Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачёва»

Кафедра теоретической и геотехнической механики

Д. Ю. Сирота

(составитель)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: СБОРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Рекомендовано для использования в учебном процессе
учебно-методической комиссией бакалавриата по направлению
221400.62 «Управление качеством»

Кемерово 2013

Рецензенты

Иванов В. В., профессор	кафедры	ТиГМ
ФИО, должность		наименование кафедры
Шатько Д. Б.., председатель	УМК по направлению	221400.62 «Управление качеством»
ФИО, член УМК или председатель	код и наименование специальности или направления подготовки	

Сирота Дмитрий Юрьевич. Теоретическая механика: сборник задач для практических занятий [Электронный ресурс]: для студентов бакалавриата по направлению 221400.62 «Управление качеством», профиль 221401 «Управление качеством в производственно-технических системах»; для студентов бакалавриата по направлению 151900.62 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» профили 151901 «Технология машиностроения», 150902 «Металлообрабатывающие станки и комплексы» / Д. Ю. Сирота. – Электрон. дан. – Кемерово: КузГТУ, 2013. – Систем. требования : Pentium IV ; ОЗУ 8 Мб ; Windows XP, GNU/Linux; мышь. – Загл. с экрана.

Представленный сборник задач могут использоваться при проведении практических занятий по курсу теоретической механике, а также как справочник и руководство при подготовке к контрольным работам (в том числе расчётно-графической работы), практическим занятиям, зачёту, тестированию «ФЭПО».

В содержательном плане представленный сборник задач ориентированы на перечень тем, которые указаны в рабочей программе направления, а также перечень дидактических единиц, которые содержатся в тестовых материалах «ФЭПО».

Сборник задач содержит необходимый теоретический минимум (определения, теоремы), примеры решения, набор задач по каждому разделу из сборников задач известных авторов: И. В. Мещерский, О.Э. Кепе.

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного положения материальных точек в пространстве.

Механическое взаимодействие – это такой вид взаимодействия материальных тел, который стремится изменить характер их механического движения.

Абсолютно твердое тело – это тело, расстояния между любыми точками которого не меняется с течением времени.

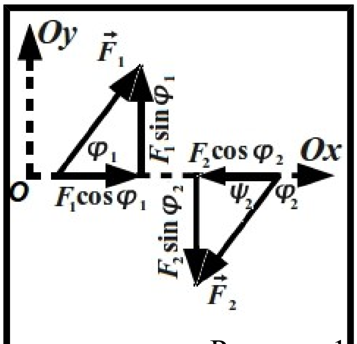
В рамках теоретической механики исследуются механические движения и взаимодействия абсолютно твердых тел.

Опр. 1. Сила – это мера механического взаимодействия тел, которая устанавливает интенсивность и направление этого взаимодействия. Прямая, по которой направлена сила, называется **линией действия** силы.

Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением, точкой приложения. Измеряется сила в Ньютонах $[F] = H = кг \cdot м / с^2$.

Замечание 1. Для изображения силы используют математическое понятие **вектор**. Из математики известно, что в пространстве вектор можно представить в виде суммы: $\vec{F} = F^X \cdot \vec{i} + F^Y \cdot \vec{j} + F^Z \cdot \vec{k} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y + \vec{F}_Z$, где F^X, F^Y, F^Z – координаты вектора, $\vec{F}_X$, $\vec{F}_Y$, $\vec{F}_Z$ – составляющие вектора $\vec{F}$.

В дальнейшем нам потребуется такое математическое понятие, как проекция вектора на ось координат. Пусть даны вектор $\vec{F}$, и угол φ между вектором $\vec{F}$ и **положительным** направлением одной из осей координат (например, Ox); тогда проекции вектора на координатные оси – это вектора, которые расположены на осях с длинами, которые определяются по формулам (рисунок 1):



– Рисунок 1

(1) $$F^X = F \cdot \cos\varphi \ , \ F^Y = F \cdot \sin\varphi \ ,$$

где знак «плюс» у выражений будет означать, что векторы сонаправлены с осями координат, а знак «минус» – что противоположно направлены.

Замечание 2. Если угол $90^0 < \varphi < 180^0$, то по формулам приведения получим, что $\cos\varphi = \cos(180^0 - \psi) = -\cos\psi$. То есть для вычисления проекций можно использовать только острые углы между вектором и одной из осей.

Пример 1. $F_1 = 4$, $F_2 = 10$ Н, $\varphi_1 = 60^0$, $\psi_2 = 45^0$ (рисунок 1). Найти проекции на координатные оси.

Решение. $F_1^X = F_1 \cdot \cos\varphi_1 = 4 \cdot \cos 60^0 = 4 \cdot 0{,}5 = 2$, $F_1^Y = F_1 \cdot \sin\varphi_1 = 4 \cdot 0{,}866 = 3{,}464$ Н, $F_2^X = -F_2 \cdot \cos\psi_2 = -10 \cdot \cos 45^0 = -10 \cdot 0{,}707 = -7{,}07$, $F_2^Y = -F_2 \cdot \sin\psi_2 = -7{,}07$ Н.

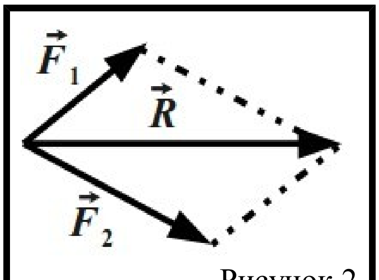
Ответ. $F_1^X = 2$, $F_1^Y = 3{,}464$, $F_2^X = -7{,}07$, $F_2^Y = -7{,}07$ Н.

Опр. 2. Система сходящихся сил – это совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Опр. 3. Равнодействующая сила – это сила, воздействие которой на тело совпадает с воздействием системы сил на это же тело.

Равнодействующая двух сходящихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ (рисунок 2). При этом модуль (величина) этой силы определяется по формуле:

(2) $$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\varphi},$$



- Рисунок 2.

где **R, F₁, F₂** – модули исходных и равнодействующей сил, а направление равнодействующей силы определяется двумя углами, которые определяются по формулам:

(3) $$\sin(\vec{R},\vec{F}_i)=F_j\cdot\sin(\vec{F}_i,\vec{F}_j)/R.$$

Опр. 4. Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная в противоположную сторону по линии ее действия, называется **уравновешивающей.**

Опр. 5. Равновесие тела – это состояние покоя по отношению к другим телам.

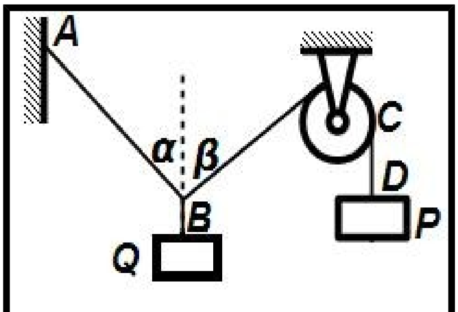
Приведём условия равновесия тела под действием системы сходящихся сил $\vec{F}_1,...,\vec{F}_n$:

(4) $$\vec{R}=\vec{F}_1+...+\vec{F}_n=0,\ R^X=F_1^X+...+F_n^X=0,\ R^Y=F_1^Y+...+F_n^Y=0.$$

Пример 2. На тело действует две силы: $F_1=10$ Н и $F_2=20$ Н под углом $\varphi=60^0$ друг к другу. Определить направление и величину силы $\vec{R}$, которой можно было бы заменить данные две силы (рисунок 2).

Решение. По формуле (2) получим $R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\varphi}=$ $\sqrt{10^2+20^2+2\cdot 10\cdot 20\cdot\cos 60^0}=\sqrt{100+400+200}=\sqrt{700}\approx 26{,}46$ Н. По формуле (3) найдем угол между заданной силой F_1 и равнодействующей: $\sin(\vec{R},\vec{F}_1)=F_2\cdot\sin(\vec{F}_1,\vec{F}_2)/R=$ $=20\cdot\sin 60^0/26{,}46=20\cdot 0{,}866/26{,}46\approx 0{,}65\Rightarrow\alpha_1\approx 41^0$, второй угол можно вычислить из равенства: $\alpha_1+\alpha_2=\varphi$, откуда $\alpha_2\approx 60^0-41^0=19^0$. **Ответ.** $R=26{,}46$ Н.

Пример 3. К верёвке ***AB***, один конец которой закреплён в точке ***A***, привязаны в точке ***B*** груз ***P*** и верёвка ***BCD***, перекинутая через блок; в её концу ***D*** привязана гиря ***Q*** веса 100 ***Н***. Определить натяжение ***T*** верёвки ***AB*** и величину груза ***P***, если конструкция находится в положении равновесия (рисунок 3).



– Рисунок 3

Решение. Рассмотрим стандартную систему координат ***Oxy***. Тогда первое условие равновесия из (4) будет иметь вид: $R^X=T^X+Q^X+P^X=-T\cdot\sin 45^0+Q\cdot\sin 60^0=0$, откуда можно сразу найти, что $T=\dfrac{Q\cdot\sin 60^0}{\sin 45^0}=\dfrac{100\cdot 0{,}866}{0{,}707}=122{,}489$ Н, второе условие равновесия имеет вид: $R^Y=T^Y+Q^Y+P^Y=T\cdot\cos 45^0+Q\cdot\cos 60^0-P=0$, откуда, зная ***T*** и ***Q***, можно найти ***P***: $P=T\cdot\cos 45^0+Q\cdot\cos 60^0=122{,}489\cdot 0{,}707+100\cdot 0{,}5=136{,}599$ Н.

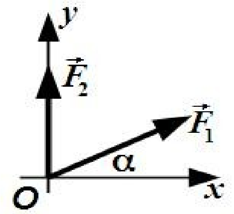
Ответ: $T=122{,}489$, $P=136{,}599$ Н.

Теорема. Если тело находится в равновесии под действием трёх сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

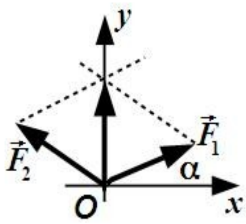
1 (1.1.1).

Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 5$ Н, образующих между собой угол $\alpha = 45^0$. **Ответ:** $R = 9{,}24$ Н.



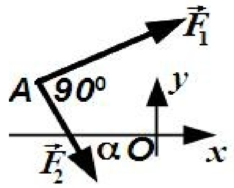
2 (1.1.2)

Определить углы в градусах между равнодействующей двух сил $F_1 = 10$, $F_2 = 8$ Н и осями координат. **Ответ:** с осью ***Ox*** – $56{,}3^0$.



3 (1.1.3)

Равнодействующая ***R*** двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 15$ ***Н*** направлена по оси ***Oy*** и равна 10 ***Н***. Определить в градусах углы, образованные векторами сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ с положительным направлением оси ***Ox***. **Ответ:** для силы $\vec{F}_2$ – $19{,}5^0$.

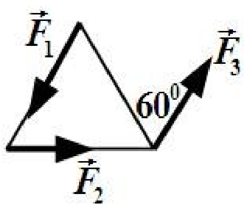


4 (1.1.7)

На твёрдое тело в точке ***A*** действуют две силы $F_1 = 6$, $F_2 = 3$ Н. Определить сумму проекций этих сил на оси координат ***Ox***, ***Oy***, если $\alpha = 60^0$. **Ответ:** На ось ***Ox*** – 6,696; на ось ***Oy*** – 2,131..

5 (1.1.19)

Определить в градусах угол между равнодействующей ***R*** двух сил $\vec{F}_1 = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ и $\vec{F}_2 = 5 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j}$ и положительным направлением осей координат. **Ответ**: угол между ***R*** и осью ***Oy*** равен **41,6⁰**.

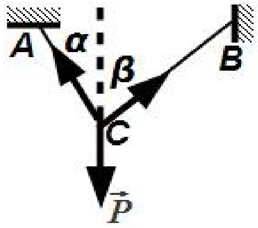


6 (2.2.5)

К вершинам равностороннего треугольника приложены равные силы $F = 1$ Н. Определить модуль векторной суммы этих сил. Ответ: $R = 1{,}00$.

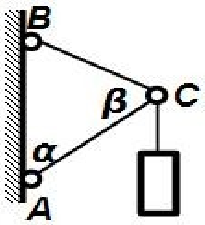
7 (1.2)

Буксир тянет три разные баржи, которые следуют одна за другой. Сила тяги винта буксира равна **18** кН. Сопротивление воды движению различно и равно: для буксира – **6** кН, для первой баржи – **6** кН; для второй баржи – **4** кН; для третьей баржи – **2** кН. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает растягивающую силу в **2** кН. Сколько канатов надо протянуть от буксира к первой баржи, от первой баржи ко второй, от второй к третьей, если движение прямолинейное и равномерное? **Ответ: 6**, **3**, **1** канат.



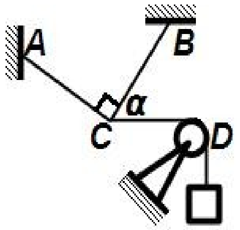
8 (1.2.2)

Определить натяжение $\boldsymbol{T}$ троса $\boldsymbol{BC}$ и силу тяжести $\boldsymbol{P}$ тела, если известно натяжение троса $\boldsymbol{AC}$ $\boldsymbol{Q=15}$ Н и углы $\alpha=30^0$, $\beta=75^0$ **Ответ:** $\boldsymbol{T=7{,}76}$, $\boldsymbol{P=15}$ Н.



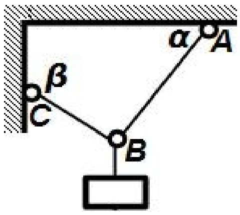
9 (1.2.5)

Шарнирный трёхзвенник $\boldsymbol{ABC}$ удерживает в равновесии груз, подвешенный к болту $\boldsymbol{C}$. Под действием груза стержень $\boldsymbol{AC}$ сжат силой $\boldsymbol{T=25}$ Н. Заданы углы $\alpha=60^0$ $\beta=45^0$. Определить усилие $\boldsymbol{Q}$ в стержне $\boldsymbol{BC}$ и вес груза $\boldsymbol{P}$. **Ответ**: $\boldsymbol{Q=22{,}412}$, $\boldsymbol{P=18{,}305}$ Н.



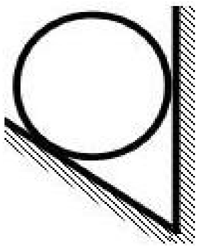
10 (1.2.13)

Два стержня $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ соединены шарниром $\boldsymbol{C}$, к которому через блок подвешен груз весом $\boldsymbol{P=12}$ Н. Определить усилия в стержнях, если $\alpha=60^0$. **Ответ**: усилие в стержне $\boldsymbol{BC}$ $\boldsymbol{T=-6}$ Н.



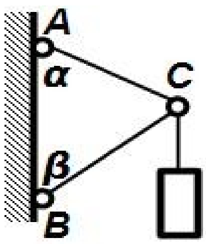
11 (2.10)

Лампа веса **20** Н подвешена к потолку на шнуре $\boldsymbol{AB}$ и затем оттянута к стене верёвкой $\boldsymbol{BC}$. Определить натяжение $\boldsymbol{T}$ шнура $\boldsymbol{AB}$ и натяжение $\boldsymbol{Q}$ верёвки $\boldsymbol{BC}$, если $\alpha=60^0$, $\beta=135^0$. **Ответ**: $\boldsymbol{T=14{,}6}$, $\boldsymbol{Q=10{,}4}$ Н.



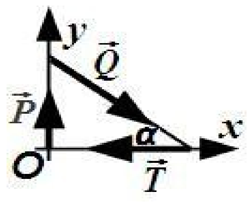
12 (1.2.17)

Однородный шар весом **40** Н опирается на две плоскости, которые пересекаются под углом **60**^{0}. Определить величины давления шара на эти плоскости. **Ответ**: давление на наклонную поверхность равно **46,2** Н.



13 (2.6)

Стержни $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт $\boldsymbol{C}$ действует вертикальная сила $\boldsymbol{P=1000}$. Определить реакции в стержнях, если $\alpha=30^0$, $\beta=60^0$. **Ответ:** $\boldsymbol{T=866}$, $\boldsymbol{Q=500}$ Н.



14 (2.2.8)

К вершинам прямоугольного треугольника приложены три силы $\boldsymbol{P=3}$, $\boldsymbol{Q=6}$, $\boldsymbol{T=14}$ Н. Определить значение угла α в градусах, при котором векторная сумма этих сил будет параллельна оси $\boldsymbol{Ox}$. **Ответ:** $\alpha=30^0$.

2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

Воздействие силы на тело проявляется в двух основных типах движения: поступательном и вращательном. Для количественной характеристики вращательного воздействия силы на твердое тело с учетом направления, в котором сила стремится вращать тело относительно фиксированной точки, вводится понятие **алгебраического момента** силы относительно точки.

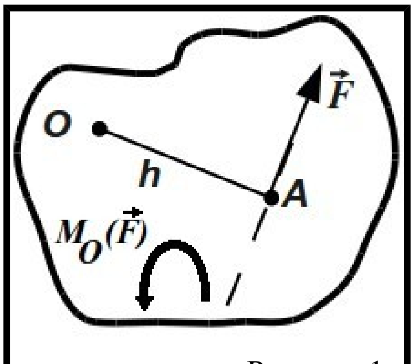
Пусть дано твердое тело с фиксированной точкой $\boldsymbol{O}$. К произвольной точке $\boldsymbol{A}$ этого тела приложена некоторая сила $\vec{F}$, которая стремится повернуть тело по или против часовой стрелки вокруг точки $\boldsymbol{O}$ (рисунок 1).

Опр. 1. Плечо $\boldsymbol{h}$ силы $\vec{F}$ относительно точки $\boldsymbol{O}$ – это кратчайшее расстояние между этой точкой $\boldsymbol{O}$ и линией действия силы $\vec{F}$.

Опр. 2. Алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки $\boldsymbol{O}$ – это произведение величины силы на плечо:

(1) $$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$$

где знак «плюс» выбирается, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки и «минус» в противном случае.

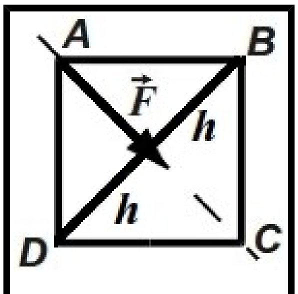


- Рисунок 1

Замечание 1. Из формулы (1) и качественных соображений следует, что приложенная сила не может повернуть тело вокруг точки, лежащей на линии действия силы.

Пример 1. К вершине $\boldsymbol{A}$ квадратной пластины, длины сторон которой равны 0,2 м, приложена сила $F = 150$ Н. Определить момент этой силы относительно всех вершин пластины (рисунок 2).

Решение. Линия действия силы $\vec{F}$ – диагональ квадрата, поэтому плечи силы $\vec{F}$ относительно этих точек равны нулю и, следовательно, моменты силы $M_A(\vec{F}) = M_C(\vec{F}) = 0$. Моменты силы относительно вершин $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ будут совпадающими по величине и противоположными по знаку, так как при фиксации этих вершин тело под действием приложенной силы будет вращаться в противоположные стороны. Найдем плечо силы $\boldsymbol{h}$, как половину диагонали квадрата: $h = 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}141$ Тогда $M_B(\vec{F}) = 150 \cdot 0{,}141 = 21{,}15$ и $M_D(\vec{F}) = -150 \cdot 0{,}141 = -21{,}15$.



– Рисунок 2

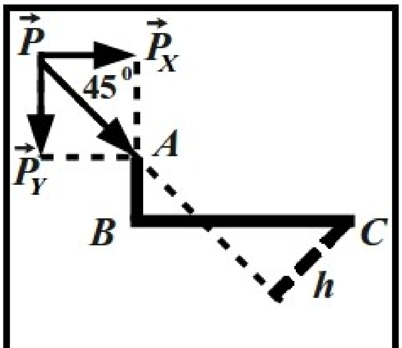
Ответ. $M_{B,D}(\vec{F}) = \pm 21{,}15$ Н·м.

В большинстве прикладных задач вычисление плеча силы относительно выбранной точки представляет собой сложную или не разрешимую геометрическую задачу. В этих случаях применяют очень удобную **теорему Вариньона**:

Теорема 1. Пусть дана система сходящихся сил и известна её равнодействующая. Тогда момент равнодействующей силы относительно точки $\boldsymbol{O}$ равен сумме моментов системы относительно той же точки $\boldsymbol{O}$: $M_O(\vec{R}) = \sum M_O(\vec{F}_k)$.

Пример 2. Пусть дана балка $\boldsymbol{ABC}$, к которой приложена сила $\vec{P}$, при этом $AB = 0{,}5$, $BC = 2$ м, $P = 5$ Н. Вычислить момент $M_C(\vec{P})$ (Рисунок 3).

Решение. При вычисление момента по общей формуле (1) необходимо определить расстояние от точки $\boldsymbol{C}$ до прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{A}$ параллельно вектору $\vec{P}$;



– Рисунок 3

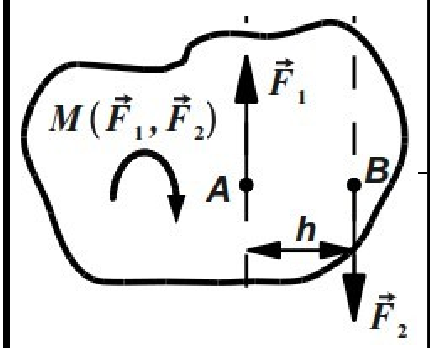
это простая задача из аналитической геометрии, однако количество вычислений необходимых для её решения превышает количество вычислений при использовании теоремы Вариньона.

Разложим силу $\vec{P}$ на вертикальную и горизонтальную компоненты $\vec{P}_X$ и $\vec{P}_Y$ так, что образуется равенство $\vec{P}=\vec{P}_X+\vec{P}_Y$ (Рисунок 3). Тогда по теореме 1 получим равенство: $M_C(\vec{P})=M_C(\vec{P}_X)+M_C(\vec{P}_Y)$. Величины компонент вектора $\vec{P}$ примут значения $P_X=P\cdot\sin 45^0=0{,}707\cdot P$, $P_Y=P\cdot\cos 45^0=0{,}707\cdot P$. Вычислим каждый момент $M_C(\vec{P}_X)$ и $M_C(\vec{P}_Y)$ в отдельности: $M_C(\vec{P}_X)=-P_X\cdot AB=-5\cdot 0{,}707\cdot 0{,}5=-1{,}768$, $M_C(\vec{P}_Y)=P_Y\cdot BC=5\cdot 0{,}707\cdot 2=7{,}07$, следовательно, общий момент силы $\vec{P}$ относительно точки C $M_C(\vec{P})=-1{,}768+7{,}07=5{,}302$.

Ответ: $M_C(\vec{P})=5{,}302$.

Помимо одной силы вращательное воздействие на тело также оказывает особая система сил, которая называется **пара сил**.

Опр. 3. Пара сил $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ – это система двух равных по модулю, параллельных и противоположных по направлению сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (рисунок 4).



– Рисунок 4

По аналогии с алгебраическим моментом силы относительно точки вводится алгебраический момент пары сил.

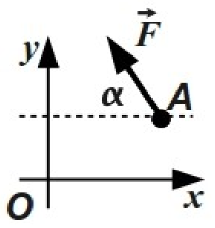
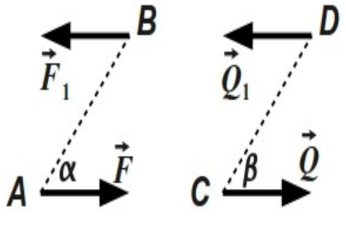
Опр. 4. Плечо *h* пары сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – это кратчайшее расстояние между линиями действия этих сил.

