omega}{\omega^2}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{заменяем бесконечно малые функции}\\ \text{эквивалентными при }\alpha\to 0\text{:}\\ \sin\alpha\text{ на }\alpha\,(1-\cos\alpha)\text{ на }\dfrac{\alpha^2}{2}\end{array}\right]=$$

$$=2\left(\lim_{\omega\to 0}\frac{a\omega\cdot a\omega}{\omega^2}-\lim_{\omega\to 0}\frac{a^2\omega^2}{2\omega^2}\right)=a^2\,.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\omega\sin a\omega+\cos a\omega-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega,$$

причем в точках разрыва функции при $x=\pm a$ интеграл равен $f(\pm a)=\dfrac{a}{2}$.

Если требуется представление интеграла Фурье в действительной форме, то находим коэффициенты

$$A(\omega)=\frac{2\operatorname{Re}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2(a\omega\sin a\omega+\cos a\omega-1)}{\pi\omega^2},\ B(\omega)=-\frac{2\operatorname{Im}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}=0\,.$$

Полученный результат соответствует тому, что функция $f(x)$ четная. Интеграл Фурье равен $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{a\omega\sin a\omega+\cos a\omega-1}{\omega^2}\cos\omega x\,d\omega$.

Пример 2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{b};\ x\in[-a,a]\\ 0;\ x\notin[-a,a]\end{cases}$.

Абсолютная интегрируемость функции $f(x)$ следует из

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \frac{1}{b}\left(\int_{-\infty}^{-a} 0\cdot dx - \int_{-a}^{0} x\,dx + \int_{0}^{a} x\,dx + \int_{a}^{\infty} 0\cdot dx \right) = \frac{a^2}{b}.$$

Преобразование Фурье равно

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b} \int_{-a}^{a} x e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b} \left(e^{-i\omega x} \left(\frac{x}{(-i\omega)} + \frac{1}{\omega^2} \right) \right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b} \left(e^{-ia\omega} \left(\frac{a}{(-i\omega)} + \frac{1}{\omega^2} \right) - e^{ia\omega} \left(\frac{a}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b} \left(\frac{a}{(-i\omega)} \left(e^{ia\omega} + e^{-ia\omega} \right) - \frac{1}{\omega^2} \left(e^{ia\omega} - e^{-ia\omega} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{b} \left(\frac{2ai}{\omega} \cos a\omega - \frac{2i}{\omega^2} \sin a\omega \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i}{b} \frac{a\omega \cos a\omega - \sin a\omega}{\omega^2}.$$

Покажем, что $\omega = 0$ является устранимой особой точкой для функции $F(\omega)$ (и для $\tilde{F}(\omega)$ соответственно).

$$\lim_{\omega\to 0} \tilde{F}(\omega) = \lim_{\omega\to 0} \frac{2i(a\omega \cos a\omega - \sin a\omega)}{b\omega^2} = \left[\begin{array}{c} \text{неопределенность} \\ \text{вида } \left(\dfrac{0}{0}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{по правилу Бернулли-Лопиталя} \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u'(x)}{v'(x)} \end{array} \right] = \frac{2i}{b} \lim_{\omega\to 0} \frac{(a\omega \cos a\omega - \sin a\omega)'_\omega}{(\omega^2)'_\omega} =$$

$$= \frac{2i}{b} \lim_{\omega\to 0} \frac{a\cos a\omega - a^2 \omega \sin a\omega - a\cos a\omega}{2\omega} = \frac{1}{b} \lim_{\omega\to 0} (-a^2 \sin a\omega) = 0.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме равен

$$f(x)=\frac{i}{b\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\omega\cos a\omega-\sin a\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega,$$

причем в точках разрыва функции при $x=\pm a$ интеграл равен

$$f(a)=\frac{a}{2b},\ f(-a)=-\frac{a}{2b}.$$

Если требуется действительная форма интеграла Фурье, то находим

$$A(\omega)=\frac{2\operatorname{Re}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}=0,$$

$$B(\omega)=-\frac{2\operatorname{Im}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2}{b}\frac{\sin a\omega-a\omega\cos a\omega}{\omega^2},$$

что соответствует нечетности функции $f(x)$.

Интеграл Фурье имеет вид в действительной форме

$$f(x)=\frac{1}{\pi b}\int_0^{\infty}\frac{\sin a\omega-a\omega\cos a\omega}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega.$$

Пример 3

$$f(x)=\begin{cases} ax+b;\ x\in[0;L] \\ ax-b;\ x\in(-L;0) \\ 0;\ \text{вне } (-L;L] \end{cases}.$$

Функция $f(x)$ нечетная. Проверим, что она абсолютно интегрируема.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{-L}0\cdot dx+2\int_0^L(ax+b)dx+\int_L^{\infty}0\cdot dx=L(aL+2b).$$

Найдем преобразование Фурье:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-L}^{0}(ax-b)e^{-i\omega x}dx+\int\limits_{0}^{L}(ax+b)e^{-i\omega x}dx\right)=$$

$$=\left[\text{интегрируем по частям}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-i\omega ч}\left(\frac{ax-b}{(-i\omega)}+\frac{a}{\omega^2}\right)\Bigg|_{-L}^{0}+e^{-i\omega x}\left(\frac{ax+b}{(-i\omega)}+\frac{a}{\omega^2}\right)\Bigg|_{0}^{L}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2b}{i\omega}-\frac{a}{\omega^2}\left(e^{i\omega L}-e^{-i\omega L}\right)-\frac{aL+b}{i\omega}\left(e^{i\omega L}+e^{-i\omega L}\right)\right)=$$

$$=\left[\text{из формулы Эйлера}\quad \begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{L}}-e^{-i\omega L}&=2i\sin\omega L\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{L}}+e^{-i\omega L}&=2\cos\omega L\end{aligned}\right]=$$

$$=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(aL+b)\cos\omega L-b}{\omega}-\frac{a\sin\omega L}{\omega^2}\right)=$$

$$\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\frac{(aL+b)\omega\cos\omega L-b\omega-a\sin\omega L}{\omega^2}.$$

Покажем, что $\omega=0$ является устранимой особой точкой для функции $F(\omega)$ (и для $\tilde{F}(\omega)$ соответственно).

$$\lim_{\omega\to 0}\tilde{F}(\omega)=2i\lim_{\omega\to 0}\frac{((aL+b)\omega\cos\omega L-b\omega-a\sin\omega L)}{\omega^2}=$$

$$=\left[\begin{gathered}\text{неопределенность}\\ \text{вида}\left(\frac{0}{0}\right)\end{gathered}\right]=\left[\begin{gathered}\text{по правилу Бернулли-Лопиталя}\\ \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\frac{u'(x)}{v'(x)}\end{gathered}\right]=$$

$$=2i\lim_{\omega\to 0}\frac{(aL+b)\cos\omega L-L(aL+b)\omega\sin\omega L-b-aL\cos\omega L}{2\omega}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=i\left(\lim_{\omega\to 0}\frac{b(\cos\omega L-1)}{\omega}-\lim_{\omega\to 0}L(aL+b)\sin\omega L\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{используем эквивалентные,}\\ \text{меняем } (1-\cos\omega L) \text{ на } \dfrac{\omega^2L^2}{2},\\ \text{учтем } \lim\limits_{\omega\to 0}\sin\omega \mathrm{L}=0\end{array}\right]=i\left(\lim_{\omega\to 0}\frac{(-b)\omega^2L^2}{2\omega}-0\right)=0\,.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(aL+b)\omega\cos\omega L-b\omega-a\sin\omega L}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega\,,$$

причем в точках разрыва функции интеграл равен

$$f(0)=0,\ f(L)=\frac{aL+b}{2},\ \ f(-L)=-\frac{aL+b}{2}\,.$$

Если требуется действительная форма интеграла Фурье, то находим

$$A(\omega)=\frac{2\operatorname{Re}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}=0\,,\ B(\omega)=-\frac{2\operatorname{Im}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

что соответствует нечетности функции $f(x)$.