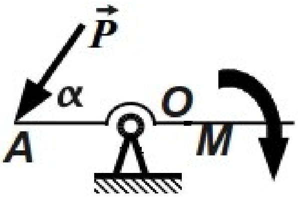
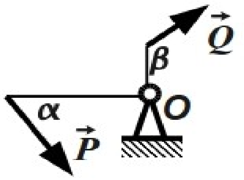
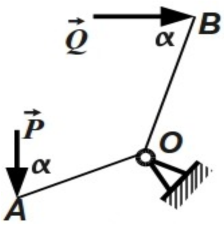
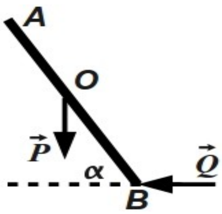
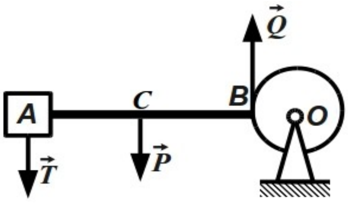
Опр. 5. Алгебраический момент пары сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – это величина, численно равная произведению одной из сил на плечо пары сил:

(2) $$M(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=\pm F_1\cdot h,$$

где знак «плюс» выбирается, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки и «минус» в противном случае. На чертежах обозначается полудугой со стрелкой, которая соответствует направлению вращения.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	**1 (2.1.3)** Сила $F=420$ Н приложена в точке A. Определить момент силы относительно точки O, если координаты $x_A=0{,}2$, $y_A=0{,}3$ м и $\alpha=30^0$. **Ответ**: 151,116 Нм
	**2 (2.1.6)** На плиту в её плоскости действуют две пары сил $(\vec{F};\vec{F}_1)$, $(\vec{Q};\vec{Q}_1)$. Определить сумму моментов этих пар, если $F=8$, $Q=5$ Н, расстояния $AB=0{,}25$, $CD=0{,}2$ м, $\alpha=60^0$, $\beta=70^0$. **Ответ**: $M=0{,}792$

	**3 (2.1.14)** На рычаг с неподвижной осью $\boldsymbol{O}$ действуют пара сил с моментом $\boldsymbol{M=3}$ Н·м, и сила $\vec{\boldsymbol{P}}$. Определить модуль силы, при которой рычаг находится в равновесии, если $\alpha=45^0$, $\boldsymbol{OA=0,3}$ м. **Ответ:** $\boldsymbol{P=14,1}$ Н.
	**4 (2.1.11)** На рычаг с неподвижной осью $\boldsymbol{O}$ в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ действуют силы $\vec{\boldsymbol{P}}$, $\vec{\boldsymbol{Q}}$ соответственно. Определить модуль силы $\boldsymbol{Q}$, если $\boldsymbol{P=4}$ Н, $\boldsymbol{AO=0,5}$, $\boldsymbol{BO=0,6}$ м, $\alpha=45^0$, $\beta=120^0$. **Ответ:** $\boldsymbol{Q=2,72}$ Н.
	**5 (2.1.13)** На рычаг с неподвижной осью $\boldsymbol{O}$ действуют силы $\vec{\boldsymbol{P}}$, $\vec{\boldsymbol{Q}}$. Определить модуль силы $\boldsymbol{Q}$, если $\boldsymbol{P=6}$ Н, $\boldsymbol{AO=0,3}$, $\boldsymbol{BO=0,4}$ м, $\alpha=70^0$. **Ответ:** $\boldsymbol{Q=4,5}$ Н.
	**6 (2.2.2)** Определить сумму моментов системы двух сил относительно точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{P=1}$, $\boldsymbol{Q=5}$ Н, $\boldsymbol{AB=0,2}$ м, $\alpha=60^0$, $\boldsymbol{AO=OB}$. **Ответ**: $\boldsymbol{M_A=-0,916}$ Н·м.
	**7** Дана лебёдка с рычагом $\boldsymbol{AB}$ и барабаном диаметра $\boldsymbol{d=0,25}$ м с центром вращения в точке $\boldsymbol{O}$. К рычагу в точке $\boldsymbol{B}$ приложена активная сила $\boldsymbol{Q=20}$ Н. Определить вес $\boldsymbol{T}$ противовеса $\boldsymbol{A}$, если $\boldsymbol{AC=CB}$, вес рычага $\boldsymbol{P=1}$ Н и $\boldsymbol{OA=1,8}$ м. **Ответ**: $\boldsymbol{T=0,89}$ Н.

3. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

Определять координаты центра тяжести линейных, плоских или объёмных тел необходимо в случае исследования равновесия тяжелых объектов: балок, стержней, ферм. Вычисление координат базируется на следующем положении: на каждую точку тела действует направленная вертикально вниз сила тяжести, в совокупности эти параллельные силы образуют поле сил тяжести с равнодействующей силой (весом тела) $\vec{\boldsymbol{P}}$. Координаты центра тяжести определяются по формулам:

(1) $$x_C=\frac{1}{P}\sum p_k\cdot x_k,\ y_C=\frac{1}{P}\sum p_k\cdot y_k,\ z_C=\frac{1}{P}\sum p_k\cdot z_k,$$

где $\boldsymbol{P}$ – вес тела; $\boldsymbol{p_k}$ – вес каждой точки тела в отдельности; $\boldsymbol{x_k, y_k, z_k}$ – координаты каждой точки тела.

В случае однородного тела его вес оказывается пропорционален мере тела: длине, площади, объёму. Тогда в формулах (1) можно перейти от весового (физического) способа вычисления координат центра тяжести к геометрическому: через длины, площади и объёмы:

$$(2)\qquad x_C=\frac{1}{\Omega}\sum\omega_k\cdot x_k,\ y_C=\frac{1}{\Omega}\sum\omega_k\cdot y_k,\ z_C=\frac{1}{\Omega}\sum\omega_k\cdot z_k,$$

где Ω, ω – мера тела и его частей.

На практике для вычисления координат цента тяжести используют следующие правила: симметрии, разбиение, дополнение, интегрирование, экспериментальный.

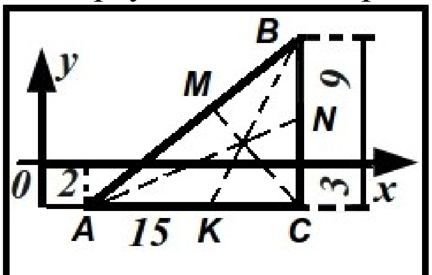
Первое правило: если однородное тело имеет плоскость, ось или точку симметрии, то его центр тяжести расположен именно на них.

Второе правило: если тело можно разбить на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам (1).

Третье правило: если тело имеет вырезы и при этом известны положения центров тяжести тела без выреза и отдельно вырезанной части, то можно применить второе правило, при этом мера вырезаемой области берётся со знаком минус.

Четвёртое правило: если тело нельзя разбить на несколько конечных частей с известными координатами цента тяжести, то переходят к бесконечно малым областям и формулы (2) преобразовываются к интегралам.

Пример 1. Дана однородная пластина в виде прямоугольного треугольника с вершинами в точках $A(2;-3)$, $B(17;9)$, $C(17;-3)$. Найти координаты центра тяжести D (рисунок 1).

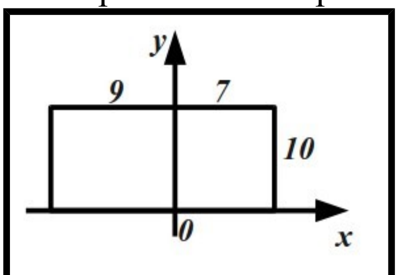


– Рисунок 1

Решение. Центр тяжести треугольника лежит на точке пересечения его медиан. Найдём уравнения двух из них: CM и AN. Координаты точек M и N определятся как середины отрезков AB и BC: $M\left(\frac{2+17}{2};\frac{9-3}{2}\right)=M(9{,}5;3)$, $N\left(17;\frac{9-3}{2}\right)=N(17;3)$. Уравнение прямой AN найдём как уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_A}{x_N-x_A}=\frac{y-y_A}{y_N-y_A}\Rightarrow (x-x_A)\cdot(y_N-y_A)=(y-y_A)\cdot(x_N-x_A)\Rightarrow$ $\Rightarrow(x-2)\cdot 6=(y+3)\cdot 15\Rightarrow 6x-15y=57$. Аналогично получим уравнение прямой CM: $6x+7{,}5y=79{,}5$. Найдём точку пересечения этих прямых, решив систему уравнений: $y_D=1$, $x_D=12$. **Ответ**: $x_D=12$, $y_D=1$.

Замечание 1. Можно показать, что для прямоугольного треугольника точка пересечения медиан совпадает с точкой пересечения горизонтальной и вертикальной прямых, которые проходят на расстоянии одной трети катетов, отсчитанного от прямого угла. Тогда для примера 1 получим, что $x_D=17-\frac{15}{3}=12$ и $y_D=-3+\frac{12}{3}=1$.

Пример 2. Дана однородная прямоугольная пластинка. Найти её центр тяжести.

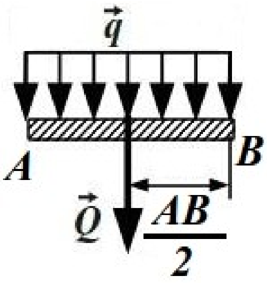


– Рисунок 2

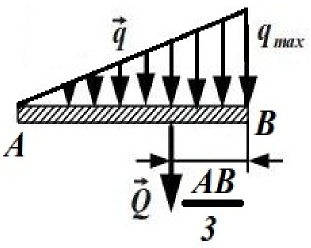
Решение. Так как прямоугольник симметричен относительно точки пересечения диагоналей или средних линий сторон, то именно эта точка и будет центром тяжести плоской пластины: $x_C=-9+\frac{16}{2}=-1$, $y_C=\frac{10}{2}=5$.

Пример 3. Пусть на отрезке AB дана равномерно распределенная нагрузка $\vec{q}$. Тогда её равнодействующая сила $\vec{Q}$ будет проходить через центр тяжести прямоугольника, то есть через середину отрезка AB и равна $Q = AB \cdot q$ (Рисунок 3).

Пример 4. Пусть на отрезке AB действует сила, распределенная по линейному закону от $q = 0$ до $q = q_{max}$. Тогда её равнодействующая сила $\vec{Q}$ будет проходить через центр тяжести прямоугольного треугольника, то есть на расстоянии $l = \dfrac{AB}{3}$ от точки с максимальной нагрузкой и равна $Q = 0{,}5 \cdot AB \cdot q$ (Рисунок 4).

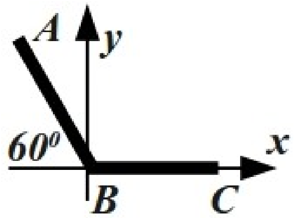


– Рисунок 3



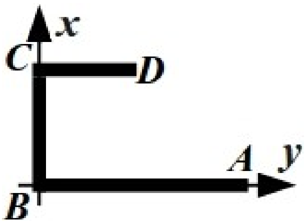
– Рисунок 4

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ



1 (6.1.2)

Кронштейн ABC состоит из однородных стержней AB и BC с одинаковым линейным весом и $BC = 0{,}2$ м. Какова должна быть длина стержня AB, чтобы координата x_D центра тяжести всего кронштейна равнялась нулю? Определить координату y_D. **Ответ**: $x_D = 0{,}283$.

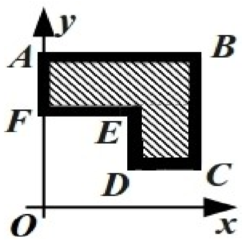


2 (6.1.3)

Определить координаты центра тяжести кронштейна, который состоит из однородных частей: $AB = 0{,}2$, $BC = 0{,}1$, $CD = 0{,}06$ м, имеющих одинаковый линейный вес. Ответ: $y_D = 0{,}0606$.

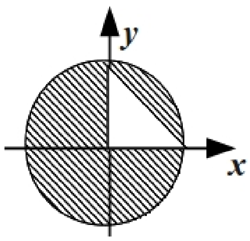
3 (6.2.1)

Определить абсциссу центра тяжести однородной пластины, которая имеет вид прямоугольного треугольника ABC, если $x_A = x_B = 0{,}03$, $x_C = 0{,}09$ м. **Ответ**: $x_D = 0{,}05$.



4 (6.2.5)

Определить координаты центра тяжести фигуры, стороны которой параллельны осям координат, если $AB = 1{,}2$, $BC = 1{,}1$, $CD = 0{,}4$, $DE = 0{,}6$, $OA = 1{,}6$ м. **Ответ:** $y_C = 1{,}19$.



5 (6.2.8)

Определить координаты центра тяжести заштрихованной площади фигуры, если радиус $r = 2$ м. **Ответ:** $x = -0{,}126$.

4. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Опр. 1. Свободное тело – это тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении. В противном случае тело называется несвободным.

Опр. 2. Связывающие тело (связь) – это тело, которое ограничивает свободу движения данного твердого тела, делает его несвободным.

Опр. 3. Реакции связи – это силы, которые действуют со стороны связи на несвободное тело в ответ на прикладываемые усилия.

Аксиома связей (принцип освобождения от связей). Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

Замечание 1. Необходимо отметить, что понятия связи, реакции связи являются **механическими моделями** тех реальных весьма сложных межмолекулярных физических процессов, которые происходят в связывающих телах.

Приведем основные типы геометрических связей и их реакций на плоскости:

1. ***Нить*** (гибкий элемент: трос, цепочка, веревка): трос с грузом для противовеса; реакция состоит из одной силы, которая направлена вдоль нити от груза.

2. ***Невесомый стержень*** (по сути тоже самое, что и нить, только жесткая и поэтому может располагаться под любым углом, и груз можно как подвесить на стержень, так и опереть на него): люстра, проектор на стержне; реакция также состоит из одной силы, которая направлена вдоль стержня в противоположную сторону от прилагаемой нагрузки.

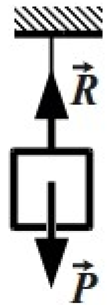
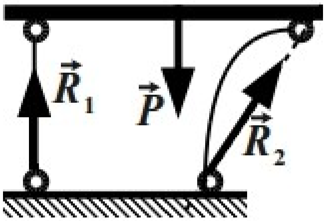
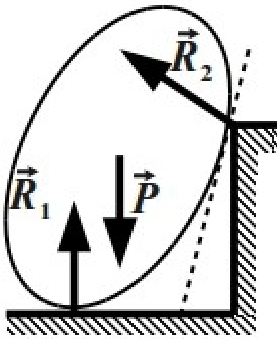
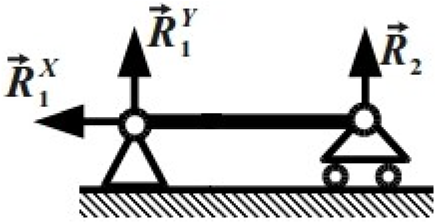
3. ***Гладкая поверхность и ребро*** (лестница, приставленная к стене); реакция состоит из одной силы, которая направлена перпендикулярно касательной к поверхности или телу в точке соприкосновения тела и поверхности или ребра.

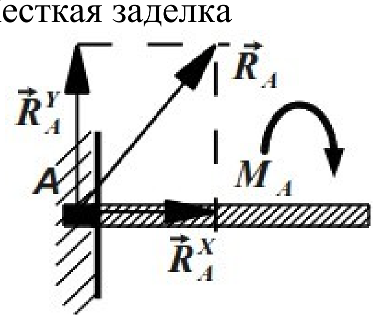
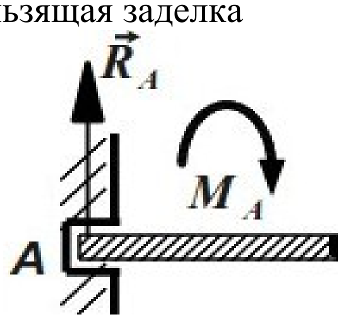
4.1. ***Шарнирно-неподвижная опора*** (цилиндрический шарнир): крепление, при котором одна деталь может свободно вращаться вокруг другой детали, крепление ножниц; реакция состоит из одной силы, которая может быть направлена в произвольную заранее неизвестную сторону, поэтому её раскладывают на две составляющие: горизонтальную и вертикальную.

4.2. ***Шарнирно-подвижная опора*** (цилиндрический шарнир, который может перемещаться вдоль прямой): нога в роликовом коньке, роликовая опора моста; реакция состоит из одной силы, которая направлена перпендикулярно поверхности, по которой катится опора.

5. Жёсткая заделка (балконная плита); реакция состоит из совокупности силы и пары сил. Сила может быть направлена в произвольную заранее не известную сторону, поэтому её раскладывают на две составляющие: горизонтальную и вертикальную. Пара сил с неизвестным по величине и знаку моментом.

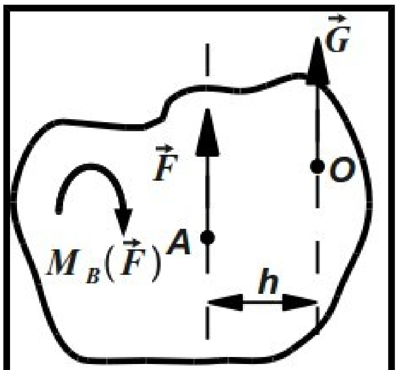
6. Скользящая заделка; реакция состоит из совокупности силы и пары сил. Сила направлена перпендикулярно скользящей балке, а пара сил с неизвестным по вличине и знаку моментом.

1. Нить	2. Стержень	3.Гладкая поверхность и ребро	4. Шарнирно-неподвижная опора; шарнирно-подвижная опора.
			

5. Жесткая заделка	6. Скользящая заделка
	

5. ПРЕВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

Рассмотрим следующий частный **пример**: пусть к телу в точке ***A*** приложена сила $\vec{F}$, линия действия которой проходит через центр тела. В этом случае тело будем двигаться прямолинейно в сторону действия силы. Предположим, что эту силу перенесли в сторону (в некоторую точку ***O***, не лежащую на линии действия силы $\vec{F}$). В этом случае изменится воздействие силы $\vec{F}$ на тело: вместе с поступательным движением тело будет совершать и вращательное. Возникает вопрос: как компенсировать это новое дополнительное вращательное воздействие наиболее эффективным способом. Ответом на этот вопрос служит **теорема Пуансо**.



– Рисунок 1

Теорема 1 (Пуансо). Воздействие силы $\vec{F}$ на тело не изменится, если её перенести из исходной точки ***A*** параллельно самой себе в любую точку твердого тела ***O***, добавив при этом пару сил, момент которой равен моменту первоначальной силы $\vec{F}$ относительно новой точки приложения силы ***O*** (рисунок 1).

Следствие. Состояние тела под воздействием некоторой произвольной системы из ***n*** сил не изменится, если все силы этой системы перенести в некоторую выбранную точку ***O*** (центр приведения), добавив при этом ***n*** пар сил с соответствующими моментами.

Так как после применения следствия из **теоремы Пуансо** получим систему сходящихся сил, то её можно заменить одной равнодействующей силой. Аналогично, можно заменить все пары сил одной парой с суммарным моментом. Рассмотрим соответствующие определения.

Опр. 1. **Главный вектор** всех первоначальных сил $\vec{F}_k$ – это равнодействующая сила $\vec{R}$ всех перенесенных сил $\vec{G}_k$.

Опр. 2. Главный алгебраический момент системы сил $\vec{F}_k$ – это алгебраический момент M_O, равный сумме моментов всех сил: $M_O=\sum M_O(\vec{F}_k)$.

Установим теперь аналитическое условие равновесия под действием системы сил. Тело находится в равновесии, если оно не совершает никакого движения: ни поступательного, ни вращательного. Так как за поступательное движение относительно точки O отвечает главный вектор всех сил, то он должен быть равен нулю; за вращательное движение вокруг точки O отвечает пара сил, следовательно её момент тоже должен быть равен нулю:

(1) $$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n=0\ ,$$

(2) $$M_O=M_O(\vec{F}_1)+...+M_O(\vec{F}_n)=0\ .$$

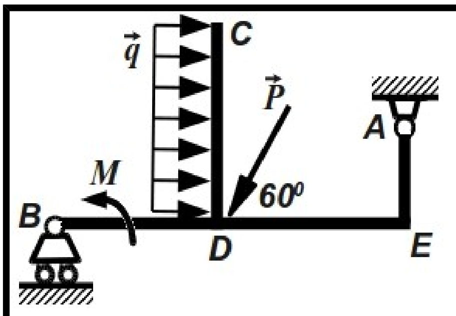
Замечание 1. Можно показать, что условия равновесия (1, 2) **не зависят** от выбора центра приведения. Это позволяет делать проверку правильности вычисления величин неизвестных сил с помощью критерия равенства нулю суммы всех моментов относительно какой-либо другой точки, которая не совпадает с центром приведения O.

Рассмотрим практический аспект применения формул (1, 2). Для удобства применения формулы (1) переходят к её координатной записи, найдя проекции на оси Ox и Oy соответственно. То есть векторное уравнение (1) преобразуется к двум координатным уравнениям вида:

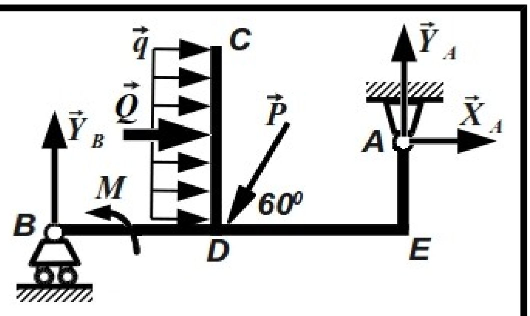
(3) $$R^X=F_1^X+F_2^X+...+F_n^X=0\ ,\ R^Y=F_1^Y+F_2^Y+...+F_n^Y=0$$

Таким образом получается система из трёх линейных алгебраических уравнений. Следовательно, максимальное количество неизвестных в ней тоже может быть равно максимум трём.

Пример 1. Рассмотрим закреплённый брус, при этом известно, что $AE=1$ см, $DE=BD=CD=2$ см, $P=20$ кН, $M=10$ кН·см, $q=2$ кН/см. Найти **все** реакции связей и сделать проверку (Рисунок 2).



– Рисунок 2



– Рисунок 3

Решение. Заменим распределённую нагрузку $\vec{q}$ сосредоточенной нагрузкой $\vec{Q}$, величина которой согласно параграфу 3 будет равна $Q=2\cdot 2=4$ кН, а точка приложения в середине отрезка DC. В схеме закрепления бруса задействованы две связи: шарнирно-подвижная опора B и шарнирно-неподвижная опора A. Учитывая реакции связей из параграфа 4, в опоре B будет одна вертикальная реакция $\vec{Y}_B$, а в опоре A будут две перпендикулярные компоненты $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$. Запишем условия равновесия (2,3).

$$R^X=Q^X+P^X+Y_B^X+X_A^X+Y_A^X=Q-P\cdot\cos 60^0+X_A=4-20\cdot\cos 60^0+X_A=$$
$$=4-10+X_A=-6+X_A=0\Rightarrow X_A=6\ ;$$

$$R^Y=Y_B^Y+P^Y+Q^Y+X_A^Y+Y_A^Y=Y_B-P\cdot\sin 60^0+Y_A=Y_B-20\cdot\sin 60^0+Y_A=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow Y_A + Y_B = 17{,}321$;

$M_D = M_D(\vec{Y}_B) + M_D(\vec{Q}) + M_D(\vec{X}_A) + M_D(\vec{Y}_A) + M =$
$= -2\cdot Y_B - 4 - X_A + 2\cdot Y_A + 10 = 0 \Rightarrow Y_A - Y_B = 0$.

Тогда $Y_A = 8{,}661$, $Y_B = 8{,}661$, $X_A = 6$.

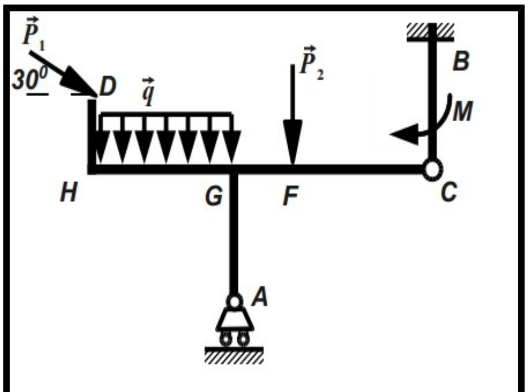
Проверим полученное решение, найдя сумму моментов относительно точки $\boldsymbol{A}$. Здесь представляет определенную сложность вычисление момента $M_A(\vec{P})$ силы $\vec{P}$, поэтому воспользуемся теоремой Вариньона. Найдем длины вертикальной и горизонтальной составляющих силы $\vec{P} = \vec{P}_X + \vec{P}_Y$: $|P_X| = 20\cdot\cos 60^0 = 10$, $|P_Y| = 20\cdot\sin 60^0 = 17{,}321$. Тогда получим, что $M_A(\vec{P}) = M_A(\vec{P}_X) + M_A(\vec{P}_Y) = -10 + 17{,}321\cdot 2 = 24{,}642$. Теперь вычислим сумму всех моментов: $M_A = +M + M_A(\vec{Y}_B) + M_A(\vec{Q}) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{X}_A) + M_A(\vec{Y}_A) =$
$= 10 - 4\cdot 8{,}661 + 24{,}642 = -0{,}002 \approx 0$.

Так как сумма моментов относительно другой точки приблизительно равна нулю, то все переменные найдены верно.

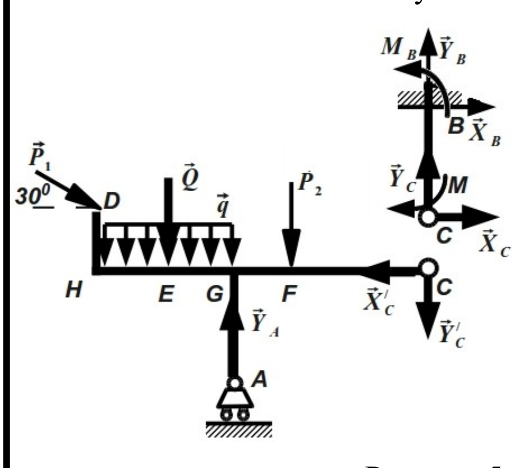
Ответ: $Y_A = 8{,}661$, $Y_B = 8{,}661$, $X_A = 6$ кН.

Рассмотрим более сложный случай, когда несколько тел с помощью сочленения образуют единую конструкцию. При решении вопроса о равновесии такой конструкции с помощью формул (2, 3) может оказаться, что количество неизвестных превосходит количество уравнений, то есть будет больше трех. В этом случае необходимо расчленить исходную составную конструкцию на отдельные элементы, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями. Необходимо учитывать, что при переходе от одной части конструкции к другой эти реакции будут иметь противоположное, на равное по модулю, направление. Кроме того, если в соединительном блоке образуется момент, то для левой и правой частей он будет иметь разные знаки. После этого решается задача о равновесии каждой части в отдельности.

Пример 2. Конструкция состоит из двух частей, которые соединены шарниром. Найти реакции всех опор и сделать проверку, если известно, что $P_1 = 10$, $P_2 = 12$ кН, $M = 17$ кН·м, $q = 1{,}6$ кН/м, $DH = GF = 1$, $AG = BC = 1{,}5$, $HG = 2$, $FC = 3$ м (Рисунок 4).



– Рисунок 4



– Рисунок 5

Решение. Заменим распределённую нагрузку $\vec{q}$ сосредоточенной нагрузкой $\vec{Q}$, величина которой согласно параграфу 3 будет равна $Q = 1{,}6\cdot 2 = 3{,}2$ кН, а точка приложения в точке $\boldsymbol{E}$. Рассмотрим всю конструкцию целиком. Имеются следующие реакции: вертикальная реакция $\vec{Y}_A$ для шарнирно-подвижной опоры, вертикальная и горизонтальная реакции $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_B$, а так же пара сил с моментом M_B для жесткой заделки. Таким образом, необходимо определить четыре переменные на основе трех уравнений равновесия, что невозможно. Поэтому расчленим исходную конструкцию на две части с помощью шарнира ***C***. Тогда левая часть всей конструкции и шарнир ***C*** будут играть роль связывающего тела для правой части и наоборот, правая часть и шарнир ***C*** будут связывающими телами для левой части.

Как указано в параграфе 4, шарнирному соединению соответствует одна реакция, направление которой заранее неизвестно, поэтому её раскладывают на вертикальную и горизонтальную компоненты. Добавим четыре реакции, которые попарно компенсируют друг друга: вертикальные $\vec{Y}_C$, $\vec{Y}_C^{/}=-\vec{Y}_C$ и горизонтальные $\vec{X}_C$, $\vec{X}_C^{/}=-\vec{X}_C$. Таким образом, учитывая первые четыре неизвестные реакции, необходимо найти шесть неизвестных.

Составим уравнения равновесия для всей конструкции в целом (тогда реакции в шарнире ***C*** попарно уничтожатся).

$$R^X=P_1^X+Q^X+P_2^X+Y_A^X+X_B^X+Y_B^X=$$
$$=P_1\cdot\cos 30^0+X_B=10\cdot 0{,}866+X_B=8{,}66+X_B=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_B=-8{,}66\,;$$

$$R^Y=P_1^Y+Q^Y+P_2^Y+Y_A^Y+X_B^Y+Y_B^Y=\ -P_1\cdot\sin 30^0-Q+Y_A-P_2+Y_B=$$
$$=-10\cdot 0{,}5-3{,}2+Y_A-12+Y_B=Y_A+Y_B-20{,}2=0\Rightarrow\quad Y_A+Y_B=20{,}2\,;$$

$$M_D=M_D(\vec{P}_1)+M_D(\vec{P}_2)+M_D(\vec{Q})+M_D(\vec{Y}_A)+M_D(\vec{X}_B)+M_D(\vec{Y}_B)-M+M_B=$$
$$=-12\cdot 3-3{,}2\cdot 1+Y_A\cdot 2-X_B\cdot 0{,}5+Y_B\cdot 6-M+M_B=$$
$$=2\cdot Y_A-0{,}5\cdot(-8{,}66)+6\cdot Y_B-39{,}2-17+M_B=0\Rightarrow 2\cdot Y_A+6\cdot Y_B+M_B=51{,}87\,.$$

Рассмотри равновесие более простой правой части.

$$R^X=X_B^X+Y_B^X+X_C^X+Y_C^X=X_B+X_C=-8{,}66+X_C=0\Rightarrow X_C=8{,}66\,;$$

$$R^Y=X_B^Y+Y_B^Y+X_C^Y+Y_C^Y=Y_B+Y_C=0\,;$$

$$M_C=M_C(\vec{X}_B)-M+M_B=8{,}66\cdot 1{,}5-17+M_B=0\Rightarrow M_B=4{,}01\,.$$

Решая совместно систему из шести уравнений, получим, что $X_B=-8{,}66$, $Y_B=1{,}865$, $Y_A=18{,}335$, $M_B=4{,}01$.

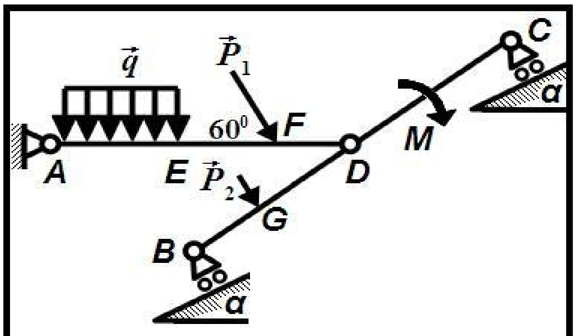
Сделаем проверку, вычислив величину главного момента для всей конструкции относительно точки ***G***:

$$M_G=-P_1\cdot\cos 30^0\cdot 1+P_1\cdot\sin 30^0\cdot 2+Q\cdot 1-P_2\cdot 1-X_B\cdot 1{,}5+Y_B\cdot 4+M_B-M=$$
$=-10\cdot 0{,}866+10\cdot 0{,}5\cdot 2+3{,}2-12+8{,}66\cdot 1{,}5+1{,}865\cdot 4+4{,}01-17=0$, так как сумма равна нулю, то все неизвестные найдены верно.

Ответ: $X_B=-8{,}66$, $Y_B=1{,}865$, $Y_A=18{,}335$, $M_B=4{,}01$.

В качестве следующего примера рассмотрим **задание *Д*-15 *В*-30** из сборника задач А. А. Яблонского.

Пример 4. $P_1=3$, $P_2=5$ кН, $q=2$ кН/м, $AE=ED=2\,FD=4$, $BD=DC=2\,BG=5$ м, $M=10$ кН·м, (рисунок 4). Найти реакции опор.



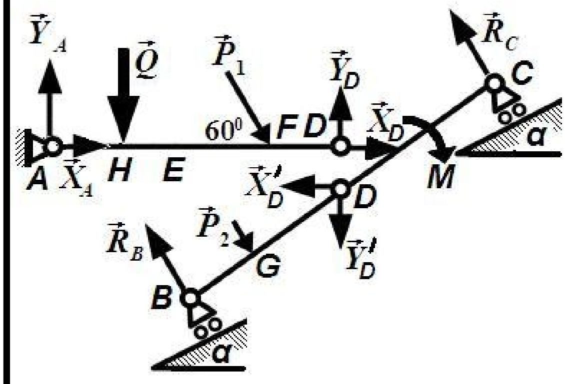
– Рисунок 4

Решение. Вычислим величину равнодействующей $\boldsymbol{Q=q\cdot 4=2\cdot 4=8}$ кН, точка её приложения будет в середине отрезка $\boldsymbol{AE}$ – точке $\boldsymbol{H}$. Так как реактивных сил четыре, то опять, как и в предыдущем примере, необходимо разбить конструкцию на две части (рисунок 5). Составим уравнения равновесия для левой части:

$$R^X=X_A+P_1\cos 60^0+X_D=0\ ,$$
$$R^Y=Y_A-Q-P_1\cdot\sin 60^0+Y_D=0\ ,$$
$$M_F=-6\cdot Y_A+4\cdot Q+2\cdot Y_D=0\ .$$

Составим уравнения равновесия для правой части:

$$R^X=-R_B\cdot\cos 60^0+P_2\cdot\cos 60^0-X_D-R_C\cdot\cos 60^0=0\ ,$$
$$R^Y=R_B\cdot\sin 60^0-P_2\cdot\sin 60^0-Y_D+R_C\cdot\sin 60^0=0\ ,$$
$$M_D=-5\cdot R_B+2{,}5\cdot P_2+5\cdot R_C-M=0\ .$$



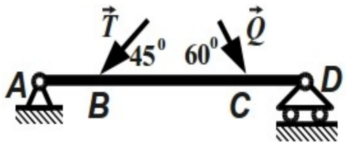
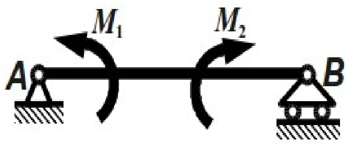
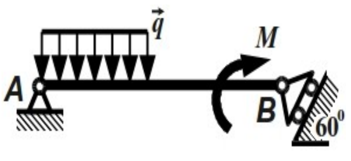
– Рисунок 5

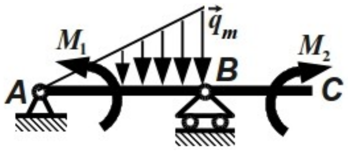
Подставляя в уравнения известные величины, получим следующую систему уравнений: $X_A+X_D=-1{,}500$, $Y_A+Y_D=12{,}330$, $-3\cdot Y_A+Y_D=-16$, $R_B+2\cdot X_D+R_C=2{,}5$, $R_B-1{,}155\cdot Y_D+R_C=5$, $-R_B+R_C=-0{,}5$. Откуда следует, что $Y_A=7{,}083$, $Y_D=5{,}248$, $R_C=5{,}281$, $R_B=5{,}781$, $X_D=-4{,}265$, $X_A=2{,}765$.

Сделаем проверку: $M_A=-Q\cdot 2-P_1\cdot\cos 30^0\cdot 6+Y_D\cdot 8=-8\cdot 2-30\cdot 0{,}866+8\cdot 5{,}248=$ $=-16-25{,}98+41{,}984=-0{,}004$.

Ответ: $Y_A=7{,}083$, $R_C=5{,}281$, $R_B=5{,}781$, $X_A=2{,}765$.

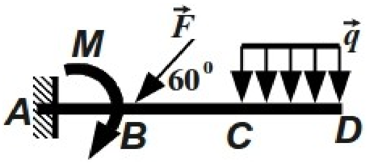
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	**1 (2.4.2)** Найти реакции всех связей, если $T=84{,}6$, $Q=208$ Н, а размеры $AB=1$, $BC=3$, $CD=2$ м. Сделать проверку.
	**2 (2.4.3)** Найти реакции всех связей, если $AB=3$ м, $M_1=2$, $M_2=8$ Нм. Сделать проверку. Сделать проверку.
	**3 (2.4.4)** Определить момент $\boldsymbol{M}$ пары сил и реакцию опоры $\boldsymbol{A}$, если реакция опоры $\boldsymbol{B}$ равна **250** Н, интенсивность $q=150$ Н/м; $AC=CB=2$ м. Сделать проверку.



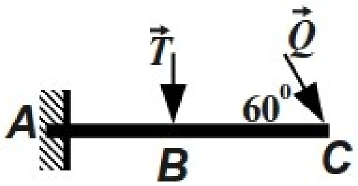
4 (2.4.7)

На балку AC действует распределённая нагрузка интенсивностью $q_{max}=2{,}5$ Н/м и пары сил с моментами $M_1=4$ и $M_2=2$ Нм. Определить реакции, если размеры $AB=4$, $BC=2$ м. Сделать проверку.



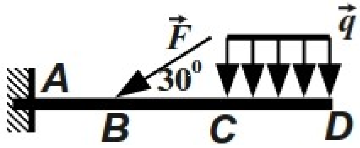
5 (2.4.34)

К балке AD приложена пара сил с моментом $M=200$ Нм, распределённая нагрузка интенсивностью $q=20$ Н/м и сила F. Какой должна быть эта сила, чтобы момент в заделке A равнялся **650** Нм, если размеры $AB=BC=CD=2$ м? Определить величины остальных реакций. Сделать проверку.



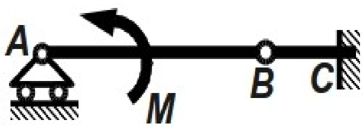
6 (2.4.35)

Определить реакции в заделке A, если $T=50$ Н, $Q=100$ Н, а размеры $AB=BC=2$ м. Сделать проверку.



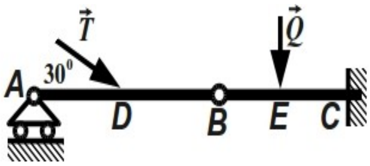
7 (2.4.37)

Определить силу F, при которой момент в заделке A равен **3700** Нм, если интенсивность распределённой нагрузки $q=200$ Н/м, а размеры $AB=BC=2$ м, $CD=3$ м. Определить также остальные реакции. Сделать проверку.



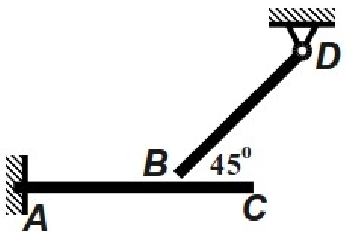
8 (3.2.3)

На балку AB действует пара сил с моментом $M=800$ Нм. Определить реакции в опорах, если $AB=2$, $BC=0{,}5$. Сделать проверку.



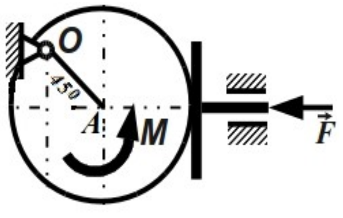
9 (3.2.9)

Два стержня соединены в шарнире B. Определить реакции в опорах, если $T=60$, $Q=60$ Н и $AD=DB=2$, $BE=EC=3$ м. Сделать проверку.



10 (3.2.19)

Однородный брус 2 весом **400** Н свободно опирается в точке B на однородную балку 1. Чему должен равняться вес балки 1, для того чтобы момент в заделке A был равен 265 Нм, если размеры $AB=1$, $BC=0{,}8$, $BD=2$ м. Сделать проверку.



11 (3.3.5)

На толкатель 1 кулачкового механизма действует сила $F=100$ Н. При каком моменте M пары сил, приложенных к кулачку 2, возможно равновесие механизма, если расстояние $OA=0{,}1$ м. Сделать проверку.

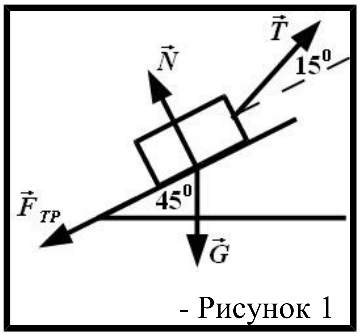
7. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ И ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Опр. 1. Сила трения скольжения – сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого.

Экспериментально установлено, что максимальное значение трения определяется по линейному закону Кулона: $F_{TP}=f\cdot N$, где F_{TP} – это величина силы трения скольжения; f – это **коэффициент трения скольжения**; N – величина нормального к поверхности давления (Рисунок 1).

Коэффициент трения f определяется по формуле $f=tg\,\alpha$, где α – это угол между горизонтальной поверхностью и парой тел, коэффициент трения между которыми необходимо найти; также это и угол между нормальным давлением и равнодействующей нормального давления и силы трения.

Пример 1. Тело, сила тяжести которого $G=100$ Н, удерживается в равновесии силой $\vec{T}$ на шероховатой плоскости, имеющей угол наклона $\alpha=45^0$. Коэффициент трения скольжения $f=0,6$. Сила T действует на тело под углом в 15^0 вверх по наклону. Определить значение силы T в случае равновесия (рисунок 1). Считать, что все силы пересекаются в одной точке.



- Рисунок 1

Решение. Составим уравнения равновесия (так как силы пересекаются в одной точке, то сумма моментов будет равна нулю):

$$R^X=T\cdot\cos 15^0-F_{TP}-G\cdot\cos 45^0=0,966\cdot T-F_{TP}-70,711=0;$$

$$R^Y=T\sin 15^0+N-G\cdot\sin 45^0=0,259\cdot T+N-70,711=0.$$

Применим закон Кулона: $F_{TP}=\pm 0,6\cdot N$, где знак выбирается в зависимости от величины силы T: знак +, если $T=T_{min}$ и знак –, если $T=T_{max}$. Тогда получим систему:

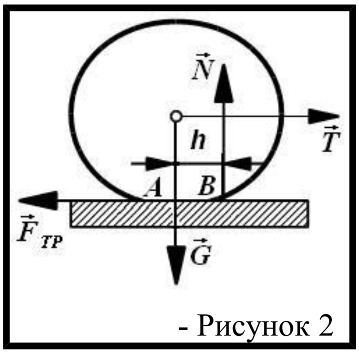
$0,966\cdot T\mp 0,6\cdot N=70,711$, $0,259\cdot T+N=70,711$. Откуда $T_{min}=34,876$, $T_{max}=100,926$.

Ответ. $T_{min}=34,876$, $T_{max}=100,926$ Н.

Опр. 9. Трение качение – это сила сопротивления, которая возникает при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим колесо радиуса R и веса $\vec{G}$, который лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. Приложим в оси колеса силу $\vec{T}$. Так как тела деформируются, то касание колеса и поверхности происходит не в одной точке, а на некотором отрезке ***AB.***

Интенсивность давления в точке A будет убывать, а в точке B нарастать, поэтому реакция $\vec{N}$ будет не в середине отрезка AB, а в его крайней точке – B. В этой же точке будет приложена сила трения $\vec{F}_{TP}$. Таким образом, появляются две пары сил: ($\vec{G}$, $\vec{N}$) и ($\vec{T}$, $\vec{F}_{TP}$) с моментами $M(\vec{G},\vec{N})=N\cdot h$ и $M(\vec{T},\vec{F}_{TP})=-(T\cdot R)$ (Рисунок 2). Составим уравнения равновесия: $R^X=T-F_{TP}=0$, $R^Y=N-G=0$, $N\cdot h-T\cdot R=0$. Тогда получим, что $T=F_{TP}$, $N=G$ и $h=\dfrac{T\cdot R}{N}$. При увеличении силы тяги $\vec{T}$ увеличивается расстояние h. Предельное значение расстояния h, при котором нарушается равновесие называется **коэффициентом трения качения δ.**

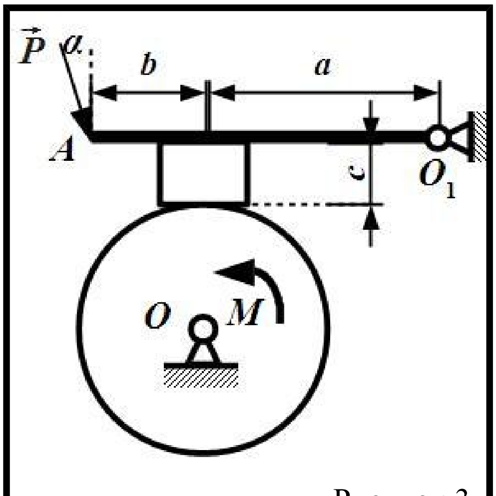


- Рисунок 2

Замечание 3. Можно отметить, что коэффициент трения скольжения – безразмерная величина, а коэффициент трения качения – размерная: $[h]=м$.

Пример 2. К барабану радиуса $R=0,1$ м, который вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, приложен постоянный момент $M=10$ кН•м. Для торможения используют колодку на подвижной рукоятке AO_1, при этом $a=1$, $b=0,5$,

$c=0{,}3$ м. К концу рукоятки приложена сила $\boldsymbol{P}$ под углом $\alpha=30^0$, коэффициент трения скольжения равен $f=0{,}4$. Определить наименьшую силу $\boldsymbol{P}$, необходимую для равновесия, а также все реакции опор (рисунок 3).



– Рисунок 3

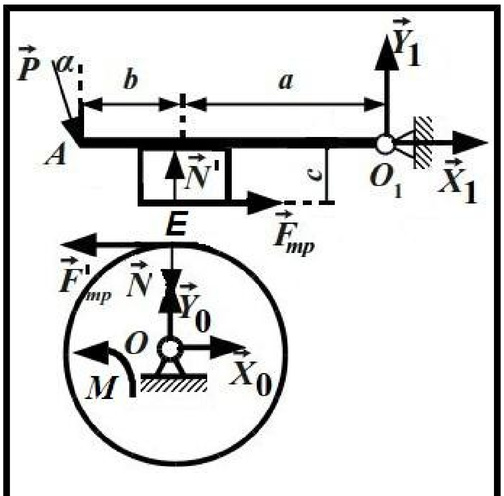
Решение. В задаче необходимо определить 7 неизвестных: $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$, $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, $\vec{F}_{тр}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$. Если по аналогии с **примерами 3, 4** из предыдущего параграфа разделить всю конструкцию на две части, то можно записать 2 системы уравнений равновесия по 3 уравнения в каждой.

Добавляя соотношение между $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$ по закону Кулона, получим всего 7 уравнений (рисунок 4).

Уравнения равновесия для колеса имеют вид:

$R^X=X_0+F_{тр}=0$, $R^Y=Y_0-N=0$,

$M_0=-F_{тр}\cdot R+M=0$ и $F_{тр}=0{,}4\cdot N$. Отсюда $F_{тр}=M/R=100$ кН, $X_0=-F_{тр}=-100$ кН, $N=250$ кН, $Y_0=N=250$ кН.



– Рисунок 4

Уравнения равновесия для рукоятки имеют вид:

$R^X=X_1+P\cdot\sin\alpha-F_{тр}=0$, $R^Y=Y_1-P\cdot\cos\alpha+N=0$,

$M_1=-F_{тр}\cdot c-N\cdot a+P\cdot\cos\alpha\cdot(a+b)=0$, следовательно,

$P=\dfrac{N\cdot a+F_{тр}\cdot c}{\cos\alpha\cdot(a+b)}$, $X_1=F_{тр}-P\cdot\sin\alpha$, $Y_1=P\cdot\cos\alpha-N$

и $P=\dfrac{250\cdot 1+100\cdot 0{,}3}{0{,}866\cdot 1{,}5}=215{,}550$,

$X_1=100-215{,}550\cdot 0{,}5=-7{,}775$,

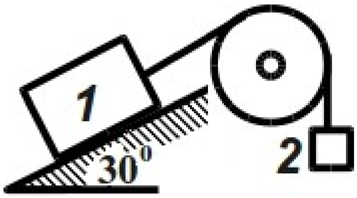
$Y_1=215{,}550\cdot 0{,}866-250=-63{,}334$.

Сделаем проверку, вычислив сумму всех моментов относительно точки $\boldsymbol{E}$.

$$M_E=M_E(\vec{P})+M_E(\vec{X}_0)+M_E(\vec{X}_1)+M_E(\vec{Y}_1)+M=$$
$$=b\cdot P\cdot\cos\alpha-c\cdot P\cdot\sin\alpha+R\cdot X_0-c\cdot X_1+a\cdot Y_1+M=$$
$$=0{,}5\cdot 215{,}550\cdot 0{,}866-0{,}3\cdot 215{,}550\cdot 0{,}5-0{,}1\cdot 100+0{,}3\cdot 7{,}775-63{,}334+10=-0{,}0001\approx 0.$$

Ответ: $P=215{,}550$, $Y_0=250$, $X_1=-7{,}775$, $Y_1=-63{,}334$. $X_0=-100$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

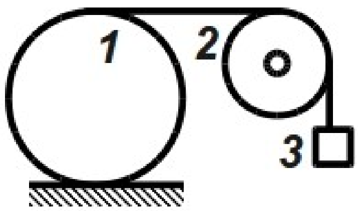


1 (2.5.3)

Определить наименьший вес тела 1, при котором оно скользит вниз по плоскости $\boldsymbol{DE}$, если вес груза 2 равен **320** Н, коэффициент трения $f=0{,}2$. **Ответ**: 979 Н

2 (5.8)

Три груза $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ веса **10**, **30**, **60** Н соответственно, которые соединены тросами, лежат на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны $f_A=0{,}1$, $f_B=0{,}25$, $f_C=0{,}5$. Определить угол α, при котором тела равномерно движутся вниз по плоскости и натяжения тросов между грузами. **Ответ**: $\alpha=20{,}807^0$, $T_{AB}=2{,}7$, $T_{BC}=6{,}5$ Н.



3 (2.6.15)

Однородный каток весом **10** кН и радиусом **0,5** м связан с грузом 3, вес которого равен **80** Н. Определить наименьший коэффициент трения качения, при котором каток останется в покое. **Ответ**: 0,008

КИНЕМАТИКА

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и прилагаемых сил.

Другими словами, неважно **почему** движется тело, важно **как** оно движется.

Движение – это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Задать движение в кинематике означает задать положение этого тела относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Существуют три способа задания движения тела: векторный, координатный естественный.