Интеграл Фурье в действительной форме равен

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(aL+b)\omega\cos\omega L-b\omega-a\sin\omega L}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega\,.$$

В примерах 1–3 найдены и исследованы преобразования Фурье (и спектральные плотности) для функций, имеющих на оси OX разрывы I рода (конечные скачки). Часто в таких задачах в $F(\omega)$ имеются особые точки, и следует показать, что эти особые точки – устранимые особые точки. Если на оси OX задана непрерывная, абсолютно интегрируемая функция, то особых точек в $F(\omega)$ обычно не возникает, и их исследование проводить не приходится, достаточно сослаться на теорему 2.

Приведем пример такой непрерывной функции.

Пример 4. $f(x) = |x|e^{-a|x|}$, $a > 0$.

Функция $f(x)$ четная, ее график изображен на рис. 2.

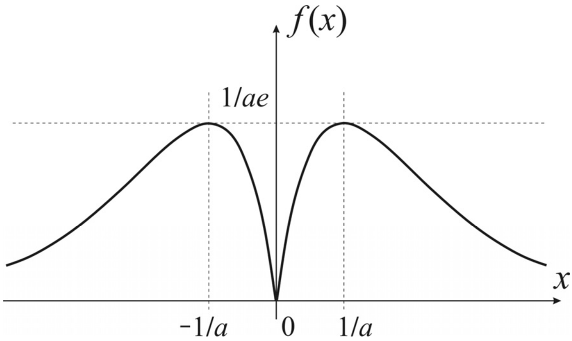

Рис. 2. График функции из примера 4.

Покажем, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = [\text{в силу четности}] = 2\int_{0}^{\infty} xe^{-ax}\, dx = 2\left(x\frac{e^{-ax}}{(-a)} - \frac{1}{a^2}e^{-ax} \right)\Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{при } x \to \infty \text{ впервом члене возникает неопределенность вида } (\infty \cdot 0): \\ \lim\limits_{x\to\infty} xe^{-ax} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{ax}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \\ = (\text{по правилу Бернулли-Лопиталя}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{ae^{ax}} = 0 \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{2}{a^2}e^{-ax}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{a^2}.$$

При вычислении интеграла от функции $f(x)e^{-i\omega x} = |x|e^{-a|x|}e^{-i\omega x}$ связанных с симметрией упрощений нет, так как $e^{-i\omega x}$ есть функция общего вида, подынтегральная функция также функция общего вида, хотя функция $f(x)$ четная.

Найдем преобразование Фурье:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-a|x|}\,e^{-i\omega x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}(-x)e^{-a(-x)}e^{-i\omega x}dx+\int\limits_{0}^{\infty}x\,e^{-ax}e^{-i\omega x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int\limits_{-\infty}^{0}xe^{(a-i\omega)x}dx+\int\limits_{0}^{\infty}x\,e^{-(a+i\omega)x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{(a-i\omega)x}}{a-i\omega}\left(x-\frac{1}{a-i\omega}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\left(x+\frac{1}{a+i\omega}\right)\Bigg|_{0}^{\infty}\right).$$

В полученном выражении вычислим отдельно пределы соответствующих слагаемых при $x\to\infty$ и при $x\to-\infty$, а затем продолжим нахождение $F(\omega)$.

$$\lim_{x\to\infty}e^{-(a+i\omega)x}=\lim_{x\to\infty}e^{-ax}\,e^{-i\omega x}=0\,,$$

поскольку произведение бесконечно малой при $x\to\infty$ величины e^{-ax} на ограниченную при $x\to\infty$ величину $e^{-i\omega x}$ ($\left|e^{-i\omega x}\right|=1$) есть величина бесконечно малая при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-(a+i\omega)x}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{(a+i\omega)x}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left[\text{по правилу Бернулли-Лопиталя}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(a+i\omega)e^{(a+i\omega)x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{a+i\omega}=0\,.$$

Аналогично находим, что $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{(a-i\omega)x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{(a-i\omega)x}=0$. Тогда

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{(a-i\omega)x}}{a-i\omega}\left(x-\frac{1}{a-i\omega}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\left(x+\frac{1}{a+i\omega}\right)\Bigg|_{0}^{\infty}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{(a-i\omega)^2}+\frac{1}{(a+i\omega)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

Функция $F(\omega)$ непрерывна для любого ω.

Интеграл Фурье в комплексной форме

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Интеграл Фурье в действительной форме

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{a^2-\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}\cos\omega x\,d\omega,$$

так как

$$A(\omega)=\frac{2\operatorname{Re}F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}=\frac{2(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2},\ B(\omega)=0$$

для четной функции $f(x)$.

3. УСЛОВИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задания

Задача I

1. Построить график заданной функции (сигнала) и график суммы ряда Фурье (с учетом теоремы Дирихле)
2. Представить функцию рядом Фурье (в действительной форме)
3. Найти амплитудный спектр $\{A_k\}$
4. Найти энергию первой гармоники в разложении и определить число гармоник разложения функции, содержащих в сумме не менее 90 % энергии
5. Представить функцию рядом Фурье в комплексной форме
6. Найти преобразование Фурье в комплексной форме для функции, заданной на интервале $(-L, L)$ и равной нолю вне интервала $(-L, L)$. Представить функцию интегралом Фурье в комплексной форме.

Задача II

Функция задана на интервале $(-L, L)$ одним или двумя отрезками прямых, для которых в условии даны координаты начальной и конечной точек этих отрезков. Записать функцию аналитически и выполнить пункты 1, 2 из задачи I.

Задача III

Функция задана на полупериоде $(0, L)$.

1. Разложить функцию по синусам или косинусам, продолжив нечетным или четным образом на интервал $(-L, 0)$.

2. Выполнить задания 4 и 6 из задачи I.

Задача IV

1. Построить график функции
2. Найти преобразование Фурье в комплексной форме
3. Представить функцию интегралом Фурье в комплексной форме

Условия задач

№	Задача I	Задача II	Задача III	Задача IV
1	$f(x)=\begin{cases} 3, & 0\le x<2 \\ -3, & -2<x<0 \end{cases}$	((–π; π); (0; 0)) и [(0; –π); (π; 0)]	$f(x)=e^x$, $x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 1 \\ 0, & \text{вне } [-1,1] \end{cases}$
2	$f(x)=2x,\ -1<x<1$	[(–1; 1); (0; 0); (1; 2)]	$f(x)=x^2$, $x\in[0,3]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{вне } [0,2] \end{cases}$
3	$f(x)=\|x\|,\ -5\le x\le 5$	[(–π; –π); (π; 0)]	$f(x)=\cos\frac{x}{4}$, $x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=xe^{-\|x\|}$
4	$f(x)=-\frac{x}{3},\ -2<x<2$	[(–2; 2); (0; 2)) и [(0; –1); (2; 1)]	$f(x)=2$, $x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\operatorname{sign}x\, e^{-2\|x\|}$
5	$f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le 1 \\ x-1, & -1<x<0 \end{cases}$	[(–π; 0); (0; π); (π; π)]	$f(x)=x^2$, $x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=e^{-\|x\|}$
6	$f(x)=\begin{cases} -2, & 0\le x<1 \\ 2, & -1<x<0 \end{cases}$	[(–π; 0); (0; –π); (π; –π)]	$f(x)=-x$, $x\in(-\pi,0)$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases} \cos 2x, & 0\le x\le 2\pi \\ 0, & \text{вне } [0,2\pi] \end{cases}$
7	$f(x)=1-\|x\|,\ -\pi<x<\pi$	[(–1; 0); (1; 2)]	$f(x)=e^x$, $x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\begin{cases} e^{-2x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$
8	$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -2<x<0 \\ 2x-1, & 0\le x<2 \end{cases}$	[(–2; –1); (2; 1)]	$f(x)=\operatorname{ch}2x$, $x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=e^{-5\|x\|}$

9	$f(x)=3x^2,\ -1\le x\le 1$	((–4; 2); (0; 2)) и [(0; 4); (4; 0)]	$f(x)=-\dfrac{x}{3},\ x\in[0,3]$ по синусам	$f(x)=e^{-3\|x\|}$
10	$f(x)=5\|x\|,\ -4<x\le 4$	[(–2; 1); (0; –1); (2; 1)]	$f(x)=\dfrac{1}{2}(\pi-x),\quad x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & x<0 \\ -e^{-3x}, & x\ge 0 \end{cases}$
11	$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<3 \\ -1, & -3<x<0 \end{cases}$	[(–3; 6); (0; 0); (3; 0)]	$f(x)=\cos\dfrac{x}{2},\quad x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=e^{-2\|x\|}$
12	$f(x)=4x,\ -3<x<3$	[(–2; 1); (2; –1)]	$f(x)=\operatorname{sh}2x,\ x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$
13	$f(x)=3\|x\|,\ -1\le x\le 1$	[(–2; 1); (0; 1)) и [(0; 0); (2; –1)]	$f(x)=-1,\ x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\operatorname{sign}x\,e^{-\|x\|}$
14	$f(x)=x^2,\ -2\le x\le 2$	[(–3; –1); (0; –1)) и [(0; 0); (3; 1)]	$f(x)=\sin\dfrac{x}{2},\ x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases} e^{-2x}, & x\ge 0 \\ -e^{2x}, & x<0 \end{cases}$
15	$f(x)=x,\ -1<x\le 1$	[(–2; 0); (0; 0)) и [(0; –2); (2; 0)]	$f(x)=\cos\dfrac{x}{3},\ x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases} x, & -4\le x\le 4 \\ 0, & \text{вне } [-4,4] \end{cases}$
16	$f(x)=\begin{cases} -4, & -2<x<0 \\ 4, & 0\le x<2 \end{cases}$	[(–π; 0); (0; π)) и [(0; 0); (π; π)]	$f(x)=e^{2x},\ x\in[0,1]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases} \operatorname{ch}2x, & -2\le x\le 2 \\ 0, & \text{вне } [-2,2] \end{cases}$
17	$f(x)=x,\ -3<x<3$	[(–1; 0); (1; 2)]	$f(x)=\cos\dfrac{x}{3},\ x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\begin{cases} e^{-3x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

О к о н ч а н и е   т а б л и ц ы

№	Задача I	Задача II	Задача III	Задача IV
18	$f(x)=-5x,\ -5<x\le 5$	[(–1; –1); (0; 0)) и [(0; 1); (1; 0)]	$f(x)=e^{3x},\ x\in(0,\pi)$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases}2, -1\le x\le 1\\ 0, \text{вне } [-1,1]\end{cases}$
19	$f(x)=4x^2,\ -1\le x\le 1$	[(–4; 0); (0; 4); (4; 0)]	$f(x)=x,\ x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases}0, x>0\\ e^{x}, x\le 0\end{cases}$
20	$f(x)=-\lvert x\rvert,\ -2<x\le 2$	[(–2; 1); (0; –1)) и [(0; 0); (2; 4)]	$f(x)=\pi-x,\ x\in(0,\pi)$ по синусам	$f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 3\\ -1, -3\le x<0\\ 0, \text{вне } [-3,3]\end{cases}$
21	$f(x)=\begin{cases}x-\pi, 0\le x\le\pi\\ x+\pi, -\pi<x<0\end{cases}$	[(–2; 1); (0; 2); (2; 0)]	$f(x)=x,\ x\in[0,\pi]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases}0, x\ge 0\\ e^{2x}, x<0\end{cases}$
22	$f(x)=\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert,\ -3<x\le 3$	[(–π; 0); (0; 0)) и [(0; 2); (π; 2)]	$f(x)=e^{-x},\ x\in[0,1]$ по синусам	$f(x)=\begin{cases}-1, 0\le x\le 2\\ 1, -2\le x<0\\ 0, \text{вне } [-2,2]\end{cases}$
23	$f(x)=2x^2,\ -\pi\le x\le\pi$	[(––2; 1); (0; –1)) и [(0; 0); (2; 0)]	$f(x)=-x^2,\ x\in[0,3]$ по синусам	$f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, x\ge 0\\ -e^{3x}, x<0\end{cases}$
24	$f(x)=\begin{cases}5, 0\le x\le\pi\\ -5, -\pi<x<0\end{cases}$	[(–6; 6); (6; 0)]	$f(x)=x-1,\ x\in[0,1]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases}xe^{-3x}, x\ge 0\\ -xe^{3x}, x<0\end{cases}$
25	$f(x)=\begin{cases}2-x, 0\le x\le 2\\ -2-x, -2<x<0\end{cases}$	[(–π; π), (0; 0)) и [(0; π); (π; 2π)]	$f(x)=e^{x},\ x\in[0,1]$ по косинусам	$f(x)=\begin{cases}2x, -1\le x\le 1\\ 0, \text{вне } [-1,1]\end{cases}$

4. ОТВЕТЫ

Вариант 1

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases} 3, \; 0\le x<2, \\ -3, \; -2<x<0. \end{cases}$

2. $f(x)=\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k}\sin\dfrac{\pi kx}{2}=\dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}}{2n-1}=$

$$=\frac{12}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2}+\cdots\right).$$

3. $\{A_n\}=\left\{\dfrac{12}{\pi(2n-1)}\right\}=\dfrac{12}{\pi},\dfrac{12}{3\pi},\dfrac{12}{5\pi},\cdots.$

4. $E=36,\; E_k=\dfrac{16\cdot 18}{\pi^2k^2},\; \varepsilon_k=\dfrac{8\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2},\; \varepsilon_1=\dfrac{8\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 81{,}06\,\%.$

5. $f(x)=\dfrac{3i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k}e^{i\frac{\pi kx}{2}}.$

6. $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{6i(\cos 2\omega-1)}{\omega},\; f(x)=\dfrac{3i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 2\omega-1}{\omega}e^{i\omega x}d\omega.$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}-x, -\pi<x<0\\ x-\pi,\ 0\le x\le\pi\end{cases},$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2((-1)^k-1)}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^k-1}{k}\sin kx\ .$$

Задача III

$f(x)=e^x$, $0\le x\le\pi$ по косинусам,

$$f(x)=\frac{e^{\pi}-1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^k-1}{k^2+1}\cos kx\ ,$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^k-1}{k^2+1}e^{ikx}\ .$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}x, -1\le x\le 1\\ 0,\ \text{вне}\ [-1;1]\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{\omega^2},\ f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega\ .$$

Вариант 2

Задача I

1. $f(x)=2x,\ -1<x<1$.

2. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\pi kx$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{4}{\pi k}\right\}=\dfrac{4}{\pi},\dfrac{2}{\pi},\dfrac{4}{3\pi},\cdots$.

4. $E=\dfrac{8}{3}$, $E_k=\dfrac{16}{\pi^2k^2}$, $\varepsilon_k=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2}$, $\varepsilon_1=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60{,}79\,\%$.

5. $f(x)=\dfrac{2i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{i\pi kx}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{2i(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{\omega^2}$, $f(x)=\dfrac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$.