Векторный способ. Пусть точка ***M*** движется по отношению к некоторой системе отсчета **O*xyz***. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав радиус-вектор, соединяющий начало координат и точку ***M***: $\vec{r}=\vec{r}(t)$ (рисунок 1). Вектор в пространстве определяется тремя величинами – координатами конечной точки радиуса-вектора. Таким образом, получим следующую формулу:

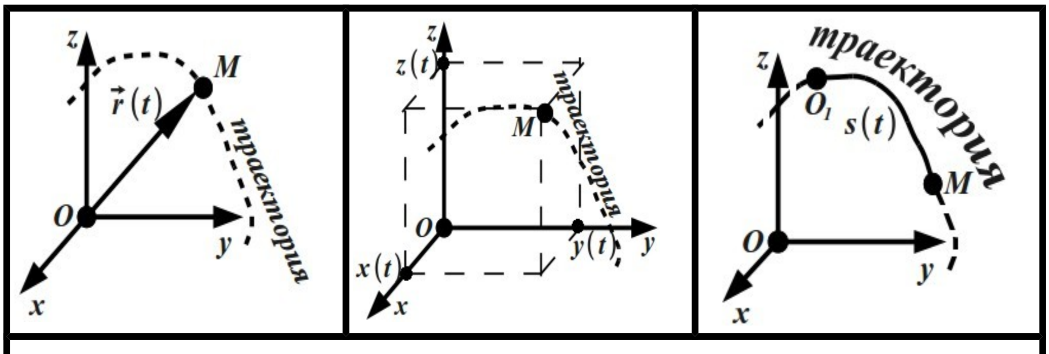
(1) $$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}\,.$$

Координатный способ. Пусть точка ***M*** движется по отношению к некоторой системе отсчета **O*xyz***. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав законы изменения её координат в зависимости от времени (рисунок 1):

(2) $$x=x(t)\,,\ y=y(t)\,,\ z=z(t)\,.$$

Естественный способ. Пусть известна траектория движения точки ***M***. Зафиксируем на этой траектории некоторую начальную точку O_1, которую будем считать началом координат. Обозначим через ***s*** расстояние от O_1 до ***M*** вдоль известной траектории (рисунок 1). Зависимость величины ***s*** от времени определяет закон движения точки по заданной траектории:

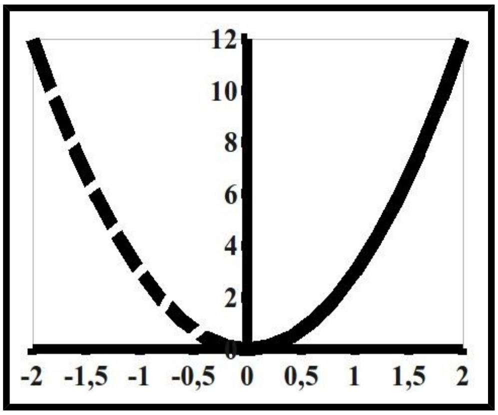
(3) $$s=s(t)\,.$$



– Рисунок 1

Замечание 1. Векторный и координатный способы задания движения – это задание движение относительно некоторой внешней точки, которая не лежит на траектории, (например, наблюдение за движением машины с обочины); естественный же способ – относительно точки, которая лежит на траектории, (наблюдение за движением машины изнутри машины).

Пример 1. Движение точки на плоскости определяется следующими уравнениями: $x=2t$, $y=12t^2$. Определить траекторию движения тела.



Решение. Для определения траектории точки необходимо из уравнений движения исключить время t. Выразим время из первого уравнения: $t=x/2$. Подставим его во второе уравнение: $y=12\cdot(x/2)^2=3x^2$. Получили уравнение параболы. Однако траекторией движения точки является не вся парабола, а только та её часть, что начинается с точки $M_0(x(0);y(0))=M_0(0;0)$ и соответствует неотрицательному времени $t\geq 0$.

Существует взаимосвязь между координатным и естественным способами задания движения. Из математика известно, что элемент дуги траектории ds можно определить следующим образом: $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$. Откуда, интегрируя по времени на промежутке **[0; *t*]** и учитывая, что $df=f'(t)\,dt$, получим:

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt. \qquad (4)$$

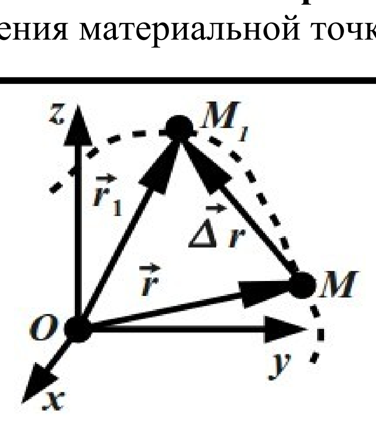
Пример 2. Получить естественную форму записи траектории, если задан закон движения $x=2t$, $y=12t$.

Решение. По аналогии с первым примером получим уравнение траектории $y=6x$. Далее, так как $x=2t$, $y=12t$, то $x'=2\Rightarrow(x')^2=4$ и $y'=12\cdot t\Rightarrow(y')^2=144$. По формуле (4) $s(t)=\int_0^t \sqrt{4+144}\,dt=\sqrt{148}\int_0^t dt=\sqrt{148}\,t$.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим первую кинематическую характеристику движения точки – **скорость**, которая определяет быстроту перемещения и направление движения материальной точки в пространстве с течением времени относительно выбранной системы отсчёта.

Пусть движущаяся точка находится в момент времени t в положении M, которое определяется радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени t_1 в положении M_1, которое определяется радиус-вектором $\vec{r}_1$. Тогда вектор перемещения точки $\vec{MM}_1$ за промежуток времени $\Delta t=t-t_1$ определяется следующим образом: $\vec{MM}_1=\vec{r}-\vec{r}_1=\Delta\vec{r}$ (рисунок 2).



- Рисунок 2

Опр. 1. Средняя скорость тела за промежуток $\Delta t = t - t_1$ – это векторная величина, равная отношению вектора перемещения $\vec{MM}_1$ к соответствующему промежутку времени:

(1) $$\vec{v}_{cp} = \frac{\vec{MM}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Опр. 2. Скорость тела – это векторная величина, равная предельному значению средней скорости при $\Delta t \to 0$:

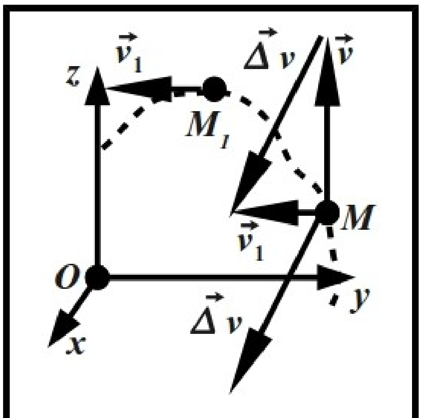
(2) $$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Последнее выражение представляет собой первую производную по времени от векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Таким образом, скорость – это векторная величина, равная первой производной от радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по времени: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\vec{r}(t))'$. Используя формулы (1, 2) из предыдущего пункта получим выражение скорости точки при координатном способе задания движения:

(3) $$v_x = x'(t),\ v_y = y'(t),\ v_z = z'(t),\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Рассмотрим вторую кинематическую характеристику движения точки – **ускорение**, как с течением времени изменяется вектор скорости точки при её движении.

Пусть в некоторый момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\vec{v}$, а в момент времени t_1 – в положении M_1 и имеет скорость $\vec{v}_1$. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t - t_1$ скорость точки получает приращение $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ (рисунок 3).



- Рисунок 3

Опр. 3. Среднее ускорение тела за промежуток времени Δt – это векторная величина, равная отношению приращению скорости $\Delta \vec{v}$ к приращению времени Δt:

(4) $$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

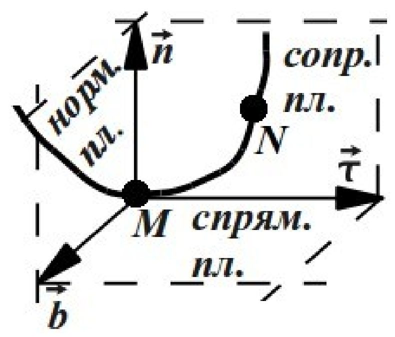
Опр. 4. Ускорение тела – это векторная величина, равная предельному значению среднего ускорения при $\Delta t \to 0$:

(5) $$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Последнее выражение представляет собой первую производную по времени от векторной функции $\vec{v} = \vec{v}(t)$ или вторую производную от функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Таким образом, ускорение – это векторная величина, равная первой производной от вектора скорости $\vec{v} = \vec{v}(t)$ или второй производной от радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по времени: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (\vec{v}(t))' = (\vec{r}(t))''$. Запишем координатную форму для ускорения точки:

(6) $$a_x = v_x'(t) = x''(t),\ a_y = v_y'(t) = y''(t),\ a_z = v_z'(t) = z''(t),\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Формулы (3, 6) применяются в случае координатного способа задания движения точки. В случае же естественного способа необходимом ввести дополнительную систему координат, привязанную к каждой точке M траектории – **естественный трехгранник**, который определяется с помощью трёх плоскостей: спрямляющей, нормальной и соприкасающейся. В качестве иллюстрации будем рассматривать плоскую кривую, которая вся лежит в некоторой плоскости (рисунок 4).



– Рисунок 4

Опр. 5. Касательная τ к кривой L – это прямая, которая является предельным положением секущей прямой MN, проходящей через две точки, при условии, что расстояние между этими точками стремится к нулю.

Опр. 6. Соприкасающаяся плоскость – это плоскость, которая проходит через касательную и точку кривой при условии, что эта точка стремится вдоль кривой к точке касания.

Замечание 2. В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость содержит всю кривою целиком.

Опр. 7. Нормальная плоскость – это плоскость, перпендикулярная касательной прямой в точке M.

Опр. 8. Спрямляющая плоскость – это плоскость, перпендикулярная соприкасающейся и нормальной плоскостям, и проходящая через точку M.

Опр. 9. Главная нормаль n – это линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей.

Опр. 10. Бинормаль b– это линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей.

На введенных линиях зададим пространственную систему координат $M\tau nb$ с центром в точке M. При этом ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния $s(t)$; Mn – по главной нормали в направлении вогнутости траектории; Mb – перпендикулярно к первым двум, так чтобы образовывалась правая тройка векторов.

Определим координаты векторов скорости и ускорения в полученной системе координат. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то из трех его проекций на оси $M\tau$; Mn; Mb останется только проекция на первую ось: v_τ . Используя правила дифференцирования сложной функции, получим: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{\tau}\cdot\frac{ds}{dt}$. Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$. При $\Delta s\to 0$ длина вектора $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ будет равна единице, а направление будет приближаться к направлению касательной. Таким образом, вектор $\vec{\tau}$ будет являться базисным вектором в естественной системе координат. Тогда величину скорости можно будет определить из соотношения:

$$v=v_\tau=\frac{ds}{dt}\,. \qquad (7)$$

Замечание 3. С помощью вектора $\vec{\tau}$ можно определить две геометрические величины, которые характеризуют кривизну заданной кривой.

Опр. 11. Соприкасающаяся окружность – это окружность, которая является наилучшим приближением заданной кривой в окрестности данной точки.

Замечание 4. Радиус кривизны ρ кривой в заданной точке – это радиус соприкасающейся окружности в указанной точке. Величина, обратная радиусу кривизны, называется **кривизной** $K=\frac{1}{\rho}$.

С другой стороны изогнутость кривой определяется поворотом касательного вектора $\vec{\tau}$ на бесконечно малом участке кривой $\Delta s\to 0$: $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$, то есть является векторной величиной.

Опр. 12. Вектор кривизны $\vec{K}$ определяется по формуле: $\vec{K}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}$.

Замечание 4. Можно показать, что вектор $\vec{K}$ пропорционален вектору главной нормали, то есть $\vec{K}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\cdot\vec{n}$.

Определим направление и величину вектора ускорения. Он расположен в соприкасающейся плоскости, поэтому его проекция на ось Mb будет равна нулю и останутся две проекции: a_τ, a_n, которые называются **касательным и нормальным** ускорением соответственно. Найдем формулы для их вычисления. Используем правила дифференцирования сложной функции.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}+\vec{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}+\vec{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\vec{K}\cdot v^2+\vec{\tau}\cdot\frac{dv}{dt}=$$
$$=\vec{n}\cdot\frac{v^2}{\rho}+\vec{\tau}\cdot\frac{dv}{dt}$$

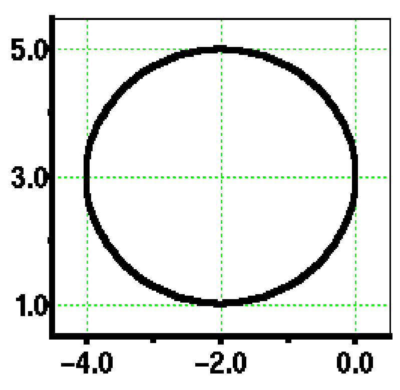
Таким образом, получаем что $\vec{a}_n=\vec{n}\cdot\frac{v^2}{\rho}=\vec{n}\cdot a_n$, $\vec{a}_\tau=\vec{\tau}\cdot\frac{dv}{dt}=\vec{\tau}\cdot a_\tau$, откуда

(8) $$a_n=\frac{v^2}{\rho},\ a_\tau=\frac{dv}{dt},\ a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}.$$

Замечание 5. Найдем формулу для касательного ускорения удобную в случае, когда движение задано координатным способом: $v^2=v_x^2+v_y^2+v_y^2\Rightarrow$
$\Rightarrow 2vv'=2v_xv_x'+2v_yv_y'+2v_zv_z'=2v_xa_x+2v_ya_y+2v_za_z$. Так как из (8) $v'=a_\tau$, то получаем формулу

(9) $$a_\tau=\frac{(v_xa_x+v_ya_y+v_za_z)}{v}.$$

Пример 1. По заданным уравнениям точки установить вид траектории, найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное, нормальное ускорение, радиус кривизны. $x=2\cos(\pi t/3)-2$, $y=-2\sin(\pi t/3)+3$, $z=1{,}5t$, $t=1$. Построить траекторию движения точки, кривую изменения скорости и ускорения с помощью электронной таблицы MS ECXEL, OO CALC.



- Рисунок 5

Решение. Найдем уравнение траектории: $(x+2)^2+(y-3)^2=\ =4\cos^2(\pi t/3)+4\sin^2(\pi t/3)=4$ – получили уравнение окружности (рисунок 5). Найдем положение точки на плоскости и пространстве:

$x(1)=2\cdot 0{,}5-2=-1$, $y(1)=-2\cdot 0{,}866+3=4{,}732$, $z(1)=1{,}5$. Найдем скорость и ускорение по формулам (3, 6):

$v_x=-\frac{2}{3}\pi\sin(\frac{\pi t}{3})\approx-1{,}814$, $v_y=-\frac{2}{3}\pi\cos(\frac{\pi t}{3})\approx-1{,}047$

$a_x=-\frac{2}{9}\pi^2\cos(\frac{\pi t}{3})\approx-1{,}097$, $a_y=\frac{2}{9}\pi^2\sin(\frac{\pi t}{3})\approx 1{,}899$, $v_z=1{,}5$, $a_z=0$.

В данном примере можно показать, что скорость и ускорение будут постоянными по величине. Для скорости на плоскости $v^2=v_x^2+v_y^2=\frac{4}{9}\pi^2\left(\sin^2(\frac{\pi t}{3})+\cos^2(\frac{\pi t}{3})\right)=\frac{4}{9}\pi^2\approx 4{,}386$, а для пространства будет $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=4{,}386+1{,}5^2=6{,}636$. Для ускорения на плоскости и пространстве получим одно и тоже значение $a^2=a_x^2+a_y^2=\frac{4}{81}\pi^4\left(\sin^2(\frac{\pi t}{3})+\cos^2(\frac{\pi t}{3})\right)=\frac{4}{81}\pi^4\approx 4{,}810$. Тогда $v_{2D}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\approx 2{,}094$, $v_{3D}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\approx 2{,}576$ и $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\approx 2{,}193$.

По формуле (10) найдем касательное ускорение на плоскости:
$a_\tau=\frac{(-1{,}814)\cdot(-1{,}097)+(-1{,}047)\cdot(1{,}899)}{2{,}094}\approx 8\cdot 10^{-4}\approx 0$ (так как $a_z=0$, то в пространстве величина a_τ будет такой же). По формуле (9) найдем нормальное ускорение $a_n=\sqrt{2{,}193^2-0^2}\approx 2{,}193$. По формуле (8) найдем радиус кривизны для плоскости и пространства: $\rho_{2D}=2{,}092^2/2{,}193\approx 1{,}996$ и $\rho_{3D}=2{,}576^2/2{,}193\approx 3{,}026$.

Ответ. $v_{2D}\approx 2{,}094$, $v_{3D}\approx 2{,}576$ $a\approx 2{,}193$, $\rho_{2D}\approx 1{,}996$, $\rho_{3D}\approx 3{,}026$.

Приведём **частные случаи** движения точки.

1. Равномерное прямолинейное движение: $v=const$, $\rho=\infty$. В этом случае $\vec{a}_n=0$, $\vec{a}_\tau=0$ и $a=0$.

2. Равномерное криволинейное движение: $v=const$, $\rho\neq\infty$. В этом случае $\vec{a}_n\neq 0$, $\vec{a}_\tau=0$ и $a=a_n$.

3. Неравномерное прямолинейное движение: $v\neq const$, $\rho=\infty$. В этом случае $\vec{a}_n=0$ $\vec{a}_\tau\neq 0$ и $a=a_\tau$.

4. Неравномерное криволинейное движение: $v\neq const$, $\rho\neq\infty$. В этом случае $\vec{a}_n\neq 0$, $\vec{a}_\tau\neq 0$ и $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$.

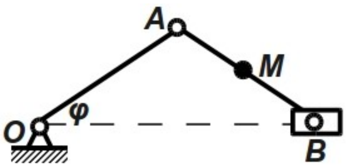
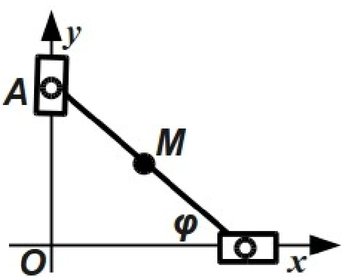
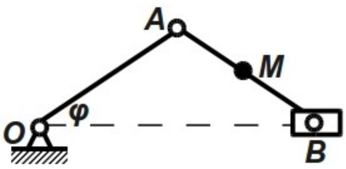
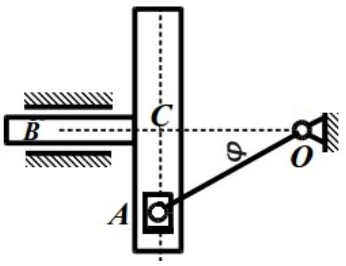
Замечание 6. Можно отметить, что в каждый момент времени нормальное ускорение фиксирует степень кривизны траектории при заданной скорости, а касательное ускорение фиксирует изменение скорости во времени.

Приведём два **частных уравнения** естественного закона движения точки.

При равномерном движении $v=const$. Так как $v=\frac{ds}{dt}$, то $ds=v\,dt\Rightarrow s=vt+c$. Пусть известно, что $s(0)=s_0$, тогда $s=vt+s_0$.

В случае неравномерного равнопеременного движения будем иметь $a_\tau=const$. Тогда $a_\tau=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=a_\tau\,dt\Rightarrow v=a_\tau t+c_1$, учитывая что $v=\frac{ds}{dt}$ получим следующее выражение: $\dfrac{ds}{dt}=a_\tau t+c_1 \Rightarrow s=a_\tau t^2+c_1 t+c_2$. Предполагая, что $s(0)=s_0$ и $v(0)=v_0$, получим $s=a_\tau t^2+v_0 t+s_0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

<table>
<tr><td colspan="2">1 (7.1.1). Заданы уравнения движения точки $x=1+2\sin(0{,}1t)$, $y=3t$. Определить координату x в тот момент, когда её координата $y=12$. Ответ: 1,78</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 (7.1.6). Заданы уравнения движения точки $x=2t$, $y=t$. Определить время t, когда расстояние от точки до начала координат равно 10 м. Ответ: 4,47.</td></tr>
<tr><td></td><td>3 (10.12). Положение кривошипа OA определяется углом $\varphi=10t$. Длины стержней $OA=AB=80$ см. Найти уравнения движения, траекторию и координаты точки M, если $AM=BM$ и $t=\pi/30$ с. Ответ: $x_M=120\cos(10t)$, $y_M=40\sin(10t)$ см, эллипс.</td></tr>
<tr><td></td><td>4 (7.2.6). Положение линейки AB определяется углом $\varphi=0{,}5t$. Определить координаты и величину скорости точки M в момент времени $t=2$ с, если $BM=20$ см.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 (12.27). Дан закон движения точки в координатной форме: $x=2t$, $y=t^2$ см. Определить скорость и ускорение в момент времени $t=1$. Ответ: $v=2\sqrt{2}$, см/с; $a=2$ см/с^2.</td></tr>
<tr><td></td><td>6 (12.18). Найти траекторию, скорость, ускорения точки M шатуна AB, если $OA=AB=0{,}6$ м, $MB=0{,}2$ м, $\varphi=4\pi t$ в момент времени, когда $\varphi=0$.</td></tr>
<tr><td></td><td>7 (7.2.7). Определить закон движения, скорость и ускорение точки A в момент времени $t=6$ с, если $OA=0{,}1$, $BC=0{,}3$ м, $\varphi=6t$. Ответ: $v_B=0{,}595$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8 (7.5.8). Дан закон движения в прямоугольных координатах: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$. Определить момент времени, когда $s=7$, если известно, что $s(0)=0$. Ответ: 2,33</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Точка M движется по плоскости по окружности радиуса 0,1 м согласно уравнению в естественной форме: $s=5\pi\sin\dfrac{\pi t}{6}$. Найти положение на траектории, скорость, ускорение точки в момент времени $t=7$ с. Ответ: $v=7{,}12$ см/с, $a=5{,}51$ см/с^2.</td></tr>
</table>

10. Дан закон движения в прямоугольной системе координат: $x=4t+5$, $y=5t^2+1$. Определить уравнение траектории, скорость, полное, касательное, нормальное ускорение, радиус кривизны в момент времени $t=1$ с. **Ответ**: $v=10{,}8$ м/с, $a=10{,}0$ м/с^2, $\rho=31{,}2$ м.

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ И ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

3.1. ВРАЩАТЕЛЬНОЕДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Различают четыре простейших движения твердого тела: 1) поступательное; 2) вращательное; 3) плоское; 4) сферическое. Рассмотрим только первые три из них.

В дальнейшем будем рассматривать только первые три типа движения.

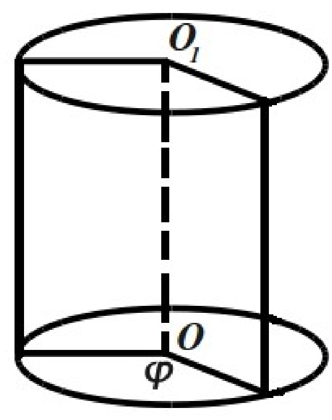
Опр. 1. Поступательное движение твердого тела – это движение, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Теорема 1. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Замечание 1. Из теоремы следует, что поступательное движение тела можно определить с помощью движения одной произвольной точки этого тела (как правило, центра тяжести).

Опр. 2. Вращательное движение твердого тела – это такое движение, при котором какие-нибудь две точки тела остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через указанные две точки называется **осью вращения**; остальные точки движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, радиусы которых равны расстоянию этих точек до оси вращения.



– Рисунок 1

Вращательное движение определяется величиной угла поворота тела в зависимости от времени:

(1) $$\varphi=\varphi(t).$$

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются **угловая скорость** и **угловое ускорение**. По аналогии с выводом уравнений (3, 6) из предыдущего пункта, получим уравнения

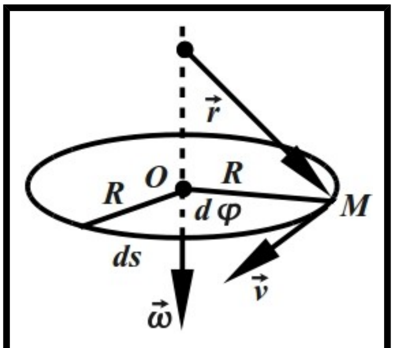
(2) $$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\varphi', \qquad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\omega}{dt}=\omega'=\varphi''.$$

Замечание 2. Векторы скорости и ускорения направлены вдоль оси вращения. При этом, вектор $\vec{\omega}$ направлен в ту сторону, откуда видно, что тело вращается против часовой стрелки. Вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором $\vec{\omega}$, если тело вращается ускоренно, и в противоположную – если замедленно.

Замечание 3. Запишем формулы для равномерного и равнопеременного вращательного движения:

(3) $$\varphi=\frac{1}{2}\varepsilon t^2+\omega_0 t+\varphi_0 \text{ и } \varphi=\omega t+\varphi_0.$$

Определим скорости и ускорения точек вращающегося тела. Рассмотрим точку $\boldsymbol{M}$ твердого тела, находящуюся на расстоянии $\boldsymbol{R}$ от оси вращения. При вращении тела точка $\boldsymbol{M}$ будет описывать окружности радиуса $\boldsymbol{R}$, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр $\boldsymbol{O}$ лежит на самой оси. Если за время $\boldsymbol{dt}$ происходит поворот тела на угол $\boldsymbol{d\varphi}$, то точка $\boldsymbol{M}$ совершает перемещение $ds = R \cdot d\varphi$.