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x\le 0\\ 2x, & 0<\mathrm{x}\le 1\end{cases},\quad f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\cos\pi kx+\frac{3(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin\pi kx.$$

Задача III

$f(x)=x^2$, $0\le x\le 3$ по косинусам, $f(x)=3+\dfrac{36}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\cos\dfrac{\pi kx}{3}$,

$$f(x)=3+\frac{18}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}e^{i\frac{\pi kx}{3}},$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{вне } [0;2],\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(e^{-2i\omega}-1\right)}{\omega}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos 2i\omega-\sin 2i\omega-1}{\omega},$$

$$f(x)=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2i\omega-\sin 2i\omega-1}{\omega}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 3

Задача I

1. $f(x)=|x|,\ -5\le x\le 5$,

2. $$f(x)=\frac{5}{2}+\frac{10}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos\frac{\pi kx}{5}=\frac{5}{2}-\frac{20}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2n-1)x}{5}}{(2n-1)^2},$$

3. $$\{A_n\}=\left\{\frac{20}{\pi^2(2n-1)^2}\right\}=\frac{20}{\pi^2},\frac{20}{9\pi^2},\frac{4}{5\pi^2},\cdots,$$

4. $$E=\frac{125}{6},\ E_k=\frac{16\cdot125}{\pi^4k^4},\ \varepsilon_n=\frac{96\cdot100\%}{\pi^4},\ \varepsilon_1=\frac{96\cdot100\%}{\pi^4}\approx 98,55\%,$$

5. $$f(x)=\frac{5}{2}+\frac{5}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\ne0}}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}e^{i\frac{\pi kx}{5}}.$$

6. $$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2(5\omega\sin5\omega+\cos5\omega-1)}{\omega^2},$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{5\omega\sin5\omega+\cos5\omega-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Задача II

$$f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2},\ x\in[-\pi;\pi],\ f(x)=-\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$$

Задача III

$$f(x)=\cos\frac{x}{4},\ 0<x<\pi \text{ по синусам},\quad f(x)=\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2+\sqrt{2}(-1)^{k+1})k}{16k^2-1}\sin kx,$$

$$f(x)=-\frac{8i}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(2+\sqrt{2}(-1)^{k+1})k}{16k^2-1}e^{ikx}.$$

Задача IV

$$f(x)=x e^{-|x|},\ F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-4i\omega}{(\omega^2+1)^2},\ f(x)=-\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{(\omega^2+1)^2}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 4

Задача I

1. $f(x)=-\dfrac{x}{3},\ -2<x<2$.

2. $f(x)=\dfrac{4}{3\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\sin\dfrac{\pi kx}{2}$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{4}{3\pi k}\right\}=\dfrac{4}{3\pi},\dfrac{2}{3\pi},\dfrac{4}{9\pi},\cdots,$

4. $E=\dfrac{16}{27},\ E_k=\dfrac{32}{9\pi^2k^2},\ \varepsilon_k=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60{,}79\,\%$.

5. $f(x)=\dfrac{2i}{3\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}e^{i\frac{\pi kx}{2}}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{2i}{3}\dfrac{(\sin 2\omega-2\omega\cos 2\omega)}{\omega^2},$

$$f(x)=\frac{i}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\omega-2\omega\cos 2\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}2, & -2\le x<0\\ x-1, & 0\le x\le 2,\end{cases}$$

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}+\frac{-3+(-1)^k}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}.$$

Задача III

$f(x)=2,\ 0<x<\pi$ по синусам, $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$,

$$f(x)=\frac{2i}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{-1+(-1)^k}{k}e^{ikx}$$

Задача IV

$$f(x)=\operatorname{sign}x\,e^{-2|x|}=\begin{cases}e^{-2x}, x>0\\ 0, x=0\\ -e^{2x}, x<0,\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2i\omega}{\omega^2+4},\ f(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+4}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 5

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases}x+1,\ 0\le x\le 1\\ x-1,\ -1<x<0.\end{cases}$

2. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{k+1}+1}{k}\sin\pi kx$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{2}{\pi}\left|\dfrac{1+2(-1)^{k+1}}{k}\right|\right\}=\dfrac{6}{\pi},\dfrac{1}{\pi},\dfrac{2}{\pi},\cdots.$

4. $E=\dfrac{14}{3},\ E_k=\dfrac{4\left(1+2(-1)^{k+1}\right)^2}{\pi^2k^2},$

$$\varepsilon_k=\frac{6\left(1+2(-1)^{k+1}\right)^2\cdot 100\,\%}{7\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\frac{54\cdot 100\%}{7\pi^2}\approx 78{,}16\,\%.$$

5. $f(x)=\frac{i}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{2(-1)^k-1}{k}e^{i\pi kx}$.

6. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2i\frac{(2\omega\cos\omega-\sin\omega-\omega)}{\omega^2}$,

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega\cos\omega-\sin\omega-\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}x+\pi,-\pi\le x\le 0\\ \quad\pi,\ 0<x\le\pi,\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\ .$$

Задача III

$f(x)=x^2$, $0\le x\le\pi$ по косинусам,

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx\ ,$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}e^{ikx}\ ,$$

Задача IV

$f(x)=e^{-|x|}$,

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{\omega^2+1},\ f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2+1}e^{i\omega x}d\omega\,.$$

Вариант 6

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases} -2,\ 0\le x<1 \\ 2,\ -1<x<0. \end{cases}$

2. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k}\sin\pi kx=-\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}=$

$$=-\frac{8}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\frac{1}{5}\sin 5\pi x+\cdots\right).$$

3. $\{A_n\}=\left\{\dfrac{8}{\pi(2n-1)}\right\}=\dfrac{8}{\pi},\dfrac{8}{3\pi},\dfrac{8}{5\pi},\ldots,\dfrac{8}{(2n-1)\pi},\ldots.$

4. $E=8,\ E_k=\dfrac{64}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_k=\dfrac{8\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\dfrac{8\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 81{,}06\,\%.$

5. $f(x)=\dfrac{2i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k}e^{i\pi kx}.$

6. $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}2i\dfrac{(1-\cos\omega)}{\omega},\ f(x)=\dfrac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1-\cos\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega.$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases} -x-\pi, -\pi\le x\le 0 \\ -\pi,\ 0<x\le\pi \end{cases},$$

$$f(x)=-\frac{3\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 1}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^k}{k}\sin kx$$

Задача III

$f(x) = -x,\ -\pi < x < 0$ по косинусам, $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}e^{ikx} .$$

Задача IV

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x,\ 0 \le x \le 2\pi \\ 0, \text{ вне } [0;\,2\pi], \end{cases}$$

$$F(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\omega(e^{-2\pi i\omega} - 1)}{\omega^2 - 4} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\omega(\cos 2\pi i\omega - \sin 2\pi i\omega - 1)}{\omega^2 - 4} ,$$

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(\cos 2\pi i\omega - \sin 2\pi i\omega - 1)}{\omega^2 - 4}e^{i\omega x}d\omega .$$

Вариант 7

Задача I

1. $f(x) = 1 - |x|,\ -\pi < x < \pi$.

2. $f(x) = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} + 1}{k^2}\cos kx = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3. $\{A_n\} = \left\{\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right\} = \frac{4}{\pi}, \frac{4}{9\pi}, \frac{4}{25\pi}, \dots, \frac{4}{(2n-1)^2\pi}, \dots$.

4. $E = \frac{\pi^3}{6},\ E_k = \frac{16}{\pi k^4}$, $\varepsilon_k = \frac{96\cdot 100\%}{\pi^4 k^4},\ \varepsilon_1 = \frac{96\cdot 100\%}{\pi^4} \approx 98{,}55\%$.

5. $f(x)=1-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k^2}e^{ikx}$.

6. $F(\omega)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1-\pi)\sin\omega\pi)}{\omega}+\frac{1-\cos\omega\pi}{\omega^2}\right)$,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(1-\pi)\sin\omega\pi)}{\omega}+\frac{1-\cos\omega\pi}{\omega^2}\right)e^{i\omega x}d\omega .$$

Задача II

$f(x)=x+1,\ x\in[-1;1]$, $f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\pi kx$

Задача III

$f(x)=e^x$, $0<x<\pi$ по синусам, $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+e^{\pi}(-1)^{k+1})k}{k^2+1}\sin kx$,

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(e^{\pi}(-1)^k-1)k}{k^2+1}e^{ikx} .$$

Задача IV

$f(x)=\begin{cases} e^{-2x},\ x\geq 0 \\ 0,\ x<0, \end{cases}$ $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2-i\omega}{\omega^2+4}$, $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2-i\omega}{\omega^2+4}e^{i\omega x}d\omega$

Вариант 8

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, -2<x<0 \\ 2x-1, 0\leq x<2. \end{cases}$

2. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{k+1}-1}{k}\sin\frac{\pi kx}{2}$.

3. $\{A_k\} = \left\{ \frac{2}{\pi k} \left| 3(-1)^{k+1} - 1 \right| \right\} = \frac{4}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, \cdots$.

4. $E = \frac{28}{3}$, $E_k = \frac{8}{\pi^2 k^2} \left(3(-1)^{k+1} - 1 \right)^2$,

$$\varepsilon_k = \frac{6\left(3(-1)^{k+1}-1\right)^2 100\,\%}{7\pi^2 k^2}, \ \varepsilon_1 = \frac{24 \cdot 100\,\%}{7\pi^2} \approx 34{,}74\,\%.$$

5. $f(x) = \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{3(-1)^k + 1}{k} e^{i\frac{\pi k x}{2}}$.

6. $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2i \frac{3\omega \cos 2\omega - 2\sin 2\omega + \omega}{\omega^2}$,

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\omega \cos 2\omega - 2\sin 2\omega + \omega}{\omega^2} e^{i\omega x} d\omega.$$

Задача II

$f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in [-2;2]$, $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{\pi k x}{2}$.

Задача III

$f(x) = \operatorname{ch} 2x$, $0 \le x \le \pi$ по косинусам,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} 2\pi}{2\pi} + \frac{4\operatorname{sh} 2\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+4} \cos kx,$$

$$f(x) = \frac{2\operatorname{sh} 2\pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+4} e^{ikx}.$$

Задача IV

$f(x) = e^{-5|x|}$, $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{10}{\omega^2+25}$, $f(x) = \frac{5}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2+25} e^{i\omega x} d\omega$

Вариант 9

Задача I

1. $f(x)=3x^2,\ -1\le x\le 1$.

2. $f(x)=1+\dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{12}{\pi^2k^2}\right\}=\dfrac{12}{\pi^2},\dfrac{12}{4\pi^2},\ \dots,\dfrac{12}{\pi^2k^2},\dots$.

4. $E=\dfrac{8}{5},\ E_k=\dfrac{144}{\pi^4k^4},\ \varepsilon_k=\dfrac{90\cdot 100\%}{\pi^4k^4},\ \varepsilon_1=\dfrac{90\cdot 100\%}{\pi^4}\approx 92{,}39\%$.

5. $f(x)=1+\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}e^{i\pi kx}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{6}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\sin\omega}{\omega}+\dfrac{2(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{\omega^3}\right)$,

$$f(x)=\frac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{2(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{\omega^3}\right)e^{i\omega x}d\omega .$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}2,-4<x<0\\4-x,\ 0\le x\le 4,\end{cases}$$

$$f(x)=2+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+1}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{4}+\frac{2}{\pi^2k^2}\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{4}.$$

Задача III

$f(x) = -\frac{x}{3}$, $0 \le x \le 3$ по синусам,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi kx}{3},$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{i\frac{\pi kx}{3}}.$$

Задача IV

$$f(x) = e^{-3|x|},\ F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{6}{\omega^2+9},\ f(x) = \frac{3}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2+9}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 10

Задача I

$f(x) = 5|x|$, $-4 < x \le 4$.

2. $$f(x) = 10 + \frac{40}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos\frac{\pi kx}{4} = 10 - \frac{80}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2n-1)}{4}x}{(2n-1)^2}.$$

3. $$\{A_n\} = \left\{\frac{80}{\pi^2(2n-1)^2}\right\} = \frac{80}{\pi^2}, \frac{80}{9\pi^2}, \frac{80}{25\pi^2}, \cdots.$$

4. $$E = \frac{25\cdot 32}{3},\ E_k = \frac{25\cdot 64\cdot 16}{\pi^4 k^4},$$

$$\varepsilon_k = \frac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4 k^4},\ \varepsilon_1 = \frac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4} \approx 98{,}55\,\%.$$

5. $f(x)=10+\frac{20}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}e^{i\frac{\pi kx}{4}}$.

6. $F(\omega)=\frac{10}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\omega\sin 4\omega+\cos 4\omega-1}{\omega^2}$,

$$f(x)=\frac{5}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\omega\sin 4\omega+\cos 4\omega-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Задача II

$f(x)=\begin{cases} x-1,\ 0\le x\le 2\\ -x-1,\ -2\le x<0\end{cases}$, $f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}$.

Задача III

$f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x),\ 0<x<\pi$ по синусам,

$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $f(x)=-\frac{i}{2}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{ikx}$.

Задача IV

$f(x)=\begin{cases} e^{3x},\ x<0\\ -e^{-3x},\ x\ge 0,\end{cases}$ $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i\omega}{\omega^2+9}$, $f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+9}e^{i\omega x}d\omega$.

Вариант 11

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases} 1,\ 0\le x<3\\ -1,\ -3<x<0.\end{cases}$

2. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}sin\frac{\pi kx}{3}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2n-1)x}{3}}{2n-1}$.

3. $\{A_n\} = \left\{\dfrac{4}{\pi(2n-1)}\right\} = \dfrac{4}{\pi}, \dfrac{4}{3\pi}, \dfrac{4}{5\pi}, \ldots$.

4. $E = 6,\ E_k = \dfrac{48}{\pi^2 k^2}$, $\varepsilon_k = \dfrac{8 \cdot 100\,\%}{\pi^2 k^2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{8 \cdot 100\,\%}{\pi^2} \approx 81{,}06\,\%$.

5. $f(x) = \dfrac{i}{\pi} \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^k - 1}{k} e^{i\frac{\pi k x}{3}}$.

6. $F(\omega) = \dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\cos 3\omega - 1}{\omega}$, $f(x) = \dfrac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 3\omega - 1}{\omega} e^{i\omega x} d\omega$.

Задача II

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -3 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x \le 3, \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + 6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} \cos\frac{\pi k x}{3} + \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin\frac{\pi k x}{3}.$$

Задача III

$f(x) = \cos\dfrac{x}{2},\ 0 \le x \le \pi$ по косинусам,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos kx,\ f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} e^{ikx}.$$

Задача IV

$$f(x) = e^{-2|x|},\ F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{\omega^2 + 16},\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + 16} e^{i\omega x} d\omega.$$

Вариант 12

Задача I

1. $f(x) = 4x,\ -3 < x < 3$.

2. $f(x) = \dfrac{24}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\dfrac{\pi k x}{3}$.

3. $\{A_k\} = \left\{\dfrac{24}{\pi k}\right\} = \dfrac{24}{\pi}, \dfrac{12}{\pi}, \dfrac{8}{\pi}, \cdots$.

4. $E = 16\cdot 18,\ E_k = \dfrac{96\cdot 18}{\pi^2 k^2}$, $\varepsilon_k = \dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2 k^2}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2} \approx 60{,}79\,\%$.

5. $f(x) = \dfrac{12i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{i\frac{\pi k x}{3}}$.

6. $F(\omega) = \dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{3\omega\cos 3\omega - \sin 3\omega}{\omega^2}$,

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{3\omega\cos 3\omega - \sin 3\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Задача II

$f(x) = -\dfrac{x}{2},\ x\in[-2;2]$, $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}\sin\dfrac{\pi k x}{2}$.

Задача III

$f(x) = \operatorname{sh} 2x,\ 0 < x < \pi$ по синусам, $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sh} 2\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k(-1)^{k+1}}{k^2+4}\sin kx$,

$$f(x) = \frac{i\operatorname{sh} 2\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{k^2+4}e^{ikx}.$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, \ x\ge 0 \\ 0, \ x<0, \end{cases} \qquad F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-i\omega}{\omega^2+1}, \ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-i\omega}{\omega^2+1}e^{i\omega x}d\omega .$$

Вариант 13

Задача I

1. $f(x)=3|x|, \ -1\le x\le 1$.

2. $f(x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k^2}\cos\pi kx=\dfrac{3}{2}-\dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3. $\{A_n\}=\left\{\dfrac{12}{\pi^2(2n-1)^2}\right\}=\dfrac{12}{\pi^2},\dfrac{4}{3\pi^2},\dfrac{12}{25\pi^2},\cdots$.