– Рисунок 2

Тогда числовое значение скорости будет определяться по формуле:

(4) $$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega .$$

Определим направление скорости точек тела при его вращении. Поскольку траекторией точки тела является окружность, то вектор скорости направлен по касательной к окружности вращения точки и определяется формулой (рисунок 2):

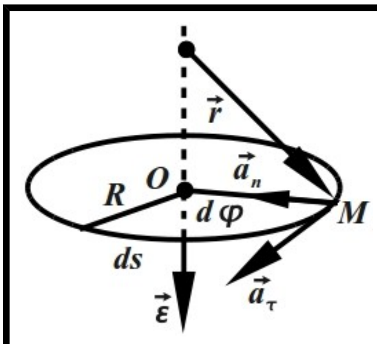
(5) $$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} ,$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки вращения из произвольной точки, расположенной на оси вращения тела.

Поскольку при вращении тела траекторией для любой его точки является окружность, то вектор ускорения будет состоять из двух составляющих: касательного и нормального ускорений. Величины этих ускорений будут определяться по формулам (8) из предыдущего пункта:

(6) $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon , \; a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 .$$

Направление вектора ускорения и его компонент определим с помощью дифференцирования векторного произведения (5): $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$. Получаем формулы (рисунок 3):



– Рисунок 3

(7) $$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} , \; \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} , \; \vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n , \; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Замечание 4. В случае вращательного движения тела, вектор $\vec{a}_\tau$ обычно называется вращательным ускорением, а вектор $\vec{a}_n$ – центростремительным. Изменение терминологии связано с тем, что в случае более сложного сферического движения эти векторы уже не будут направлены по касательной и по нормали к траектории.

Рассмотрим важное приложение теории вращательного движения: передаточные механизмы.

Опр. 3. Передаточный механизм – это механизм, который переназначен для передачи вращения от ***ведущего*** вала к ***ведомому***.

Существуют три основных способа передачи вращения: фрикционная (за счет сцепления), зубчатая, ременная.

Рассмотрим первые две передачи. В точке соприкосновения вращательная скорость обоих колес v одинакова и определяется по формуле (4): $v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$. Аналогичное соотношение выполняется и для ременной передачи, но не для одной точки, а для всех точек ремня.

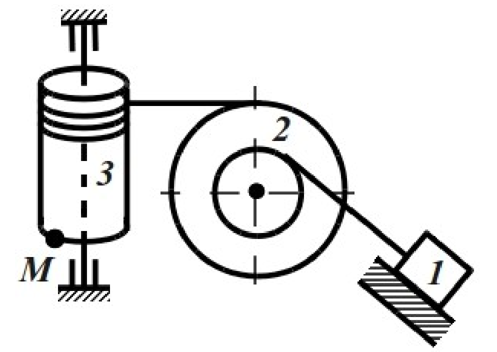
Опр. 4. Передаточное число определяется по следующим формулам:

(8) $$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{z_2}{z_1},,$$

где ω_1, r_1, z_1 – угловая скорость, радиус, число зубцов ведущего колеса, ω_2, r_2, z_2 – угловая скорость, радиус, число зубцов ведомого колеса.

Пример 2. Дано: $R_2=30;r_2=15;R_3=20;x_0=10;v_0=7$; $x_2=128;t_2=2;t_1=1$.

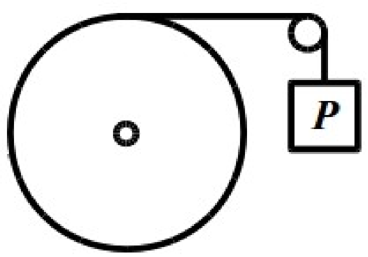
Найти: Скорость и ускорение точки M и груза в момент времени t_1 (рисунок 4).

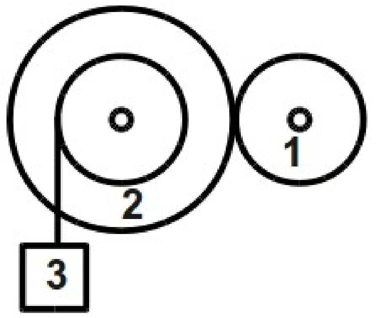
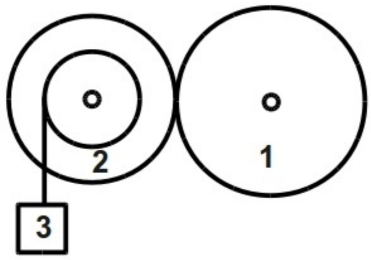
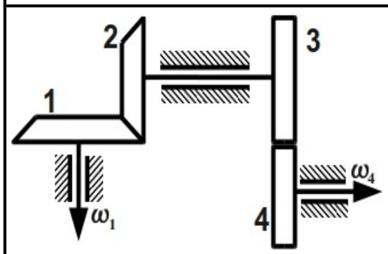


– Рисунок 4

Решение. $x=c_2t^2+c_1t+c_0$; $x(0)=c_0=x_0=10$; $v(0)=x'(0)=c_1=v_0=7$; $x(t_2)=x_2\Rightarrow$ $\Rightarrow 4c_2+7\cdot 2+10=128\Rightarrow c_2=26$, то есть уравнение движения груза имеет вид: $x=26t^2+7t+10$; скорость груза – $v=52t+7$; ускорение груза – $a=52$. Запишем уравнения, связывающие скорость движения груза и угловые скорости колеса и цилиндра. $v=r_2\omega_2$; $R_2\omega_2=R_3\omega_3$ Тогда угловая скорость цилиндра определяется по формуле , а угловое ускорение – $\varepsilon_3=5{,}2$. Определим скорость и ускорение точки M. $v=R_3\omega_3=20\cdot(5{,}2\cdot 1+0{,}7)=118$, $a_\tau=R_3\varepsilon_3=20\cdot 5{,}2=104$, $a_n=R_3\omega_3^2=20\cdot 5{,}9^2=696{,}2$, $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{104^2+696{,}2^2}=703{,}9$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

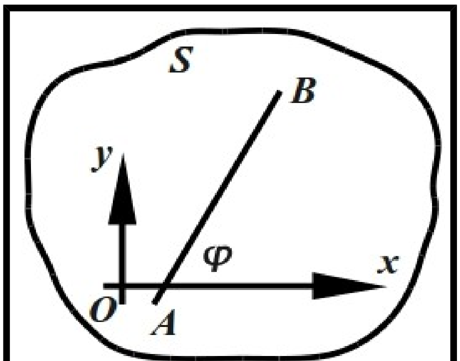
<table>
<tr><td colspan="2">1 (8.2.3). Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 секунд 100 оборотов. Найти угловое ускорение ротора. Ответ: 50,3 1/с^2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 (8.2.6). Тело вращается по закону $\varphi=t^3+2$. Определить угловые скорость и ускорение тела в момент времени, когда $\varphi=10$. Ответ: $\omega=12$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>3 (13.18). Колесо радиуса 0,1 м приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x=t^2$ м, где x – расстояние от гири до точки схода нити с поверхности колеса. Определить угловые скорость и ускорение, линейные скорость и ускорение точек обода колеса в момент времени $t=1$ с. Ответ: $\omega=20$ 1/с, $\varepsilon=20$ 1/с^2, $v=2$ м/с, $a=40{,}05$ м/с^2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 (8.3.7). Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=2t^2$. Определить скорость и ускорение точки колеса на расстоянии 0,2 м от оси вращения в момент времени $t=2$ с. Ответ: $v=1{,}6$ м/с, $a=12{,}825$ м/с^2.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td>5 (8.4.10). Какой должна быть частота обращения (об/мин) шестерни 1, чтобы скорость груза 3 была равна 0,9 м/с, если число зубцов $z_1=26$, $z_2=78$, а радиус $r_2=0,1$ м. Ответ: $n_1=258$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>6 (8.4.11). Угловая скорость первого колеса $\omega_1=2t^2$. Определить скорость и ускорение груза 3 в момент времени $t=2$ с, если радиусы шестерен $R_1=1$, $R_2=0,8$, $r_2=0,4$ м. Ответ: $v=4$ м/с, $a=4$ м/с^2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Маховик радиуса 0,5 м вращается так, что его угловая скорость меняется по закону $\omega=0,25e^{2t}$ 1/с. Для момента времени $t=0,5$ с после начала движения определить скорость и ускорение точки на ободе маховика. Установить, за какое время маховик сделает 100 полных оборотов. Ответ: $v=0,340$ м/с; $a=0,718$ м/с^2, $t=4,26$ с.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8 (14.3). Два колеса с радиусами $R_1=0,75$, $r_2=0,3$ м связаны ременной передачей. После пуска мотора угловое ускорение первого колеса равно $\varepsilon_1=0,4\pi$ 1/с^2. Определить, через какое время угловая скорость второго колеса будет равна $\omega_2=10\pi$ 1/с. Ответ: 10 с.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>9 (8.4.6). Редуктор состоит из конических и цилиндрических передач с числом зубцов $z_1=18$, $z_2=26$, $z_3=28$, $z_4=40$. Угловая скорость первой шестерни равна $\omega_1=20t$ 1/с. Определить угловую скорость и ускорение четвёртой шестерни. Ответ: $\omega_4=96,9$ 1/с.</td></tr>
</table>

3.2. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Опр. 1. Плоскопараллельным (плоским) называется движение тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Пусть дано тело и зафиксирована плоскость. Рассмотрим сечение $\boldsymbol{S}$ этого тела плоскостью $\boldsymbol{Oxy}$, параллельной фиксированной плоскости. Из определения следует, что для описания плоского движения тела достаточно найти законы движения сечение $\boldsymbol{S}$ этого тела в плоскости $\boldsymbol{Oxy}$. Определим в сечении $\boldsymbol{S}$ некоторый отрезок $\boldsymbol{AB}$, расположенный под углом φ к оси $\boldsymbol{Ox}$. Движение в плоскости $\boldsymbol{Oxy}$ сечения $\boldsymbol{S}$ эквивалентно движению в этой плоскости отрезка $\boldsymbol{AB}$. В свою очередь, движение отрезка $\boldsymbol{AB}$ определяет изменение координат точки $\boldsymbol{A}$, а также изменением угла поворота отрезка. Таким образом, получаем три уравнения плоского движения (рисунок 1):



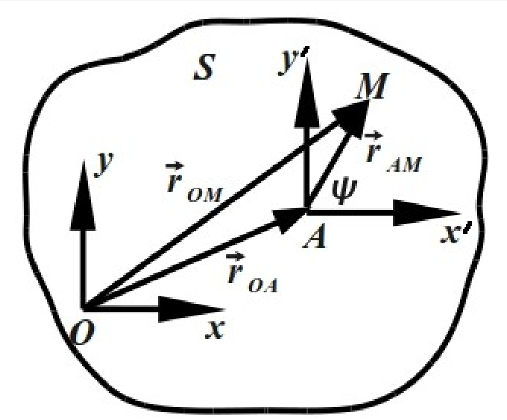
– Рисунок 1

(1) $$x_A=x(t);\ \ y_A=y(t);\ \ \varphi=\varphi(t)$$

Опр. 2. Точка A, выбранная для определения положения фигуры S, называется **полюсом**.

Замечание 1. Первые два уравнения из **(1)** определяют поступательное движение тела вместе с полюсом; третий закон определяет вращательное движение этого тела вокруг полюса. Таким образом, плоскопараллельное движение состоит из двух: поступательного и вращательного движения. Основные кинематические характеристики плоского движения – это скорость и ускорение поступательного движения $\vec{v}_{пост}=\vec{v}_A$, $\vec{a}_{пост}=\vec{a}_A$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через полюс.

Найдем формулы для скорости движения произвольной точки тела. Зададим две системы координат: Oxy и $Ax'y'$ (рисунок 2). Тогда положение точки M определяется равенством $\vec{r}_{OM}=\vec{r}_{OA}+\vec{r}_{AM}$, тогда вектор скорости $\vec{v}_M$ определится следующим образом:



– Рисунок 2

$$\text{(2)}\qquad \vec{v}_M=\frac{d\vec{r}_{OM}}{dt}=\frac{d\vec{r}_{OA}}{dt}+\frac{d\vec{r}_{AM}}{dt}=\vec{v}_{OA}+\vec{v}_{AM},$$

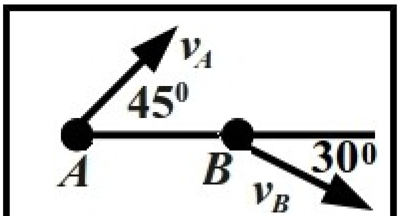
где $\vec{v}_{OA}$ – скорость поступательного движения полюса A; $\vec{v}_{AM}$ – скорость вращательного движения точки M вокруг полюса A.

Учитывая результаты предыдущего пункта, получим что $\vec{v}_{AM}=\vec{\omega}_{AM}\times\vec{r}_{AM}$ и $\vec{v}_{AM}\perp\vec{r}_{AM}$, а её числовое значение равно $v_{AM}=\omega_{AM}\cdot r_{AM}$.

Скорость точки тела при плоском движении можно определить с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

Пример 1. Дан отрезок AB. Известны величина и направление скорости точки A $v_A=3$ м/с, а также направление точки B (рисунок 3). Найти её величину.



– Рисунок 3

Решение. По **теореме 1** $v_A\cdot\cos 45^0=v_B\cdot\cos 30^0$, тогда $v_B=\dfrac{0{,}707\cdot v_A}{0{,}866}=2{,}449$ м/с.

Замечание 2. Теорема 1 не позволяет найти все кинематические характеристики движения отрезка AB, в частности его угловую скорость ω_{AB}. Поэтому определим новое кинематическое понятие.

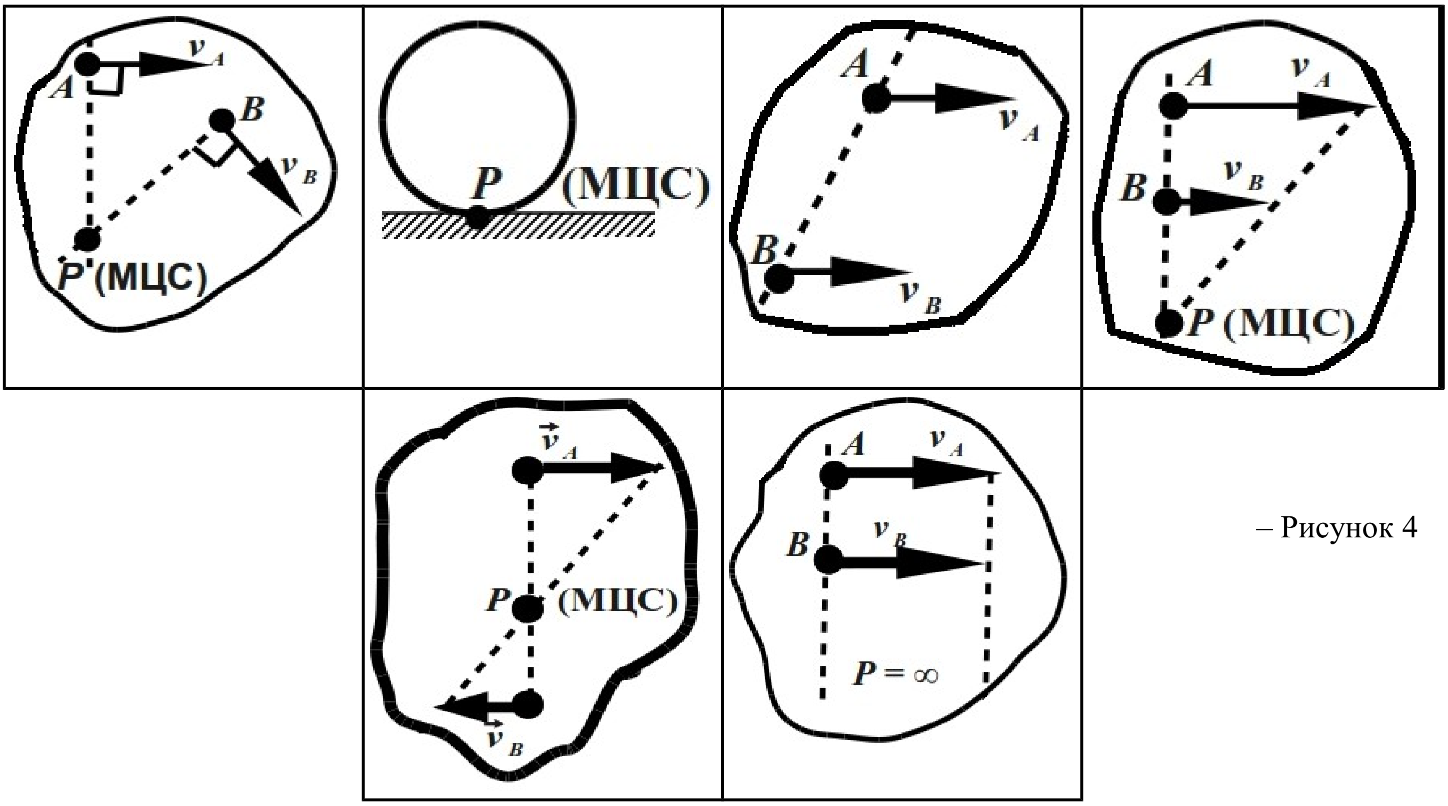
Опр 3. Мгновенный центр скоростей (МЦС) P плоской фигуры – это точка этой фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Замечание 3. МЦС – это точка плоскости, вокруг которой в данный момент времени вращается фигура. Тогда плоское вращательно-поступательное движение можно рассматривать как мгновенно-вращательное вокруг оси, проходящей через МЦС, откуда.

Рассмотрим способы определения положения МЦС (рисунок 4).

1) МЦС – точка пересечения перпендикуляров к скоростям точек A и B $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$.

2) Если тело катится без скольжения по некоторой неподвижной линии, то мгновенным центром скоростей является точка касания тела и линии.



– Рисунок 4

3) Если скорости точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ v_A, v_B параллельны друг другу и при этом линия $\boldsymbol{AB}$ не перпендикулярна v_A, то МЦС расположен в бесконечности и $v_A = v_B$, а $\omega = 0$.

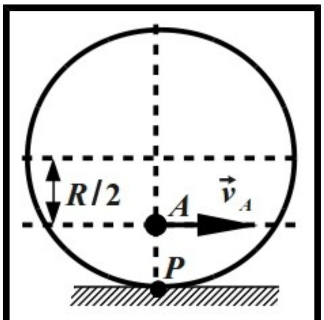
4) Если скорости точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ v_A, v_B параллельны друг другу и при этом линия $\boldsymbol{AB}$ перпендикулярна v_A, то МЦС – точка пересечения линии $\boldsymbol{AB}$ и прямой, которая соединяет конечные точки векторов v_A, v_B. Если же $v_A = v_B$, то МСЦ устремляется в бесконечность.

5) Если скорости точек $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ v_A, v_B параллельны друг другу и направлены в противоположные стороны, то МЦС расположен на пересечении линий, которые соединяют начальные и конечные точки векторов скоростей.

Замечание 4. Так как МЦС – это точка, вокруг которой вращается тело, то можно выбрать эту точку в качестве полюса вращения. Тогда по формуле (2) получим, что $\vec{v}_M = \vec{v}_{OP} + \vec{v}_{PM}$ и так как скорость $\vec{v}_P = \vec{v}_{OP} = 0$, то $\vec{v}_M = \vec{v}_{PM}$. Учитывая, что точка $\boldsymbol{M}$ вращается вокруг полюса $\boldsymbol{P}$, получим формулы:

(3) $$\vec{v}_M = \vec{v}_{PM} = \vec{\omega}_{PM} \times \vec{PM} \quad \text{и} \quad v_M = v_{PM} = \omega_{PM} \cdot PM.$$

Пример 2. Колесо радиуса $R = 0{,}2$ м катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Скорость точки $\boldsymbol{A}$ равна $v_A = 5$ м/с. Определить угловую скорость колеса (рисунок 5).

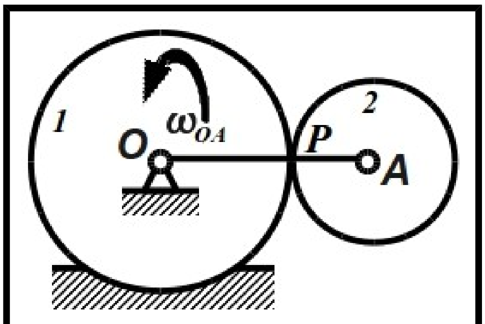


– Рисунок 5

Решение. Так как колесо катится без скольжения, то это второй случай и МЦС $\boldsymbol{P}$ расположен в точке касания колеса и поверхности. Тогда по формулам (3) после замены $\boldsymbol{M}$ на $\boldsymbol{A}$ получим $v_A = \omega_{AP} \cdot AP = \omega_K \cdot \dfrac{R}{2}$. Следовательно $\omega_K = \dfrac{2 \cdot v_A}{R} = \dfrac{10}{0{,}2} = 50$ 1/с.

Ответ: $\omega_K = 50$ 1/с.

Пример 3. Колесо 2 катится по неподвижному колесу 1. Механизм приводится в действие кривошипом OA с угловой скоростью $\omega_{OA}=20$ 1/с. Радиусы колес $R_1=0{,}3$, $R_2=0{,}1$ м. Найти угловую скорость второго колеса (рисунок 6).



– Рисунок 6

Решение. Так как колесо катится без скольжения, то это также второй случай и МЦС P расположен в точке касания подвижного и неподвижного колес. Тогда по формулам (3) после замены M на A получим $v_A=\omega_{AP}\cdot AP=\omega_2\cdot R_2$. Найдём величину скорости v_A:

$v_A=OA\cdot\omega_{OA}=(R_1+R_2)\cdot\omega_{OA}=0{,}4\cdot 20=8$ м/с. Следовательно $\omega_2=\dfrac{v_A}{R_2}=\dfrac{8}{0{,}1}=80$ 1/с.

Ответ: $\omega_2=80$ 1/с.

Найдем формулы для определения ускорения произвольной точки тела. Вычислим производную от формулы (2):

$$\vec{a}_M=\frac{d}{dt}(\vec{v}_A+\vec{v}_{AM})=\vec{a}_A+\vec{a}_{AM}, \tag{3}$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение поступательного движения полюса A; $\vec{a}_{AM}$ – ускорение вращательного движения точки M вокруг полюса A.

Отрезок AM вращается вокруг полюса A, поэтому его ускорение можно разложить на касательную и нормальную компоненты: $\vec{a}_{AM}=\vec{a}^{\tau}_{AM}+\vec{a}^{n}_{AM}$. При этом вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{AM}$ направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если замедленное; вектор нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{AM}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Если же и полюс A и точка M движутся не прямолинейно, то и их ускорения тоже можно представить как $\vec{a}_A=\vec{a}^{\tau}_A+\vec{a}^{n}_A$ и $\vec{a}_{AM}=\vec{a}^{\tau}_{AM}+\vec{a}^{n}_{AM}$. Дальнейшее решение осуществляется с помощью проектирования равенства (3) на оси координат Ox, Oy.

Опр. 4. Мгновенный центр ускорений (МЦУ) Q тела – это точка тела, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

МЦУ можно определить, если известны ускорение $\vec{a}_A$ какой-либо точки A, величины ε, ω тела, которому принадлежит точка A. **Алгоритм** поиска искомой точки Q следующий:

1. Определить угол μ из соотношения: $tg\,\mu=\varepsilon/\omega^2$.

2. Определить направление вектора ускорения $\vec{a}_A$. Повернуть этот вектор вокруг точки A на угол μ в сторону направления углового ускорения ε.

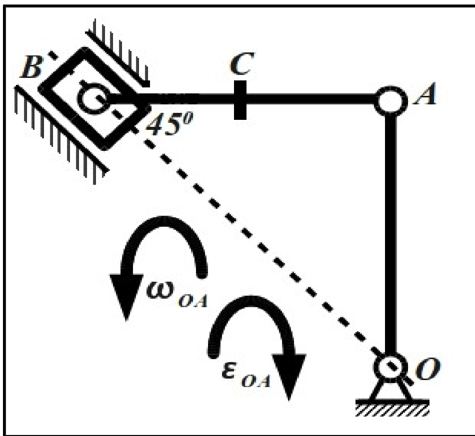
3. Вдоль полученного направления отложить отрезок AQ, равный $AQ=\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$.

Точка Q и будет мгновенным центром ускорений.

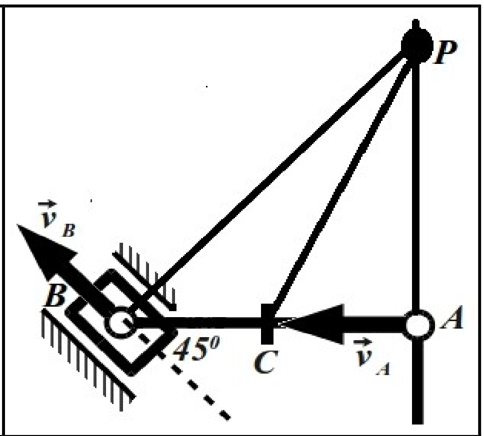
Замечание 5. Поиск точки мгновенного центра ускорений позволяет сделать проверку правильности вычислений кинематических характеристик плоского движения тела.

Пример 3. Дано: $OA = 40$, $AC = 20$ см, $\omega_{OA} = 5$ 1/с, $\varepsilon_{OA} = 10$ 1/с^2 (рисунок 7). Найти: скорости и ускорения точек ***A***, ***B*** и ***C***, угловую скорость, угловое ускорение звена ***AB***.

Решение. Модуль скорости пальца ***A*** кривошипа ***OA***, который совершает вращательное движение, определится из формулы: $v_A = R \cdot \omega = OA \cdot \omega_{OA} = 5 \cdot 40 = 200$ м/с. Направлен вектор скорости перпендикулярно кривошипу ***OA*** в направление угловой скорости. Скорость ползуна ***B*** будет направлена вдоль прямой ***OB***. Положение МЦС ***P*** определим по первому способу (рисунок 8). Используя формулы (3) запишем соотношения для скоростей точек ***A***, ***B*** и ***C:*** $v_A = AP \cdot \omega_{AB}$, $v_B = BP \cdot \omega_{AB}$, $v_C = CP \cdot \omega_{AB}$. Из первого соотношения найдём угловую скорость звена ***AB***: $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{200}{40} = 5$. Для второго и третьего соотношения надо найти ***BP*** и ***CP***. Из треугольника ***ABP*** следует, что $AP = AB = 40$, тогда для гипотенузы ***BP*** получим: $BP = \sqrt{40^2 + 40^2} = 56{,}569$, а для отрезка ***CP***: $CP = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44{,}721$. Тогда $v_B = BP \cdot \omega_{AB} = 282{,}845$, $v_C = CP \cdot \omega_{AB} = 223{,}605$ м/с.

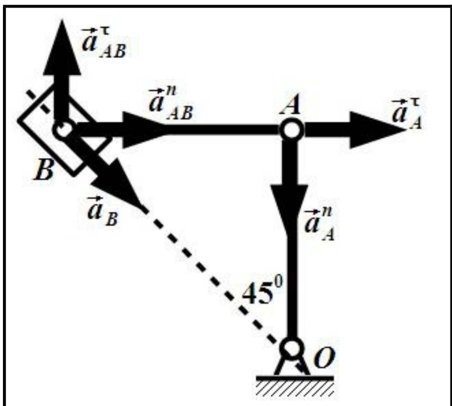


– Рисунок 7

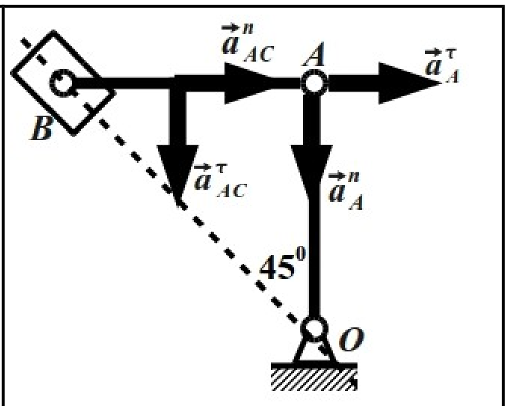


– Рисунок 8

Определим ускорение точки ***A*** на основании теории вращательного движения (рисунок 9). Получим, что $a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 40 = 400$, $a_A^n = OA \cdot \omega_{OA}^2 = 40 \cdot 25 = 1000$ м/с^2, тогда полное ускорение равно: $a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = 1077{,}033$. Определим ускорение точки ***B*** исходя из уравнения (3) с учетом дальнейших пояснений: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{AB}^{\tau} + \vec{a}_{AB}^n$. Введем систему координат и спроектируем записанное равенство на оси ***Ox*** и ***Oy***.



– Рисунок 9



– Рисунок 10

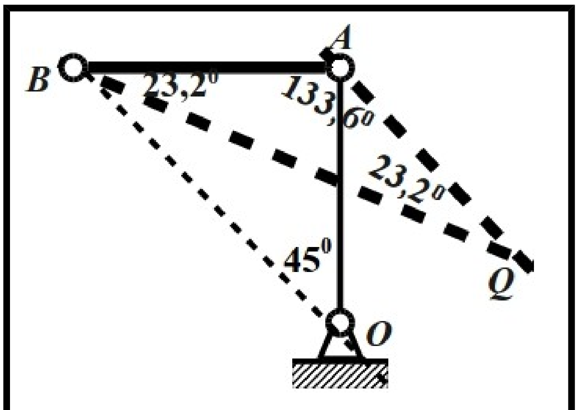
Получим следующую систему уравнений: $\begin{cases} 0{,}707\, a_B = a_A^\tau + a_{AB}^n \\ -0{,}707\, a_B = -a_A^n + a_{AB}^\tau \end{cases}$. Найдем недостающие компоненты: $a_{AB}^n = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 40 \cdot 25 = 1000$ и $a_{AB}^\tau = AB \cdot \varepsilon_{AB} = 40 \cdot \varepsilon_{AB}$. Тогда $a_B = \dfrac{1400}{0{,}707} = 1980{,}198$, $a_{AB}^\tau = 1000 - 1400 = -400$, то есть на самом деле касательное ускорение направлено не вверх, а вниз. Теперь можно найти угловое ускорение звена ***BC***: $\varepsilon_{AB} = \dfrac{a_{AB}^\tau}{AB} = \dfrac{-400}{40} = -10$. Следовательно, на самом деле вектор касательного ускорения $\vec{a}_{AB}^\tau$ будет направлен не вверх, а вниз, и угловое ускорение ε_{AB} будет направлено против часовой стрелки.

Найдем ускорение точки ***C***, лежащей на звене ***AB***: $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{AC} = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{AC}^\tau + \vec{a}_{AC}^n$ (рисунок 10). Составим систему уравнений в проекциях на оси ***Ox*** и ***Oy*** $\begin{cases} a_{Cx} = a_A^\tau + a_{AC}^n \\ a_{Cy} = -a_A^n - a_{AC}^\tau \end{cases}$.

Здесь $a_{AC}^\tau = AC \cdot (-\varepsilon_{AB}) = 20 \cdot 10 = 200$, $a_{AC}^n = AC \cdot \omega_{AB}^2 = 20 \cdot 25 = 500$ и следовательно, $a_{Cx} = 400 + 500 = 900$, $a_{Cy} = -1000 - 200 = -1200$. Тогда $a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 1500$ м/с^2.

Сделаем проверку, определив положение МЦУ по **опр. 4 и алгоритму**. Рассмотрим стержень ***OA***. Определим направление вектора ускорения $\vec{a}_A$, вычислив угол между искомым вектором и вертикальной осью ***OA***: $tg\,\alpha = \dfrac{a_A^\tau}{a_A^n} = \dfrac{400}{1000} = 0{,}4 \Rightarrow \alpha = 21{,}801^0$. Определим угол поворота вектора $\vec{a}_A$: $tg\,\mu = \dfrac{\varepsilon_{OA}}{\omega_{OA}^2} = \dfrac{10}{25} = 0{,}4 \Rightarrow \mu = 21{,}801^0$. Можно отметить, что углы α и μ совпадают. Повернём вектор ускорения $\vec{a}_A$ по направлению углового ускорения ε_{OA}, то есть по часовой стрелке; тогда повернутый вектор совпадёт с направлением стержня ***OA*** и значит где-то на этом отрезке расположена точка МЦУ. Найдём величину отрезка ***AQ***: $AQ = \dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_{OA}^2 + \omega_{OA}^4}} = \dfrac{1077{,}033}{\sqrt{10^2 + 5^4}} = 40 = OA$. Таким образом, вычисленное положение МЦУ ***Q*** совпадает с неподвижной точкой ***O***.

Рассмотрим стержень ***AB***. Направление векторов ускорений $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ известно. Определим угол поворота μ из соотношения: $tg\,\mu = \dfrac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \dfrac{10}{25} = 0{,}4 \Rightarrow \mu = 21{,}801^0$. Повернём векторы $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ против часовой стрелке по направлению углового ускорения ε_{AB}, продолжим повёрнутые векторы до их пересечения в некоторой точке: получился треугольник ***ABQ*** (рисунок 11). Найдём величины отрезков ***AQ***, ***BQ*** на основе кинематических характеристик:



– Рисунок 11

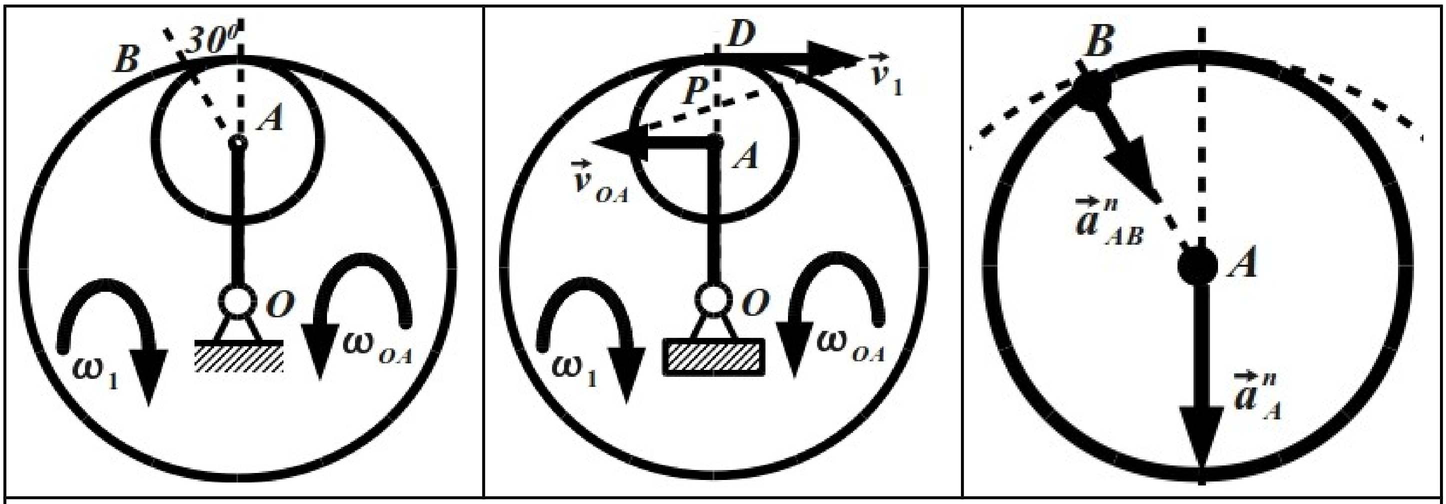
$AQ=\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2_{AB}+\omega^4_{AB}}}=\dfrac{1077{,}033}{\sqrt{10^2+5^4}}=40=AB$, что согласуется с равнобедренностью треугольника ABQ; $BQ=\dfrac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2_{AB}+\omega^4_{AB}}}=$

$=\dfrac{1980{,}198}{\sqrt{10^2+5^4}}=73{,}543$. Определим величину BQ из треугольника ABQ по теореме синусов:

$$\frac{\sin 23{,}2^0}{AB}=\frac{\sin 133{,}6^0}{BQ}\Rightarrow BQ=\frac{40\cdot\sin 133{,}6^0}{\sin 23{,}2^0}=73{,}531.$$

Можно отметить, что значения BQ, вычисленные двумя разными способами, совпали с точностью до десятых. Таким образом, все кинематические характеристики вычислены правильно.

Пример 3. Дано: $OA=20$ см, $r=15$ см, $\omega_{OA}=2$ 1/с, $\omega_1=1{,}2$ 1/с, $\varepsilon_{OA}=0$ 1/с^2.



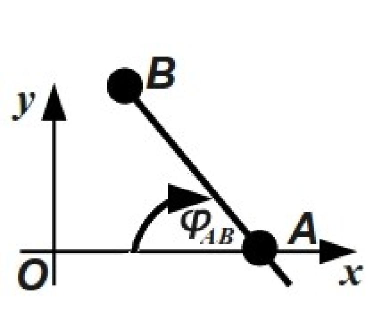
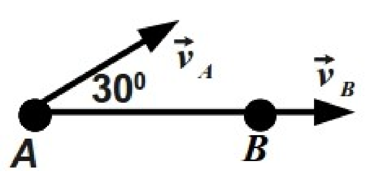
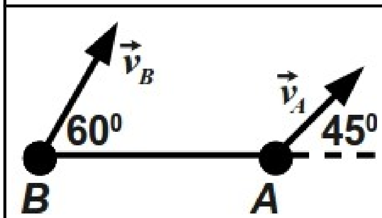
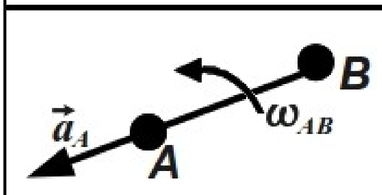
– Рисунок 12

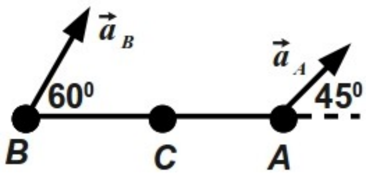
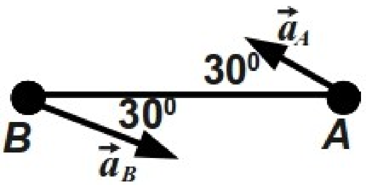
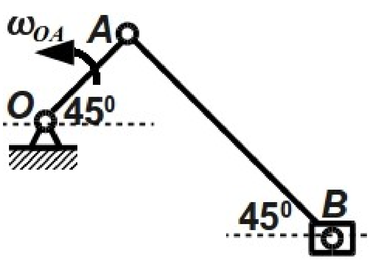
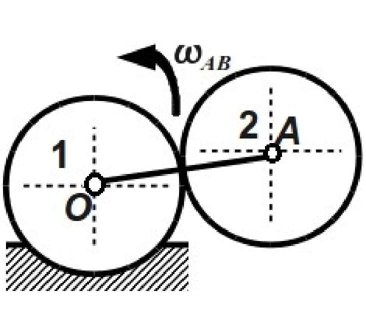
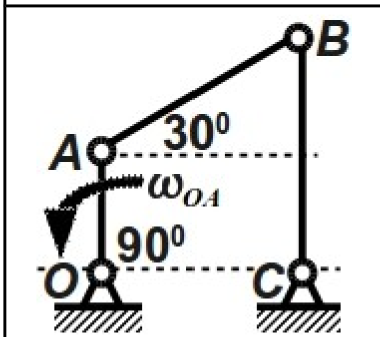
Решение. Найдём величину скорости точки A: $v_A=OA\cdot\omega_{OA}=20\cdot 2=40$; вектор скорости будет направлен в сторону углового вращения кривошипа OA. Найдём величину скорости точки D обода большого колеса: $v_D=OD\cdot\omega_1=(OA+r)\cdot\omega_1=35\cdot 1{,}2=42$ (рисунок 12). Векторы скоростей с общим перпендикуляром OD направлены в противоположные стороны, поэтому положение МЦС определится по пятому способу: точка P будет лежать на отрезке AD. Определим положение мгновенного центра скоростей P: $\begin{cases} v_A=\omega_2\cdot AP \\ v_D=\omega_2\cdot(r-AP)\end{cases}$. Тогда $AP=7{,}317$, $\omega_2=5{,}467$. Для вычисления скорости точки B необходимо определить расстояние BP по теореме косинусов: $BP=\sqrt{AP^2+AB^2-2\cdot AP\cdot AB\cdot\cos 30^0}=9{,}404$, тогда скорость точки B равна $v_B=\omega_2\cdot BP=51{,}412$.

Теперь перейдем к определению ускорений. Найдем нормальное и касательное ускорения точки A: $a^n_A=OA\cdot\omega^2_{OA}=20\cdot 4=80$, $a^\tau_A=OA\cdot\varepsilon_{OA}=20\cdot 0=0$. Таким образом, центр второго круга вращается равномерно, следовательно, и второй круг будет вращаться равномерно, касательные скорости всех точек круга будут равны нулю. Определим нормальную компоненту вектора ускорения отрезка AB: $a^n_{AB}=AB\cdot\omega^2_{II}=448{,}321$. Запишем векторное равенство для ускорения точки B: $\vec a_B=\vec a^n_A+\vec a^n_{AB}$. Введем систему координат Oxy стандартным образом, тогда $\begin{cases} a^X_B=a^n_{AB}\cdot\cos 60^0=0{,}5\cdot a^n_{AB}=224{,}161 \\ a^Y_B=-a^n_{AB}\cdot\sin 60^0-a^n_A=-0{,}866\cdot a^n_{AB}-a^n_A=-468{,}246 \end{cases}$, откуда полное ускорение равно: $a_B=\sqrt{(a^X_B)^2+(a^Y_B)^2}=519{,}136$.

Сделаем проверку, определив положение МЦУ. Определим направление ускорения точки B: $tg\,\alpha=\left|\dfrac{a^X_B}{a^Y_B}\right|=0{,}479\Rightarrow\alpha=25{,}582$, где α – угол к оси Oy. Так как угловое ускорение второго колеса равно нулю, то угол поворота векторов ускорений $\mu=0$. Вычислим расстояния до МЦУ: $AQ=\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2_2+\omega^4_2}}=\dfrac{80}{29{,}889}=2{,}677$, $BQ=\dfrac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2_2+\omega^4_2}}=\dfrac{519{,}136}{29{,}889}=17{,}369$; по теореме синусов из треугольника ABQ $\dfrac{\sin 4{,}418}{AQ}=\dfrac{\sin 25{,}582}{AB}\Rightarrow AQ=\dfrac{15\cdot 0{,}077}{0{,}432}=2{,}674$, $\dfrac{\sin 150}{BQ}=\dfrac{\sin 25{,}582}{AB}\Rightarrow BQ=\dfrac{15\cdot 0{,}5}{0{,}432}=17{,}361$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

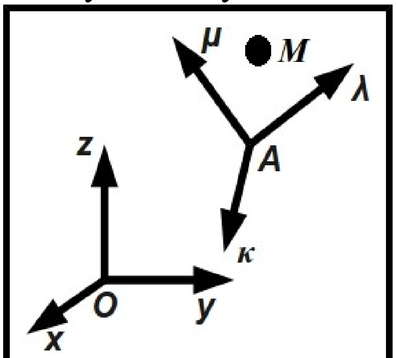
	**1 (9.1.3)**. Стержень AB диной 3 м движется согласно уравнениям $x_A=2+t^2$, $y_A=0$, $\varphi_{AB}=0{,}25\pi t$. Определить координаты и скорости точек A, B в момент времени $t=1$ с.
	2 (9.4.2). Стержень AB диной 2 м движется согласно уравнениям $x_A=4\cos(0{,}5\pi t)$, $y_A=0$, $\varphi_{AB}=0{,}5\pi t$. Определить координаты, величины и компоненты скоростей точек A, B в момент времени $t=0{,}5$ с.
	**3 (16.9)**. Стержень AB длины 2 м движется в плоскости рисунка, при этом скорость $v_A=180$ см/с. Определить скорость точки B двумя способами и угловую скорость стержня. **Ответ**: $v_B=156{,}880$ см/с, $\omega_{AB}=0{,}45$ 1/с.
	**4 (16.11)**. Стержень AB длины 0,5 м движется в плоскости рисунка, при этом скорость $v_A=2$ м/с. Найти скорость точки B двумя способами и угловую скорость отрезка AB. **Ответ**: $v_B=2{,}82$ м/с; $\omega_{AB}=2{,}06$ 1/с.
	**5 (9.7.2)**. Стержень AB длиной 2 м находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки B, если ускорение точки A $a_A=1$ м/с², угловая скорость стержня $\omega_{AB}=1$ 1/с, угловое ускорение $\varepsilon_{AB}=0$ 1/с². **Ответ**: $a_B=3$ м/с².

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>6 (18.39). Стержень AB длины 0,2 м находится в плоскопараллельном движении, при этом $a_A = 2$, $a_B = 4{,}42$ м/с^2. Найти угловую скорость, угловое ускорение, ускорение его середины. Ответ: $\omega_{AB} = 2$ 1/с, $\varepsilon_{AB} = 12{,}05$ 1/с^2, $a_C = 3{,}18$ м/с^2.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>7 (9.7.11). Стержень AB длиной 0,4 м движется в плоскости рисунка, при этом $a_A = 2$, $a_B = 6$ м/с^2. Определить угловую скорость и угловое ускорение отрезка AB. Ответ: $\varepsilon_{AB} = 10$ 1/с^2.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>8 (18.11). Кривошип OA длины 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ 1/с и приводит в движение шатун AB длины 1 м. Найти угловые скорость и ускорение шатуна AB, ускорение ползуна B. Сделать проверку с помощью мгновенного центра ускорений. Ответ: $\omega_{AB} = 2$ 1/с, $\varepsilon_{AB} = 16$ 1/с^2, $a_B = 5{,}656$ м/с^2.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>9 (18.28). Шестерёнка радиуса 0,12 м приводится в движение кривошипом OA, который вращается вокруг оси O неподвижной шестерёнки с тем же радиусом. При этом $\omega_{OA} = 2$ 1/с, $\varepsilon_{OA} = 8$ 1/с^2. Определить ускорение мгновенного центра скоростей и диаметрально противоположной точки второй шестерёнки. Сделать проверку с помощью мгновенного центра ускорений. Ответ: $a_P = 0{,}96$, $a_M = 4{,}8$ м/с^2.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>10 (18.13). Стержень OA шарнирного четырёхзвенника OABC вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 6$ 1/с. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, ускорение шарнира B, если $AB = 2\,OA = 0{,}8$ м. Сделать проверку с помощью мгновенного центра ускорений. Ответ: $\omega_{AB} = 0$ 1/с, $\varepsilon_{AB} = 10{,}392$ 1/с^2, $a_B = 8{,}314$ м/с^2.</td>
</tr>
</table>

4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Опр. 1. Движение точки является сложным, если точка участвует в двух и более движениях.

Пример 1. Перемещение лодки по реке, которая течёт вдоль берега; перемещение человека в поезде, который движется относительно рельс; движение человека по эскалатору, который движется относительно магазина; любое движение на земном шаре, который вращается вокруг своей оси и при этом движется вокруг Солнца.



– Рисунок 1

Рассмотрим две системы координат: $A\kappa\lambda\mu$ и ***Oxyz*** и точку ***M***. Будем считать, что система координат ***Oxyz*** неподвижна, и относительно неё движется другая система координат $A\kappa\lambda\mu$, относительно которой в свою очередь, движется точка ***M***.

Опр. 2. Движение точки M по отношению к подвижной системе координат $A\kappa\lambda\mu$ называется **относительным движением** с относительными кинематическими характеристиками: $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$.

Опр. 3. Движение подвижной системы координат $A\kappa\lambda\mu$ по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$ называется **переносным движением** с переносными кинематическими характеристиками: $\vec{v}_e$, $\vec{a}_e$.

Опр. 4. Движение точки M относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ называется **абсолютным движением** с абсолютными кинематическими характеристиками: $\vec{v}_a$, $\vec{a}_a$.

Теорема 1 (о сложении скоростей) Абсолютная скорость движения точки равна геометрической сумме относительной и переносной скорости:

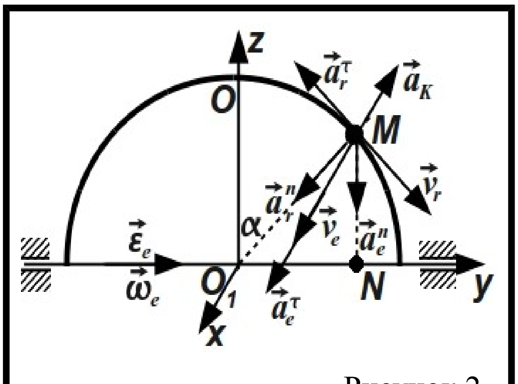
(1) $$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e.$$

Теорема 2 (о сложении ускорений). Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений, а также ускорения Кориолиса:

(2) $$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_K,$$

где ускорение Кориолиса определяется по формуле $\vec{a}_K=2\cdot\left(\vec{\omega}_e\times\vec{v}_r\right)$, $a_K=2\cdot\omega_e\cdot v_r\cdot\sin\varphi$.

Замечание 1. Ускорение Кориолиса возникает в том случае, когда подвижная система координат совершает вращательное движение вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω_e. Ускорение Кориолиса равно нулю в трёх случаях, которые следуют из определения векторного произведения: 1) в случае поступательного переносного движения, 2) в случае относительного покоя точки, 3) в случае, когда относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения.



– Рисунок 2

Пример 2. Дано $R=20$ см, $\omega_e=5$ 1/с, $\varepsilon_e=2$ 1/с^2, $s_r=OM=10\pi\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$ см, $t=1$ с. Определить абсолютные скорость и ускорение в момент времени t.

Решение. Найдем длину пути, который прошла точка M за время t вдоль дуги OM: $s_r(1)=OM(1)=10\pi\sin 30^0=5\pi$ см.