4. $E=\dfrac{3}{2}, \ E_k=\dfrac{144}{\pi^4k^4}$, $\varepsilon_k=\dfrac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4k^4}, \ \varepsilon_1=\dfrac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4}\approx 98{,}55\,\%$.

5. $f(x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{\pi^2}\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k^2}e^{i\pi kx}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{6}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\cos\omega+\omega\sin\omega-1}{\omega^2}$, $f(x)=\dfrac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos\omega+\omega\sin\omega-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$.

Задача II

$$f(x)=\begin{cases} 1, \ -2\le x<0 \\ -\dfrac{x}{2}, \ 0\le x\le 2, \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}+\frac{2(-1)^k-1}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2} .$$

Задача III

$f(x) = -1,\ 0 < x < \pi$ по синусам, $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k}\sin kx$,

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}e^{ikx} ,$$

Задача IV

$f(x) = \operatorname{sign} x\, e^{-|x|}$, $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2i\omega}{\omega^2+1}$, $f(x) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+1}e^{i\omega x}d\omega$.

Вариант 14

Задача I

$f(x) = x^2,\ -2 \le x \le 2$

2. $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}$

3. $\{A_k\} = \left\{\frac{16}{\pi^2 k^2}\right\} = \frac{16}{\pi^2}, \frac{4}{\pi^2}, \frac{16}{9\pi^2}, \ldots$

4. $E = \frac{256}{45}$, $E_k = \frac{16\cdot 32}{\pi^4 k^4}$, $\varepsilon_k = \frac{90\cdot 100\%}{\pi^4 k^4}$, $\varepsilon_1 = \frac{90\cdot 100\%}{\pi^4} \approx 92{,}39\%$

5. $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}e^{i\frac{\pi kx}{2}}$

6. $F(\omega) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\sin 2\omega}{\omega} + \frac{2\omega\cos 2\omega - \sin 2\omega}{\omega^3}\right)$,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\sin 2\omega}{\omega} + \frac{2\omega\cos 2\omega - \sin 2\omega}{\omega^3}\right)e^{i\omega x}d\omega$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -3\le x<0\\ \dfrac{x}{3}, & 0\le x\le 3\end{cases},$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{3}+\frac{2(-1)^{k+1}+1}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{3}$$

Задача III

$f(x)=\sin\dfrac{x}{2},\ 0\le x\le\pi$ по косинусам

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos kx$$

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}e^{ikx}$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\ge 0\\ -e^{2x}, & \text{x}<0\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2i\omega}{\omega^2+4},\ \ f(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+4}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 15

Задача I

1. $f(x)=x,\ -1<x\le 1$.

2. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\pi kx$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{2}{\pi k}\right\}=\dfrac{2}{\pi},\dfrac{1}{\pi},\dfrac{2}{3\pi},\cdots$.

4. $E=\dfrac{2}{3}$, $E_k=\dfrac{4}{\pi^2 k^2}$, $\varepsilon_k=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2 k^2}$, $\varepsilon_1=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60,79\,\%$.

5. $f(x)=\dfrac{2i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{i\pi kx}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}$,

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -2\le x<0\\ x-2,\ 0\le x\le 2,\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}-\frac{1}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}$$

Задача III

$f(x)=\cos\dfrac{x}{3}$, $0\le x\le\pi$ по косинусам,

$$f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{9k^2-1}\cos kx\,,\quad f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{9k^2-1}e^{ikx}\,.$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}x,\ -4\le x\le 4\\ 0,\ \text{вне }[-4;4],\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i(4\omega\cos 4\omega-\sin 4\omega)}{\omega^2},$$

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4\omega\cos 4\omega-\sin 4\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Вариант 16

Задача I

$$f(x)=\begin{cases}-4, & -2<x<0\\ 4, & 0\le x<2\end{cases}$$

2. $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k}sin\dfrac{\pi kx}{2}=\dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}}{2n-1}$

3. $\{A_n\}=\left\{\dfrac{16}{\pi(2n-1)}\right\}=\dfrac{16}{\pi^2},\dfrac{16}{3\pi},\dfrac{16}{5\pi},\cdots$

4. $E=64,\ E_k=\dfrac{64\cdot 8}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_k=\dfrac{8\cdot 100\%}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\dfrac{8\cdot 100\%}{\pi^2}\approx 81{,}06\%$

5. $f(x)=\dfrac{4i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k}e^{i\frac{\pi kx}{2}}$

6. $F(\omega)=\dfrac{8i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\cos 2\omega-1}{\omega},\ f(x)=\dfrac{4i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 2\omega-1}{\omega}e^{i\omega x}d\omega$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases},\ f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}-1}{k}\sin kx$$

Задача III

$f(x)=e^{2x},\ 0\le x\le 1$ по косинусам,

$$f(x)=\frac{e^2-1}{2}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^2(-1)^k-1}{\pi^2k^2+4}\cos\pi kx\ ,$$

$$f(x)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^2(-1)^k-1}{\pi^2k^2+4}e^{i\pi kx}\ .$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{ch}2x, & -2\le x\le 2\\ 0, & \text{вне } [-2;2],\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2(2\cos 2\omega\operatorname{sh}4+\omega\sin 2\omega\operatorname{ch}4)}{\omega^2+4},$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\cos 2\omega\operatorname{sh}4+\omega\sin 2\omega\operatorname{ch}4}{\omega^2+4}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 17

Задача I

1. $f(x)=x,\ -3<x<3$.

2. $f(x)=\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\dfrac{\pi kx}{3}$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{6}{\pi k}\right\}=\dfrac{6}{\pi},\dfrac{3}{\pi},\dfrac{2}{\pi},\cdots$.

4. $E=18,\ E_k=\dfrac{4\cdot 27}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_k=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60,79\,\%$.

5. $f(x)=\dfrac{3i}{\pi}\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{i\frac{\pi kx}{3}}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{2i}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{3\omega\cos 3\omega-\sin 3\omega}{\omega^2}$,

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\omega\cos 3\omega-\sin 3\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

Задача II

$$f(x)=x+1,\ x\in[-1;1],\ f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\pi kx.$$

Задача III

$f(x)=\cos\dfrac{x}{3},\ 0<x<\pi$ по синусам,

$$f(x)=\frac{9}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(2+(-1)^{k+1})}{9k^2-1}\sin kx,$$

$$f(x)=\frac{9i}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{((-1)^k-2)k}{9k^2-1}e^{ikx},$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}e^{-3x},\ x\ge 0\\ 0,\ x<0,\end{cases}\quad F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3-i\omega}{\omega^2+9},\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3-i\omega}{\omega^2+9}e^{i\omega x}d\omega.$$

Вариант 18

Задача I

1. $f(x)=-5x,\ -5<x\le 5.$

2. $f(x)=\dfrac{50}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi kx}{5}.$

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{50}{\pi k}\right\}=\dfrac{50}{\pi},\dfrac{25}{\pi},\dfrac{50}{3\pi},\cdots.$

4. $E=\dfrac{50\cdot 125}{3},\ E_k=\dfrac{100\cdot 125}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_k=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\dfrac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60{,}79\,\%.$

5. $f(x)=\dfrac{25i}{\pi}\displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty\\k\ne 0}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{i\frac{\pi kx}{5}}.$

6. $F(\omega)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\frac{5\omega\cos 5\omega-\sin 5\omega}{\omega^2}$,

$$f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{5\omega\cos 5\omega-\sin 5\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases} x, -1\le x<0\\ 1-x,\ 0\le x\le 1,\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi^2k^2}\cos\pi kx+\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi k}\sin\pi kx\ .$$

Задача III

$f(x)=e^{3x}$, $0<x<\pi$ по косинусам,

$$f(x)=\frac{e^{3\pi}-1}{3\pi}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{3\pi}(-1)^k-1}{k^2+9}\cos kx\ ,$$

$$f(x)=\frac{3}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{3\pi}(-1)^k-1}{k^2+9}e^{ikx}\ .$$

Задача IV

$f(x)=\begin{cases} 2, -1\le x\le 1\\ 0, \text{ вне } [-1;1],\end{cases}$ $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\sin\omega}{\omega}$, $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega$

Вариант 19

Задача I

1. $f(x)=4x^2,\ -1\le x\le 1$.