Найдём абсолютную скорость: $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$. Относительная скорость точки M $v_r=s_r^/=\dfrac{5\pi^2}{3}\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$, а в момент времени t $v_r(1)=14{,}245$ см/с. Так как скорость положительная, то её вектор направлен по касательной в строну возрастания дуговой координаты. Переносная скорость определяется из теории вращательного движения: $v_e=\omega_e\cdot MN$. Отрезок MN найдём из прямоугольного треугольника O_1MN: $MN=R\cdot\sin\beta$, где угол $\beta=90^0-\alpha$. Тогда $\alpha=\dfrac{OM}{R}=\dfrac{5\pi}{20}=\dfrac{\pi}{4}=45^0$, $\beta=90^0-\alpha=45^0$, откуда $MN=20\cdot\sin 45^0=14{,}142$, следовательно $v_e=\omega_e\cdot MN=5\cdot 14{,}142=70{,}71$ см/с. Вектор переносной скорости направлен перпендикулярно плоскости листа по направлению угловой скорости ω_e. Тогда $v_a=\sqrt{v_e^2+v_r^2}=72{,}131$ см/с.

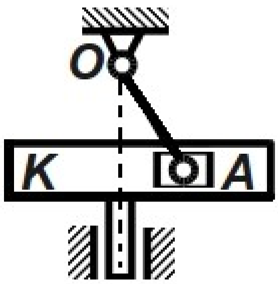
Найдём абсолютное ускорение $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K$. Точка M движется по кривой OB, поэтому относительное ускорение состоит из двух компонент: касательной и нормальной. Величина касательной компоненты определяется по формуле $a_r^{\tau} = v_r^{/} = -\dfrac{5\pi^3}{18}\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$, а в момент времени t равна $a_r^{\tau} = -4{,}306$ см/с^2. Так как величина касательной компоненты отрицательная, то её вектор направлен по касательной к дуге OB в противоположную сторону от вектора $\vec{v}_r$. Величина нормальной компоненты определяется по формуле $a_r^n = \dfrac{v_r^2}{R} = 10{,}146$ см/с^2; вектор нормальной компоненты направлен вдоль радиуса от точки M к центру окружности. Так как дуга OB совершает вращательное движение вокруг оси AB, то переносное ускорение также состоит из двух компонент, которые определятся из теории вращательного движения: $a_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot MN = 2\cdot 14{,}142 = 28{,}284$ $\quad a_e^n = \omega_e^2 \cdot MN = 25\cdot MN = 353{,}55$ см/с^2. Вектор касательного ускорения направлен от точки M к точке N; вектор нормального ускорения сонаправлен с вектором переносной скорости. Вектор ускорения Кориолиса направлен перпендикулярно плоскости рисунка, в которой лежат вектора $\vec{v}_r$, $\vec{\omega}_e$ так, что поворот вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору $\vec{v}_r$ происходит против часовой стрелки. Величина ускорения Кориолиса определяется по формуле $a_K = 2\cdot\omega_e\cdot v_r\cdot\sin\varphi = 2\cdot 5\cdot 14{,}245\cdot 0{,}707 = 100{,}712$ см/с^2.

Для определения абсолютного ускорения зададим систему координат $Oxyz$ стандартным способом и спроектируем обе части векторного равенства из теоремы 2. Получим, что $a_a^y = -a_r^{\tau}\cdot\cos 45^0 - a_r^n\cdot\cos 45^0 = -4{,}129$, $a_a^y = a_r^{\tau}\cdot\cos 45^0 - a_r^n\cdot\cos 45^0 - a_e^n = -363{,}768$, $a_a^x = a_e^{\tau} - a_K = -72{,}428$ и $a = \sqrt{(a_a^x)^2 + (a_a^y)^2 + (a_a^z)^2} = 370{,}931$ см/с^2.

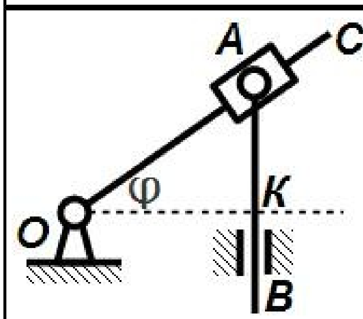
Ответ: $v_a = 72{,}131$ см/с, $a = 370{,}931$ см/с^2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1 (22.11). Корабль плывёт на юг со скоростью $36\sqrt{2}$ км/ч. Второй корабль идёт курсом на юго-восток со скоростью **36** км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля относительно первого корабля. **Ответ**: $v_r = 36$ км/ч.

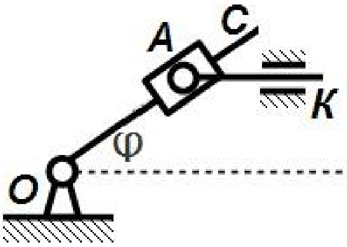
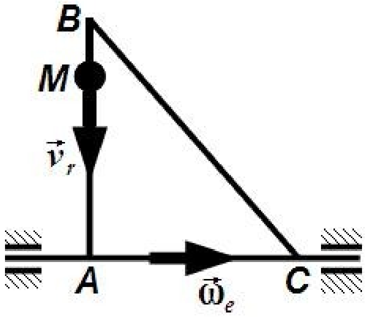
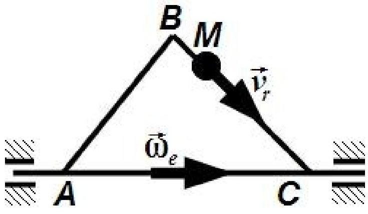


2 (22.25). В кривошипно-кулисном механизме кривошип OA длины **0,2** м вращается с постоянной угловой скоростью 3π 1/с. Определить линейную скорость кривошипа OA, скорости кулисы K и ползуна A, если угол между OA и вертикалью – 30^0. **Ответ**: $v_K = 0{,}942$, $v_{OA} = 1{,}884$, $v_A = 1{,}632$ м/с.



3 (22.17). В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O, ползун A приводит в движение стержень AB. Определить скорость кривошипа OA, ползуна A, стержня AB, если $\omega_{OC} = 2$ 1/с, $\varphi_{OA} = 60^0$, $OK = 0{,}5$ м. **Ответ**: $v_A = 3{,}464$ м.

4 (11.2.25). Стержень AB кулисного механизма движется вверх со скоростью $v_{AB} = 1$ м/с. Для указанного положения механизма

	определить ω_{OC}, v_A, v_{OA}, если $OK=0{,}4$ и $\varphi_{OA}=60^0$. **Ответ**: $\omega_{OC}=1{,}25$ 1/с.
	**5 (11.2.24)**. Стержень ***AK*** кулисного механизма движется вправо со скоростью $v_{AK}=1$ м/с. Для указанного положения механизма определить ω_{OC}, v_A, v_{OA}, если расстояние $OA=1$ м, $\varphi_{OA}=45^0$ **Ответ**: $\omega_{OC}=0{,}707$ 1/с.
	**6**. По стороне треугольника, который вращается вокруг стороны АВ с угловой скоростью $\omega_e=8t$ 1/с, движется точка М с относительной скоростью $v_r=3t^2$ м/с. Определить модуль и направление ускорения Кориолиса, величину относительного и переносного ускорений в момент времени $t=2$ с, если $AM=0{,}5$ м. **Ответ**: $a_r=12$, $a_e=128{,}062$, $a_K=384$ м/с^2.
	**7 (11.5.7)** По стороне треугольника, который вращается вокруг стороны ***AC*** с угловой скоростью $\omega_e=2t$ 1/с, движется точка ***M*** с относительной скоростью $v_r=2\sin 4t$ м/с. Определить относительное, переносное, кориолисово ускорения точки ***M*** в момент времени $t=\pi/8$ с, если $MC=0{,}4$ м, $\measuredangle BCA=45^0$. **Ответ**: $a_r=0$, $a_e=0{,}352$, $a_K=2{,}221$ м/с^2.

КИНЕТИКА

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Перечислим основные законы механики, сформулированные Галилеем и Ньютоном.

Закон 1 (инерции). Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит этого движения.

Опр. 1. Инертность – это свойство материальной точки сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. **Мерой инертности** является масса [кг].

Опр. 2. Движение характеризуется векторной величиной ***Q***, которая называется **количеством движения** и определяется равенством:

(1) $$\vec{Q}=m\cdot\vec{v},$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости точки, ***m*** – масса точки; **единица измерения** количества движения: $[Q]=кг\cdot м/c=H\cdot c$.

Опр. 3. Криволинейное движение точки ***M*** массой ***m*** по окружности с центром ***O***, который расположен на перпендикулярной оси ***γ***, характеризуется векторной величиной

– **моментом количества движения (кинетический моментом)** относительно оси плоскости окружности, и определяется по формуле:

(2) $$\vec{L}_\gamma = \vec{r} \times \vec{m \cdot v} = \vec{r} \times \vec{Q},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M, проведённый из некоторого центра O.

Длина этого вектора равна $L_\gamma = r \cdot (m \cdot v) \cdot \sin 90^0 = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = \omega \cdot m \cdot r^2 = \omega \cdot I_\gamma$.

Опр. 4. Мерой инертности при криволинейном движении по окружности с центром O точки M с массой m является **момент инерции** относительно оси γ, который определяется по формуле:

(3) $$I_\gamma = m \cdot r^2.$$

Закон 2. Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил:

(4) $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_k \vec{F}_k = \vec{F},$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил.

Производная по времени от момента количества движения, взятого относительно оси γ, равна моменту равнодействующей всех сил, которые действуют на точку, относительно той же оси:

(5) $$\frac{d\vec{L}_\gamma}{dt} = \vec{M}_\gamma(\vec{F}).$$

Замечание 1. Из кинематики известно, что скорость точки $\vec{v}$ равна производной по времени от радиус-вектора $\vec{r}$; тогда формулу (2) можно переписать в виде:

(6) $$m\frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{F}.$$

Так же из кинематики известно, что ускорение $\vec{a}$ равно производной по времени от скорости точки $\vec{v}$, и тогда формулу (2) можно переписать в виде:

(7) $$m \cdot \vec{a} = \vec{F};\ m \cdot a = F.$$

Закон 3. Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Найдя проекции уравнения (3) на оси координат, получим систему дифференциальных уравнений вида:

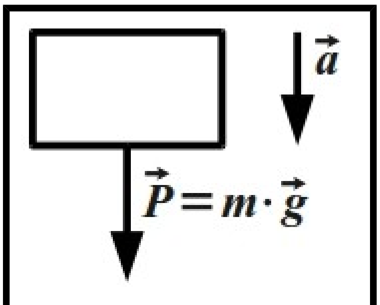
(8) $$\begin{cases} m \cdot x^{//} = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \\ m \cdot y^{//} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \\ m \cdot z^{//} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \end{cases}.$$

На основе уравнений (8) формулируются **две основные задачи динамики:** 1) на основе уравнений движения точки $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ определить силу, которая действует на точку; 2) зная совокупность сил, которые действуют на точку, определить уравнения движения точки.

Пример 1. Уравнения движения точки массой m имеет вид: $x = t + 1$, $y = t^2 + 4\mathrm{t} - 1$. Найти направление и величину равнодействующей силы. $x^/ = 1$, $x^{//} = 0$, $y^/ = 2t + 4$, $y^{//} = 2$. Траекторией точки является парабола с уравнением $y = (x - 2)^2 - 8$, при этом, так как $t\geq 0$, то движение начинается из точки $M_0(1;-1)$. Величина ускорения $a=2$. Сила направлена вдоль ускорения и равна $F=2m$.

Пример 2. Найти уравнение движения тела под действием силы тяжести без учета силы сопротивления воздуха. Начальные условия: $s(0)=s_0$, $v(0)=v_0$.

Решение. На тело действует сила тяжести $\vec{G}=m\cdot\vec{g}$, направленная вниз. Направим вертикальную ось координат вниз. Тогда получим уравнение $m\cdot v'=m\cdot g\Rightarrow v'=g$. Интегрируем полученное уравнение: $v=\int g\,dt=g\cdot t+C_1$. При $t=0$ получим, что $C_1=v_0$. Учитывая, что $s'=v$, и интегрируя второй раз, получим $s=\int(g\cdot t+v_0)\,dt=g\cdot\frac{t^2}{2}v_0\cdot t+C_2$ При $t=0$ получим, что $C_2=s_0$. Таким образом, получим известное уравнение движение падающего тела в вакууме $s=\frac{g\cdot t^2}{2}+v_0\cdot t+s_0$.



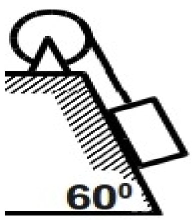
– Рисунок 1.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1 (26.1). В шахте опускается равноускоренно лифт массой 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт. **Ответ**: 2548 Н.

2 (26.2). Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой 1,02 кг, опускается вертикально вниз с ускорением $a=4$ м/с^2. Найти силу давления груза на платформу во время совместного спуска. Рассмотреть случаи движения с ускорением $a=g$, $a\geq g$. **Ответ**: 5,92 Н.

3 (26.19). Гружёная вагонетка массой 700 кг спускается по канатной железной дороге с уклоном 15^0, имея скорость $v=1{,}6$ м/с. Определить натяжение каната при равномерном спуске и при торможении вагонетки, если коэффициент трения скольжения $f=0{,}015$, а время торможения 4 с. **Ответ**: $T_1=1676$, $T_2=1956$ Н.



4 (26.26). Груз массой 600 кг посредством ворота поднимается по наклонной поверхности. Коэффициент трения $f=0{,}2$. Колесо лебёдки радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi=0{,}4t^3$. Найти натяжение троса через 2 с после начала движения. **Ответ**: $T=6{,}256$ Н.

5 (27.1). Камень падает в колодец без начальной скорости. Звук от удара камня о дно услышали через 6,5 с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты. **Ответ**: 175 м.

6 (27.2). Тяжёлое тело спускается по гладкой поверхности под углом 30^0 к горизонту. Найти, за какое время тело пройдёт путь 9,6 м, если в начальный момент его скорость равняется 2 м/с. **Ответ**: 1,61 с.

7 (13.2.12). Тело массой 200 кг из состояния покоя движется вверх по гладкой наклонной поверхности под действием силы $F=1000$ Н. Определить время, за которое тело переместится на 8 метров. **Ответ**: $t=4{,}33$.

8 (13.2.13). Точка массой 900 кг движется по горизонтали под действием силы $F=270\,t$ которая наплавлена по той же прямой. Определить скорость точки через 10 с после начала движения, если в начальный момент скорость была $v_0=10$ м/с. **Ответ**: 25 м/с.
9 (13.2.14). Точка массой 25 кг движется по горизонтали под действием силы $F=20\,t$, которая наплавлена по той же прямой. Определить путь, который прошла точка за 4 с. **Ответ**: 8,53 м.
10 (13.2.19). Тело массой 1 кг падает по вертикали вниз, сила сопротивления $R=0{,}03\cdot v$. Определить максимальную скорость падения тела. **Ответ**: $v_{max}=327$ м/с.

2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Динамическое воздействие силы $\vec{F}$ на точку характеризуется двумя мерами: временной – импульсом и пространственной – работой.

Опр. 1. Элементарный импульс $d\vec{p}$ силы $\vec{F}$ за бесконечно малый промежуток времени dt определяется по формуле

(1) $$d\vec{p}=\vec{F}\cdot dt\,,$$

а полный импульс $\vec{p}$ за промежуток времени от t_1 до t_2 – по формуле

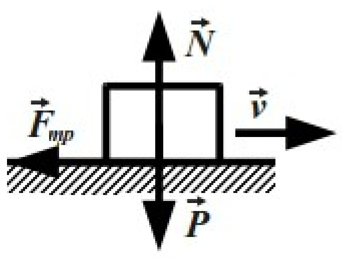
(2) $$\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt\,.$$

Единица измерения импульса: $[p]=H\cdot c=кг\cdot м/c$.

Теорема 1 (об изменении количества движения точки). Изменение количества движения точки $\vec{Q}$ за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов $\vec{p}_k$ всех сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени.

(3) $$m\cdot\vec{v}_2-m\cdot\vec{v}_1=\sum_k p_k=p\,.$$

Пример 1. Поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развилась сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равнялась 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.



– Рисунок 1

Решение. На поезд действуют три силы: сила тяжести $\vec{G}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{TP}$. Так как поезд двигается по горизонтальному и прямолинейному участку пути, то силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ уравновешиваются. Остается одна сила трения, которая определяется по следующей формуле: $F_{TP}=-0{,}1\cdot m\,g$. Её импульс определяется по формуле: $p_{TP}=\int_{t_0}^{t_1}-0{,}1\,m\,g\,dt=-0{,}1\,m\,g\,(t_1-t_0)$. Пусть $t_0=0$, $t_1=t$, тогда $p_{TP}=-0{,}1\,m\,g\,t$. Определим разность количеств движения на временном промежутке $t_0=0$, $t_1=t$ из формулы (3): $m\cdot x'(t)-m\cdot x'(0)=m\cdot x'(t)-20\,m$. Тогда по формуле (3) получим следующее: $x'(t)-20=-0{,}1\,g\,t$ или $x'(t)=v(t)=20-0{,}1\,g\,t$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решая его получим: $x(t)=20\,t-0{,}05\,g\,t^2+C$; так как начало торможения совпадает с началом отсчёта координаты $\boldsymbol{x}$, то

$x(0)=20\cdot 0-0{,}05\,g\cdot 0^2+C=0\Rightarrow C=0$ и тогда уравнение движения имеет вид: $x(t)=20t-0{,}05\,g\,t^2$. Определим время торможения из условия, что $v(t_{ост})=0$. Тогда $t_{ост}=\dfrac{20}{0{,}1\cdot g}\approx 20{,}39$. тормозной путь определяется по формуле: $x(t_{ост})=20\,t_{ост}-0{,}05\,g\,t_{ост}^2\approx 203{,}87$.

Ответ: $t_{ост}=20{,}39$ с, $s_{ост}=203{,}87$ м.

Опр. 2. **Элементарная работа** силы $\vec{F}$ при перемещении точки M на бесконечно малое расстояние dS определяется по формуле

(4) $$dA=\vec{F}\cdot d\vec{S}=F_x\cdot dx+F_y\cdot dy+F_z\cdot dz\,,$$

а полная работа на произвольном перемещении от точки M_0 до точки M_1 – по формуле

(5) $$A=\int\limits_{M_0}^{M_1} dA=\int\limits_{M_0}^{M_1}(F_x\cdot dx+F_y\cdot dy+F_z\cdot dz)\,.$$

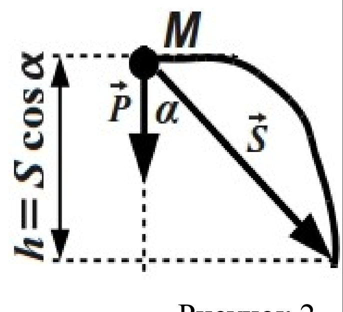
Единица измерения работы: $[A]=Н\cdot м=Дж$.

Приведем формулы расчета работы некоторых основных сил.

Работа **силы тяжести** $\vec{G}=m\cdot\vec{g}$ (рисунок 2) определяется по формуле:

(6) $$A_G=\pm G\cdot h=G\cdot(z_0-z_1)\,,$$

где G – сила тяжести, z_0, z_1 – вертикальная координата начального и конечного положения точки, h – длина перемещения точки по вертикали.



– Рисунок 2

Работа **силы упругости** $\vec{F}=-c\cdot\vec{s}$, $F_x=-c\cdot x$, $F_y=F_z=0$ где c – жесткость пружины, $\vec{s}$ – вектор деформации, определяется по формуле

(7) $$A_F=-c\int\limits_{x_0}^{x_1} x\,dx=\frac{1}{2}\cdot c\cdot(x_0^2-x_1^2)\,,$$

где x_0, x_1 – начальное и конечное растяжение (сжатие) пружины.

Работа силы трения $F_{тр}$ определяется по формуле:

(8) $$A_F=-F_{тр}\cdot S\,,$$

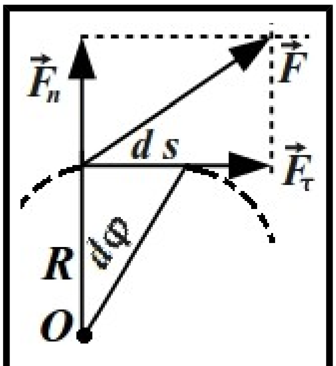
где S – длина отрезка перемещения точки.

В случае, когда под действием силы $\vec{F}$ точка перемещается по окружности радиуса R с центром в точке O на бесконечно малый угол $d\varphi$ (рисунок 5), элементарная работа силы $\vec{F}$ определяется по формуле

(9) $$d\,A=\pm F_\tau\cdot dS=\pm F_\tau\cdot R\cdot d\varphi=M_O(\vec{F})\cdot d\varphi\,,$$

а на конечном угле перемещения φ полная работа силы – по формуле

(10) $$A=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_O(\vec{F})\,d\varphi\,,$$



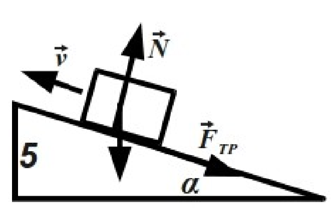
– Рисунок 3

откуда можно получить формулу для постоянного момента силы или пары сил

(11) $$A=M_O(\vec{F})\cdot(\varphi_1-\varphi_0)\,.$$

Замечание 2. Знак величины A зависит от соотношения между знаками момента M_O и разности углов поворота $\varphi_1 - \varphi_0$: если сила вращает по часовой стрелке, то $M_O < 0$, а если против часовой стрелки, то $M_O > 0$; если вращение производится по часовой стрелки относительно точки O, то угол $\varphi_1 - \varphi_0 < 0$, если вращение производится против часовой стрелке относительно точки O, то угол $\varphi_1 - \varphi_0 > 0$.

Пример 2. Определить работу, которую надо затратить, чтобы поднять на 5 м тело массы 20 кг, двигая его по наклонной плоскости под углом в 30^0. Коэффициент трения 0,5. Сравнить с работой по вертикальному подъему тела на ту же высоту (рисунок 6).



– Рисунок 4

Решение. Рассмотрим наклонный случай. На тело действуют три силы: сила тяжести $G = mg \approx 200$ Н; сила реакции опоры N; сила трения $F_{TP} = f \cdot N = 0{,}5\, mg \cos\alpha = 86{,}6$ Н. Для того, чтобы тело начало перемещаться, надо приложить силу, которая равна по модулю равнодействующей всех трёх заданных сил и направлена в противоположную сторону. При этом, работы требуемой силы и равнодействующей будут равны по модулю. Вычислим работы всех заданных сил. Так как сила реакции опоры перпендикулярна перемещению, то по формуле (4) её работа равна нулю. Таким образом остались работы двух сил: $A_{TP} = \dfrac{5 \cdot F_{TP}}{\sin\alpha} = 10 \cdot 86{,}6 = -866$ Дж, $A_G = G \cdot h = -1000$ Дж. Тогда общая работа требуемой силы равна 1866 Дж.

Если же тело поднимать вертикально вверх, то на него действует только сила тяжести и тогда работу надо совершить меньшую: $A_G = G \cdot h = -1000$ Дж.

Опр. 3. Кинетическая энергия точки – это скалярная величина, которая определяется при поступательном движении по формуле:

(12) $$E = \frac{m \cdot v^2}{2};$$

при криволинейном движении по окружности по формуле:

(13) $$E = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{2} = \frac{\omega^2 \cdot I_O}{2}.$$

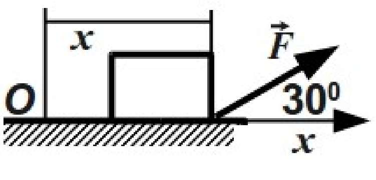
Теорема 3. Изменение кинетической энергии точки при некотором её перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на точку на том же перемещении:

(14) $$E_{II} - E_I = \sum_k A_k.$$

Пример 3. Определить силу, которую надо приложить к телу из **примера 2**, чтобы скорость движения тела увеличилась с 3 до 6 км/ч.

Решение. Обозначим искомую силу как T. Левая часть равенства (13) равна $20 \cdot 0{,}5 \cdot (6^2 - 3^2) = 270$. Определим сумму всех работ: $\sum_k A_k = A(\vec{F}_{TP}) + A(\vec{F}_G) + A(\vec{T}) =$ $= -866 - 1000 + T \cdot S = 10\,T - 1866$. Тогда получим, что $T = 213{,}6$ Н.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

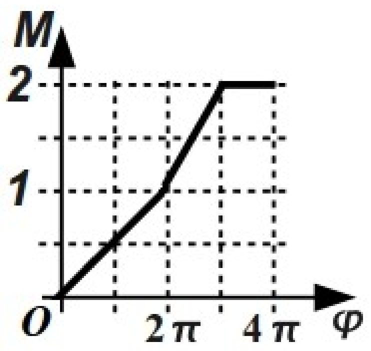


1 (15.1.2). На тело действует постоянная по направлению сила $F=4x^3$. Определить работу силы при перемещении тела на 1 м, если угол между силой и перемещением постоянный и равен 30^0. **Ответ**: $A_F=0{,}866$ Дж.

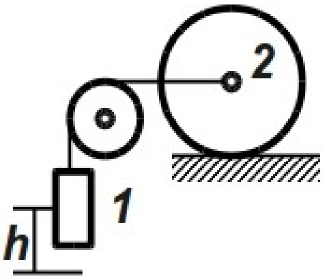
2 (15.1.1). Ненагруженную пружину, коэффициент жёсткости которой равен $c=100$ Н/м растянули на **0,02** м. Определить работу силы упругости пружины. **Ответ**: $A_y=-0{,}02$ Дж.