2. $f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx$.

3. $\{A_k\} = \left\{\dfrac{16}{\pi^2 k^2}\right\} = \dfrac{16}{\pi^2}, \dfrac{4}{\pi^2}, \dfrac{16}{9\pi^2}, \dots .$

4. $E = \dfrac{8\cdot 16}{45}$, $E_k = \dfrac{16\cdot 16}{\pi^4 k^4}$, $\varepsilon_k = \dfrac{90\cdot 100\,\%}{\pi^4 k^4}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{90\cdot 100\,\%}{\pi^4} \approx 92{,}39\,\%$.

5. $f(x) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{\pi^2} \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} e^{i\pi k x}$.

6. $F(\omega) = \dfrac{8}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{\sin\omega}{\omega} + \dfrac{2(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^3} \right)$,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{2(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^3} \right) e^{i\omega x} d\omega .$$

Задача II

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, \ 0 \le x \le 4 \\ 4 + x, \ -4 \le x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = 2 + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} + 1}{\pi^2 k^2} \cos\frac{\pi k x}{4} .$$

Задача III

$f(x) = x,\ 0 \le x \le \pi$ по косинусам,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx ,$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} e^{ikx} .$$

Задача IV

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x > 0 \\ e^x, \ x \le 0, \end{cases} \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + i\omega}{\omega^2 + 1}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + i\omega}{\omega^2 + 1} e^{i\omega x} d\omega .$$

Вариант 20

Задача I

1. $f(x) = -|x|, \ -2 < x \le 2$.

2. $f(x) = -1 + \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k^2}\cos\dfrac{\pi k x}{2} = -1 + \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}}{(2n-1)^2}$.

3. $\{A_n\} = \left\{\dfrac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\right\} = \dfrac{8}{\pi^2}, \dfrac{8}{9\pi^2}, \dfrac{8}{25\pi^2}, \cdots$.

4. $E = \dfrac{4}{3}, \ E_k = \dfrac{128}{\pi^4 k^4}, \ \varepsilon_k = \dfrac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4 k^4}, \ \varepsilon_1 = \dfrac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4} \approx 98{,}55\,\%$.

5. $f(x) = -1 + \dfrac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k^2}e^{i\frac{\pi k x}{2}}$.

6. $F(\omega) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1-\cos 2\omega - 2\omega\sin 2\omega}{\omega^2}$,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega - 2\omega\sin 2\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}\,d\omega .$$

Задача II

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & -2 \le x < 0 \\ 2x, & 0 \le x \le 2 \end{cases},$$

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 6\frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi k x}{2} + \frac{1+3(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin\frac{\pi k x}{2} .$$

Задача III

$f(x)=\pi-x,\ 0<x<\pi$ по синусам,

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k},$$

$$f(x)=-i\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{ikx}$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 3\\ -1,\ -3\le x<0\\ 0,\ \text{вне }[-3;3],\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i(\cos 3\omega-1)}{\omega},\quad f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3\omega-1}{\omega}e^{i\omega x}d\omega .$$

Вариант 21

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases}x-\pi, 0\le x\le\pi\\ x+\pi, -\pi<x<0.\end{cases}$

2. $f(x)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$.

3. $\{A_k\}=\left\{\frac{2}{k}\right\}=2,1,\frac{2}{3},\cdots,\frac{2}{k},\cdots$.

4. $E=\frac{2}{3}\pi^3,\ E_k=\frac{4\pi}{k^2},\ \varepsilon_k=\frac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2},\ \varepsilon_1=\frac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60,79\,\%$.

5. $f(x)=i\sum\limits_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k}$.

6. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2i\frac{\pi\omega-\sin\pi\omega}{\omega^2}$, $f(x)=\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\omega-\sin\pi\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$.

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}2+\frac{x}{2},\ -2\le x<0\\ 2-x,\ 0\le x\le 2\end{cases},$$

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}3\frac{(-1)^{k+1}+1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}+\frac{(-1)^k}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}$$

Задача III

$f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ по косинусам,

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos kx\ ,$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}e^{ikx}\ .$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\ge 0\\ e^{2x},\ x<0,\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2+i\omega}{\omega^2+4},\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2+i\omega}{\omega^2+4}e^{i\omega x}d\omega\ .$$

Вариант 22

Задача I

1. $f(x)=\left|\frac{x}{3}\right|, -3<x\le 3$.

2. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos\frac{\pi kx}{3}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2n-1)x}{3}}{(2n-1)^2}$.

3. $\{A_n\}=\left\{\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}\right\}=\frac{4}{\pi^2},\frac{4}{9\pi^2},\frac{4}{25\pi^2},\dots$.

4. $E=\frac{1}{2}$, $E_k=\frac{48}{\pi^4k^4}$, $\varepsilon_k=\frac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4k^4}$, $\varepsilon_1=\frac{96\cdot 100\,\%}{\pi^4}\approx 98{,}55\,\%$.

5. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\ne 0}}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}e^{i\frac{\pi kx}{3}}$.

6. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\frac{\cos 3\omega+3\omega\sin 3\omega-1}{\omega^2}$,

$$f(x)=\frac{1}{3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3\omega+3\omega\sin 3\omega-1}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x<0\\ 2, 0\le x\le\pi\end{cases},\ f(x)=1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}\sin kx$$

Задача III

$f(x)=e^{-x}$, $0\le x\le 1$ по синусам, $f(x)=\frac{2\pi}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e+(-1)^{k+1})k}{\pi^2k^2+1}\sin\pi kx$,

$$f(x)=\frac{i\pi}{e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{((-1)^k-e)k}{\pi^2k^2+1}e^{i\pi kx},$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}-1,\ 0\le x\le 2\\ 1,\ -2\le x<0\\ 0,\ \text{вне}\ [-2;3],\end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i(1-\cos 2\omega)}{\omega},\ \ f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}e^{i\omega x}d\omega$$

Вариант 23

Задача I

1. $f(x)=2x^2,\ -\pi\le x\le\pi$.

2. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+8\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$.

3. $\{A_k\}=\left\{\dfrac{8}{k^2}\right\}=8,2,\dfrac{8}{9},\cdots$.

4. $E=\dfrac{32\pi^5}{45},\ E_k=\dfrac{64\pi}{k^4},\ \varepsilon_k=\dfrac{90\cdot 100\,\%}{\pi^4k^4},\ \varepsilon_1=\dfrac{90\cdot 100\,\%}{\pi^4}\approx 92{,}39\,\%$.

5. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\ne 0}}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}e^{ikx}$.

6. $F(\omega)=\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{\pi^2\sin\pi\omega}{\omega}+\dfrac{2(\pi\omega\cos\pi\omega-\sin\pi\omega)}{\omega^3}\right)$,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi^2\sin\pi\omega}{\omega}+\frac{2(\pi\omega\cos\pi\omega-\sin\pi\omega)}{\omega^3}\right)e^{i\omega x}d\omega\ .$$

Задача II

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & -2\le x<0\\ 0, & 0\le x\le 2,\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{2}+\frac{1+(-1)^k}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}.$$

Задача III

$f(x)=-x^2,\ 0\le x\le 3$ по синусам,

$$f(x)=\frac{18}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\pi^2k^2-2)(-1)^k+2}{k^3}\sin\frac{\pi kx}{3},$$

$$f(x)=\frac{9i}{\pi^3}\sum_{\substack{k=-\infty\\k\ne 0}}^{\infty}\frac{(\pi^2k^2-2)(-1)^{k+1}-2}{k^3}e^{i\frac{\pi kx}{3}}.$$

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, & x\ge 0\\ -e^{3x}, & x<0,\end{cases}\quad F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-2i\omega}{\omega^2+9},\ f(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{\omega^2+9}e^{i\omega x}d\omega.$$

Вариант 24

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases}5, & 0\le x\le\pi\\ -5, & -\pi<x<0.\end{cases}$

2. $f(x)=\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k}\sin kx=\dfrac{20}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

3. $\{A_n\}=\left\{\dfrac{20}{\pi(2n-1)}\right\}=\dfrac{20}{\pi},\dfrac{20}{3\pi},\dfrac{4}{\pi},\cdots.$

4. $E = 50\pi,\ E_k = \dfrac{16 \cdot 25}{\pi^2 k^2},\ \varepsilon_k = \dfrac{8 \cdot 100\,\%}{\pi^2 k^2},\ \varepsilon_1 = \dfrac{8 \cdot 100\,\%}{\pi^2} \approx 81{,}06\,\%$.

5. $f(x) = \dfrac{5i}{\pi} \sum\limits_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \dfrac{(-1)^k - 1}{k} e^{ikx}$.

6. $F(\omega) = \dfrac{10i}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\cos \pi\omega - 1}{\omega},\ f(x) = \dfrac{5i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos \pi\omega - 1}{\omega} e^{i\omega x} d\omega$.

Задача II

$$f(x) = 3 - \frac{x}{2},\ x \in [-6; 6],\ f(x) = 3 + \frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{\pi k x}{6}.$$

Задача III

$f(x) = x - 1,\ 0 \le x \le 1$ по косинусам,

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos \pi k x,$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} e^{i\pi k x},$$

Задача IV

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-3x},\ x \ge 0 \\ -x e^{3x},\ x < 0, \end{cases}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2(3^2 - \omega^2)}{(\omega^2 + 3^2)^2},\ f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^2 - \omega^2}{(\omega^2 + 3^2)^2} e^{i\omega x} d\omega.$$

Вариант 25

Задача I

1. $f(x)=\begin{cases} 2-x, 0\le x\le 2 \\ -2-x, -2<x<0. \end{cases}$

2. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{\pi kx}{2}$.

3. $\{A_k\}=\left\{\frac{4}{\pi k}\right\}=\frac{4}{\pi},\frac{2}{\pi},\frac{4}{3\pi},\cdots$.

4. $E=\frac{16}{3}$, $E_k=\frac{32}{\pi^2k^2}$, $\varepsilon_k=\frac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2k^2}$, $\varepsilon_1=\frac{6\cdot 100\,\%}{\pi^2}\approx 60,79\,\%$.

5. $f(x)=-\frac{2i}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ne 0}}^{\infty}\frac{1}{k}e^{i\frac{\pi kx}{2}}$.

6. $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2i(2\omega-\sin 2\omega)}{\omega^2}$, $f(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\omega-\sin 2\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$.

Задача II

$f(x)=\begin{cases} -x, -\pi\le x<0 \\ x+\pi, 0\le x\le\pi, \end{cases}$

$f(x)=\pi+\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}\sin kx$.

Задача III

$f(x)=e^x$, $0\le x\le 1$ по косинусам, $f(x)=e-1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e(-1)^k-1}{\pi^2k^2+1}\cos\pi kx$,

$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e(-1)^k-1}{\pi^2k^2+1}e^{i\pi kx}$.

Задача IV

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{вне } [-1;1], \end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4i(\omega\cos\omega-\sin\omega)}{\omega^2},\quad f(x)=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}e^{i\omega x}\,d\omega.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Тригонометрические формулы

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Если в задачах встречаются выражения вида $\sin(k\pi+\beta)$, $\cos(k\pi+\beta)$, то их следует вычислять по формулам 1–4. При этом нужно помнить, что

5. $\sin k\pi = 0$, $\cos k\pi = (-1)^k$, k – целое.

Если в решении возникают выражения вида $e^{i\frac{\pi kx}{L}}$, $e^{-i\frac{\pi kx}{L}}$, то часто следует преобразовать их по формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, чтобы перейти к функциям синус и косинус.

6. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$.
7. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$.
8. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$.

Применять формулы 6–8. бывает нужно при вычислении коэффициентов тригонометрического ряда Фурье. Они входят в первые формулы таблицы интегралов в следующем пункте.

2. Таблица интегралов

Таблица интегралов необходима для вычисления коэффициентов ряда Фурье.

Наиболее простые формулы таблицы, такие как формула 4 и др., получены однократным интегрированием по частям. При защите типового расчета и в условиях контрольной работы студент должен уметь выводить такие формулы самостоятельно (интегрировать по частям), не прибегая к таблице интегралов, а таблицу использовать для самопроверки.

Если требуется интегрировать по частям более одного раза, то можно применять формулы таблицы (например, формулу 5).

1. $\int \sin ax \sin bx\, dx = \dfrac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \dfrac{\sin(a+b)x}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2$.

2. $\int \cos ax \cos bx\, dx = \dfrac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \dfrac{\sin(a+b)x}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2$.

3. $\int \sin ax \cos bx\, dx = -\dfrac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \dfrac{\cos(a-b)x}{2(a-b)},\ a^2 \neq b^2$.

4. $\int x \sin bx\, dx = \dfrac{1}{b^2}\sin bx - \dfrac{x}{b}\cos bx$.

5. $\int x^2 \sin bx\, dx = \dfrac{2x}{b^2}\sin bx - \dfrac{b^2x^2-2}{b^3}\cos bx$.

6. $\int x \cos bx\, dx = \dfrac{1}{b^2}\cos bx + \dfrac{x}{b}\sin bx$.

7. $\int x^2 \cos bx\, dx = \dfrac{2x}{b^2}\cos bx + \dfrac{b^2x^2-2}{b^3}\sin bx$.

8. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$.

9. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right)$.

10. $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\, dx = \dfrac{a}{a^2+b^2}\operatorname{ch} ax \sin bx - \dfrac{b}{a^2+b^2}\operatorname{sh} ax \cos bx$.

11. $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx = \dfrac{a}{a^2+b^2}\operatorname{ch} ax \cos bx + \dfrac{b}{a^2+b^2}\operatorname{sh} ax \sin bx$.

12. $\int \operatorname{ch} ax \sin bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \operatorname{sh} ax \sin bx - \frac{b}{a^2+b^2} \operatorname{ch} ax \cos bx$.

13. $\int \operatorname{ch} ax \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \operatorname{sh} ax \cos bx + \frac{b}{a^2+b^2} \operatorname{ch} ax \sin bx$.

14. $\int x e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$.

15. $\int x^2 e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) = \frac{a^2x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}$.

16. $\int \operatorname{sh} ax\, e^{bx}\, dx = \frac{e^{bx}}{b^2 - a^2}\left(b \operatorname{sh} ax - a \operatorname{ch} ax\right),\ a^2 \neq b^2$.

17. $\int \operatorname{ch} ax\, e^{bx}\, dx = \frac{e^{bx}}{b^2 - a^2}\left(b \operatorname{ch} ax - a \operatorname{sh} ax\right),\ a^2 \neq b^2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – Т. II. – М.: Наука, 1996. – 576 с.
2. *Джеффрис Г.*, *Свирлс Б.*, Методы математической физики. Вып. 2. – М: Мир, 1970. – 352с.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – Т. II. – М.: Высшая школа, 1981. – 584с.
4. *Зорич В.А*. Математический анализ. – Ч. II. – М.: Наука, 1984. – 640с.
5. *Буров А.Н*., *Вахрушева Н.Г*., *Клишина С.В*. Практикум по спецглавам математики: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. – 114с.
6. *Неделько С.В*., *Миренкова Г.Н*. Ряды и преобразование Фурье. Специальные главы математического анализа: учебное пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 64 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Неделько Светлана Валерьевна
Миренкова Галина Николаевна

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО РЯДАМ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Подписано в печать 28.08.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 3,72. Печ. л. 4,0. Изд. № 131. Заказ № 1214. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20