3. Пружину с жесткостью $c=150$ Н/м сжали до длины **0,06** м и отпустили. Работа, совершенная силой упругости при восстановлении пружины, равна $A_y=0{,}27$ Дж. Определить длину восстановленной пружины. **Ответ**: $l=0{,}12$ м.

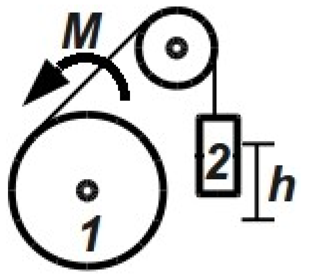
4. Пружину с жесткостью $c=140$ Н/м сжали до длины **0,1** м и отпустили. Определить работу силы упругости при восстановлении пружины, если длина недеформированной пружины равна **0,2** м. **Ответ**: $A=0{,}7$ Дж.



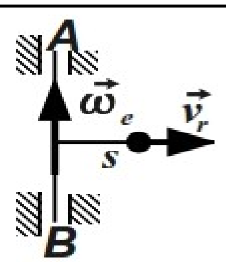
5 (15.1.12). На вал машины действует пара сил, закон изменения момента которой от угла поворота изображён на графике. Определить работу пары сил за первых два оборота. **Ответ**: 14,1 Дж.



6 (15.1.15). Груз массой $m_1=2$ кг приводит в движение каток массой $m_2=1$ кг. Коэффициент трения качения $\delta=0{,}01$ м. Определить работу внешних сил при движении груза вниз на высоту $h=1$ м, если радиус катка $R=0{,}1$ м. **Ответ**: $A=18{,}6$ Дж.



7 (15.1.16). На барабан 1 радиуса $r=0{,}1$ м действует пара сил с моментом $M=40+\varphi^2$ Нм. Определить работу пары сил и силы тяжести груза 2 массой $m_2=40$ кг при подъёме груза на высоту $h=0{,}3$ м. **Ответ**: $A=11{,}3$ Дж.



8 (15.2.7). Горизонтальная трубка вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_e=2$ 1/с вокруг оси AB. Внутри трубки движется шарик массой 2 кг со скоростью $v_r=0{,}2$ м/с. Определить кинетическую энергию шарика, когда он находится на расстоянии $s=0{,}5$ м. **Ответ**: $E=0{,}259$ Дж.

9 (30.3). Под действием мгновенной силы тело начало двигаться со скоростью $v_0 = 2$ м/с по шероховатой (коэффициент трения $f = 0{,}7$) наклонной (угол наклона 30^0) плоскости. Определить путь S, который пройдёт тело до остановки. **Ответ**: $S = 1{,}919$.

10 (30.4). По наклонной шероховатой плоскости, составляющей с горизонтом 30^0, спускается без начальной скорости тяжёлое тело. Коэффициент трения $f = 0{,}1$. Какую скорость будет иметь тело, когда пройдет 2 м от начала движения? **Ответ**: 4,02 м/с.

11 (30.6). Точка массы 3 кг двигалась по горизонтали влево со скоростью 5 м/с. К точке приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась 55 м/с и направленной вправо. Найти величину силы и совершённую ею работу. **Ответ**: $F = 6$ Н, $A = 4{,}5$ кДж.

12 (30.11). Гвоздь вбивается в стену, которая оказывает сопротивление $T = 700$ Н. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется на длину $l = 0{,}0015$ м. Определить массу молотка, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость $v = 1{,}25$ м/с. **Ответ**: $m = 1{,}344$ кг.

13 (15.3.11). Тело массой 100 кг начинает движение из состояния покоя по горизонтальной шероховатой поверхности под действием постоянной силы $\vec{F}$. Пройдя путь 5 м, скорость тела стала 5 м/с. Определить модуль силы $\vec{F}$, если $F_{TP} = 20$ Н. **Ответ**: $F = 270$ Н.

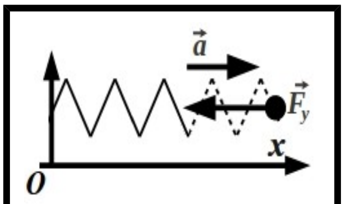
14 (15.3.13). По наклонной поверхности спускается без начальной скорости тело массой 1 кг. Определить кинетическую энергию, когда оно прошло путь 3 м, если коэффициент трения $f = 0{,}2$. **Ответ**: $E = 9{,}62$ Дж.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Рассмотрим два вида колебательных движений: свободные и вынужденные.

Опр. 1. Свободные колебания – это колебания, которые происходят под действием восстанавливающих сил.

Опр. 2. Вынужденные колебания – это колебания, которые происходят под действием внешнего периодического воздействия.

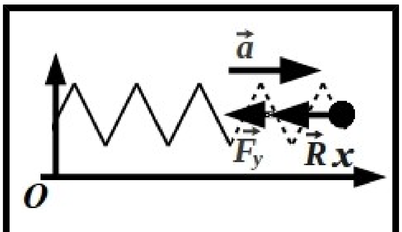


– Рисунок 1

Рассмотрим свободные колебания точки без учета сил сопротивления (рисунок 1). Пусть точка M движется прямолинейно под действие восстанавливающей силы упругости $\vec{F}_y = -k \cdot x$. Тогда уравнение движения будет иметь вид: $m \cdot x^{//} + k \cdot x = 0$ или $x^{//} + \lambda^2 \cdot x = 0$, где $\lambda^2 = c/m$. Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид:

(1) $$x = C_1 \sin\lambda t + C_2 \cos\lambda t = A \sin(\lambda t + \alpha),$$

где A — амплитуда, $\lambda t + \alpha$ – фаза колебаний; λ – круговая частота колебаний; α – начальная фаза.



– Рисунок 2

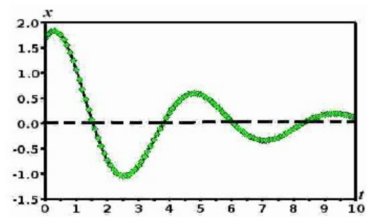
Опр. 3. Колебания, совершаемые точкой по закону (1) называются гармоническими колебаниями, которые имеют вид синусоиды.

Опр. 4. Если точка ***M*** перемещается в вязкой среде, то на неё действует сила, пропорциональная скорости перемещения (рисунок 2):

(2) $$\vec{R}=-\mu\cdot\vec{v}=-\mu\cdot\vec{x}^{\prime}.$$

Пусть теперь точка ***M*** под действием восстанавливающей силы $\vec{F}_y=-k\cdot x$ перемещается в вязкой среде. Тогда уравнение движения точки ***M*** будет иметь вид:

$m\cdot x^{\prime\prime}+k\cdot x+\mu\cdot x^{\prime}=0$ или $x^{\prime\prime}+2\cdot b\cdot x^{\prime}+\lambda^2\cdot x=0$ где $\lambda^2=k/m$, $2\cdot b=\mu/m$. Это также однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение будет зависеть от соотношений между λ и b.

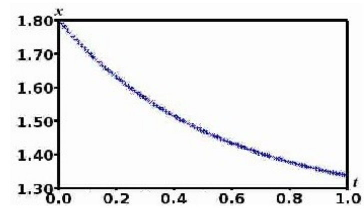


– Рисунок 3

Если $\lambda>b$ (сопротивление среды мало по сравнению с восстанавливающей силой), то решение выглядит следующим образом (рисунок 3):

(3) $$x=e^{-b\cdot t}\cdot\left(C_1\sin pt+C_2\cos pt\right)=A\cdot e^{-b\cdot t}\cdot\sin\left(pt+\alpha\right),$$

где $p=\sqrt{\lambda^2-b^2}$.

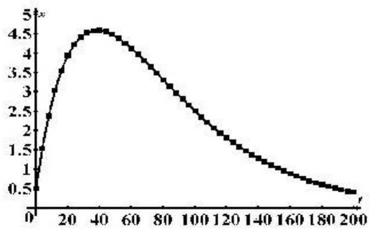


– Рисунок 4

Если $b>\lambda$ (сопротивление среды велико по сравнению с восстанавливающей силой), то решение уравнения имеет вид (рисунок 4):

(4) $$x=C_1\cdot e^{-(b+r)\cdot t}+C_2\cdot e^{-(b-r)\cdot t},$$

где $b^2-\lambda^2=r^2$, C_1, C_2 – константы интегрирования.

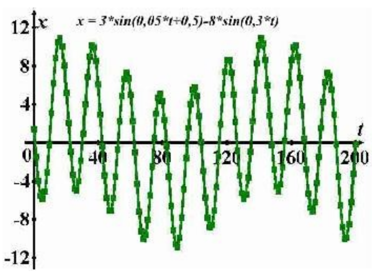


– Рисунок 5

Если $b=\lambda$ (сопротивление среды сопоставимо с восстанавливающей силой), то решение уравнения имеет вид (рисунок 5):

(5) $$x=e^{-bt}\cdot\left[C_1+C_2\cdot t\right].$$

Рассмотрим случай **вынужденных колебаний**, когда на точку ***M***, которая движется без сопротивления, действуют две силы: восстанавливающая сила $\vec{F}_y=-k\cdot x$ и гармоническая возмущающая сила $Q_x=H\cdot\sin\left(\omega\cdot t\right)$. Тогда уравнение движения точки ***M*** будет иметь вид: $m\cdot x^{\prime\prime}+k\cdot x-H\cdot\sin\left(\omega\cdot t\right)=0$ или

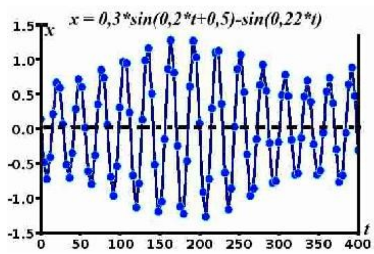


– Рисунок 6

(6) $$x^{\prime\prime}+\lambda^2\cdot x-G\cdot\sin\left(\omega t\right)=0,$$

где $\lambda^2=k/m$, $G=H/m$.

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид (рисунок 6):

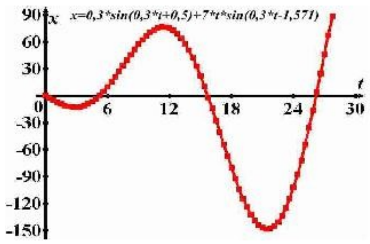


– Рисунок 7

(7) $$x=A\cdot\sin\left(\lambda t+\alpha\right)+\frac{G}{\lambda^2-\omega^2}\cdot\sin\left(\omega t\right),$$

где A, α – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Замечание 1. При $\omega \approx \lambda$ возникает эффект биения, который характерен тем, что колебания происходят с амплитудой, которая изменяется по гармоническому закону (рисунок 7). При $\omega = \lambda$ возникает явление резонанса, когда амплитуда колебаний неограниченно возрастает (рисунок 8).



– Рисунок 8

В случае колебательного движения точки M в вязкой среде с коэффициентом вязкости μ уравнение движения будет иметь вид $m \cdot x^{//} + \mu \cdot x^{/} + k \cdot x - H \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0$ или

(8) $$x^{//} + 2 \cdot b \cdot x^{/} + \lambda^2 \cdot x - G \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0,$$

где $\lambda^2 = k / m$, $G = H / m$, $2 \cdot b = \mu / m$.

Решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

(9) $$x = A \cdot e^{-b \cdot t} \cdot \sin(p \cdot t + \alpha) + B \cdot \sin(\omega \cdot t - \beta),$$

где $tg\,\beta = \dfrac{2 \cdot b \cdot \omega}{\lambda^2 - \omega^2}$, $B = \dfrac{G}{(\lambda^2 - \omega^2) \cdot \sqrt{1 + tg^2 \beta}}$, $p = \sqrt{\lambda^2 - b^2}$.

4. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Опр. 1. Совокупность точек, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек, называется **системой материальных точек**.

Опр 2. Сила называется **внешней** по отношению к системе, если она действует со стороны точек, не входящих в систему. Сила называется **внутренней** по отношению к системе, если она действует между точками системы.

Свойства внутренних сил.

1. Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю.

2. Главный момент всех внутренних сил системы относительного любого центра или оси равен нулю.

Замечание 1. Так как внутренние силы приложены к различным точкам твердого тела, то из приведенных свойств не следует, что внутренние силы системы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы.

Опр. 3. Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему:

(1) $$M = \sum_k m_k.$$

Опр. 4. Момент инерции тела или системы точек относительно оси γ называется скалярная величина, которая определяется по формуле:

(2) $$I_\gamma = \sum_k m_k r_k^2,$$

где m_k – масса точек тела или системы; r_k – расстояние от точек тела или системы до оси.

Замечание 2. Если мысленно выбрать точку, в которой будет сосредоточена вся масса тела или системы точек, то можно формулу (2) записать по-другому, введя понятие **радиуса инерции** или расстояния от этой точки до оси инерции:

(3) $$I_\gamma = M \cdot R_\gamma^2 .$$

Замечание 3. Если система точек образует сплошное тело, то выражение (3) преобразуется из дискретной суммы в соответствующий интеграл:

(4) $$I_\gamma = \int_\Omega r^2\, dm = \int_\Omega \rho \cdot r^2\, d\omega ,$$

где Ω – мера геометрического тела; dm – элементарная масса; $d\omega$ – мера элементарного участка тела; ρ – плотность тела; r – расстояние от оси γ до любой точки тела.

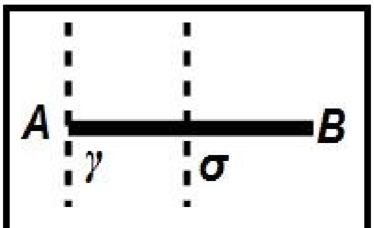
Теорема Штайнера. Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси γ равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси σ, которая проходит через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

(5) $$I_\gamma = I_\sigma + m \cdot r^2$$

Определим моменты инерции для **некоторых частных случаев.**

1. Тонкий однородный стержень AB длинной L и массой M (рисунок 1). Момент инерции относительно оси, которая проходит через граничную точку отрезка, определяется по формуле: $I_\gamma = \int_0^L \rho\, x^2\, dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3}$, откуда получаем формулу

(6) $$I_\gamma = \frac{M L^2}{3} ,$$



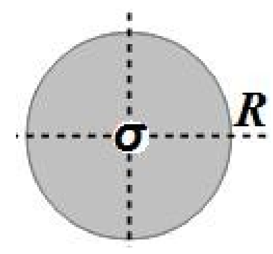
– Рисунок 1

момент инерции относительно оси, которая проходит через центр стержня C параллельно оси Az определяется по теореме Штайнера:

(7) $$I_\sigma = I_\gamma - M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M L^2}{12} .$$

2. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса R и массой M (рисунок 2). Момент инерции относительно оси, которая проходит через центр круга C перпендикулярно пластине, определяется по формуле: $I_\sigma = \iint_\Omega \rho\left(x^2 + y^2\right) dxdy =$

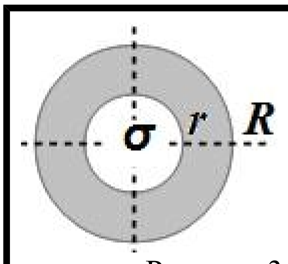
$= \frac{M}{\pi R^2} \iint_D r^3\, dr\, d\varphi = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\, dr = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}$, откуда формула имеет вид



– Рисунок 2

(8) $$I_\sigma = \frac{M R^2}{2} .$$

3. Однородное кольцо с внутренним и внешним радиусами r и R, массой M и площадью S_K (рисунок 3). Момент инерции относительно оси, которая проходит через центра кольца C перпендикулярно кольцу, определяется по формуле:



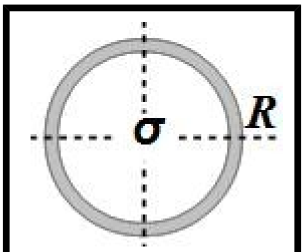
– Рисунок 3

$$I_\sigma=\iint_\Omega \rho\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{M}{S_K}\iint_D r^3\,drd\varphi=\frac{M}{S_K}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_r^R r^3\,dr= , \qquad =\frac{M}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4-r^4}{4}$$

откуда получаем выражение

(9) $$I_\sigma=\frac{M\left(R^2+r^2\right)}{2}.$$

4. Тонкое однородное кольцо радиуса R и массой M (рисунок 4). Момент инерции относительно оси, которая проходит через центра кольца C перпендикулярно кольцу определяется по формуле: $I_\sigma=\sum_k m_k r_k=R\sum_k m_k$, откуда получаем



– Рисунок 4

(10) $$I_\sigma=M R^2.$$

Опр. 5. Кинетическая энергия системы точек, которая движется поступательным образом, вычисляется по формуле:

(11) $$E=\frac{1}{2}\cdot\sum_k m_k\cdot v_k^2$$

если система вращается вокруг некоторой оси, то кинетическая энергия этой системы определяется по формуле:

(12) $$E=\frac{1}{2}\cdot\sum_k I_{\gamma k}\cdot\omega_k^2$$

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии центра масс при поступательном движении и кинетической энергией вращательного движения тела вокруг центра масс:

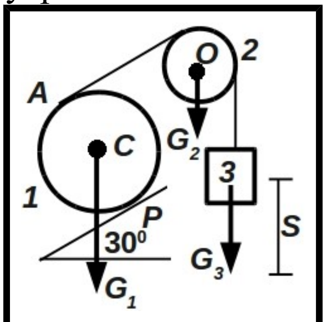
(13) $$E=\frac{m\cdot v_\sigma^2}{2}+\frac{I_\sigma\cdot\omega^2}{2}.$$

Теорема (об изменении кинетической энергии материальной системы).

Изменение кинетической энергии системы точек при перемещении её из одного положения в другое равно сумме работ на этом перемещении всех внутренних и внешних сил, приложенных к точкам системы:

(14) $$E_{II}-E_I=A_e+A_i.$$

Пример 1 (аналог РГР Д-10). Дано $m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=2$ кг, $S=2$ м (рисунок 5). Найти скорость и ускорение тела 3 после перемещения на расстояние S.



– Рисунок 5

Решение. Так как в начальный момент времени движения не было, то $E_I=0$. Определим кинетическую энергию системы $E_{II}=E_1+E_2+E_3$, $E_3=\frac{m_3\cdot v_3^2}{2}=v_3^2$, $E_2=\frac{I_O\cdot\omega_2^2}{2}$,

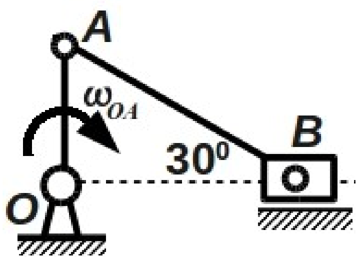
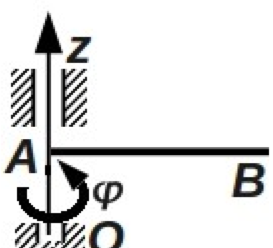
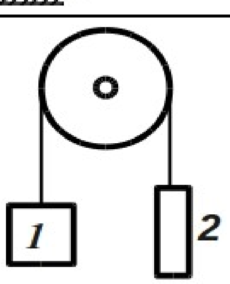
$E_1=\frac{m_1\cdot v_C^2}{2}+\frac{I_C\cdot\omega_1^2}{2}$. Найдём все необходимые компоненты для E_2 $I_O=\frac{m_2\cdot R_2^2}{2}=R_2^2$,

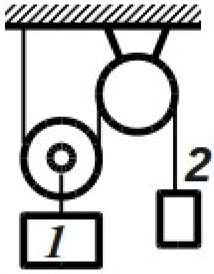
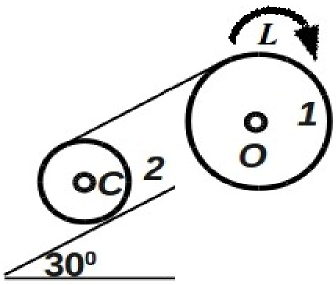
$\omega_2=\frac{v_3}{R_2}$, значит $E_2=\frac{v_3^2}{2}$. Найдём все необходимые компоненты для E_3: $v_A=v_3$,

$v_A=\omega_1\cdot AP=\omega_1\cdot 2\cdot R_1$, $v_C=\omega_1\cdot CP=\omega_1\cdot R_1=\dfrac{v_3}{2}$, $\omega_1=\dfrac{v_3}{2R_1}$, $I_C=\dfrac{m_1\cdot R_1^2}{2}=\dfrac{R_1^2}{2}$, значит $E_1=\dfrac{1\cdot v_3^2}{2\cdot 4}+\dfrac{R_1^2\cdot v_3^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot R_1^2}=\dfrac{3v_3^2}{16}$. Тогда $E=\dfrac{27v_3^2}{16}$ Дж. Сделаем проверку вычисления E_1 на основе теории плоского движения. $E_1=\dfrac{I_P\cdot\omega_1^2}{2}$, определим момент инерции по теореме Штайнера $I_P=I_C+m_1\cdot R_1^2=\dfrac{m_1\cdot R_1^2}{2}+m_1\cdot R_1^2=1{,}5R_1^2$. Тогда получим $E_1=\dfrac{1{,}5R_1^2\cdot v_3^2}{2\cdot 4\cdot R_1^2}=\dfrac{3v_3^2}{16}$, что совпадает с вычислением другим способом.

Определим работу всех внешних сил, которые действуют на систему во время перемещения S. Поскольку заранее неизвестно, куда будут двигаться объекты системы, то предположим, что тело 1 катится вниз. Тогда $A_{G_3}=-G_3\cdot S_3=-2\cdot 10\cdot 2=-40$, $A_{G_1}=G_1\cdot S_C\cos 60^0=5S_C$, $A_{G_2}=0$ Дж. Определим перемещение S_C из соотношений между скоростями v_C и v_3: $v_C=\dfrac{v_3}{2}$, откуда $S_C=\dfrac{S_3}{2}=1$ и $A_{G_1}=5$. Общая работа A равна $A=-40+5=-35$. Так как работа оказалась отрицательной, то перемещение S происходит не вверх, а вниз. Тогда все работы меняют знак и $A=35$. Подставляя E и A в формулу (14) получим, что $v_3=4{,}554$ м/с. Для поиска ускорения необходимо записать равенство (14), где S_3 будет записано, как переменная: $\dfrac{27v_3^2}{16}=17{,}5\cdot S_3\Rightarrow\dfrac{27}{16}\cdot 2v_3\cdot\dfrac{dv_3}{dt}=17{,}5\dfrac{dS_3}{dt}\Rightarrow 3{,}375\cdot v_3\cdot a_3=17{,}5\cdot v_3$, значит $a_3=5{,}185$ м/с^2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	**1 (15.4.2)**. Для указанного положения механизма определить кинетическую энергию шатуна AB массой 1 кг, если кривошип OA длиной 0,5 м вращается с угловой скоростью $\omega_{OA}=2$ 1/с. **Ответ**: $E=0{,}5$ Дж.
	**2 (15.4.4)**. Однородный стержень массой 3 кг и длиной $AB=1$ м вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi=2t^3$. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени $t=1$ с. **Ответ**: $E=18$ Дж.
	**3 (15.7.2)**. Грузы 1, 2 массой $m_1=2$, $m_2=1$ кг подвешены к концам гибкой нити. Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он опускается на высоту $h=3$ м. Движение грузов начинается из состояния покоя. **Ответ**: $v_1=4{,}43$ м/с.

	**4 (15.7.9)**. Определить скорость груза 2 в момент времени, когда он опускается вниз из состояния покоя на расстояние $s=4$ м, если массы грузов $m_1=2$, $m_2=4$ кг. **Ответ**: $v_2=7{,}23$ м/с.
	**5 (38.41)**. Барабан 1 радиуса $r_1=0{,}5$ м и массой $m_1=5$ кг вращает пара сил с моментом $L=100$ Нм. Барабан связан тросом с колесом 2 радиуса $r_2=0{,}2$ м и массой $m_2=10$ кг, которое катится по наклонной поверхности под углом 30^0 и с коэффициентом трения качения $\delta=0{,}001$ м. Определить угловую скорость барабана 1 после 2 полных оборотов.

5. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Задачи динамики, сформулированные на основе второго закона Ньютона, можно преобразовать к задачам статики, добавив к списку всех сил, которые действуют на точку или систему точек, ещё один вид сил, которые называются силами инерции Даламбера.

Опр. 1. Сила инерции – это сила, которая определяется по следующим формулам

(1) $$\vec{\Phi}=-m\cdot\vec{a}\,,\ \Phi=m\cdot a\,.$$

Принцип Даламбера (для точки). При движении материальной точки активные силы, реакции связей и сила инерции точки образуют равновесную систему сил:

(2) $$\vec{F}+\vec{R}+\vec{\Phi}=0\,.$$

Принцип Даламбера (для системы точек). При движении системы материальных точек внешние силы (активные и реакции) и сила инерции точки образуют равновесную систему сил.

Рассмотрим систему из n материальных точек. Тогда условие равновесия (3) будет заключаться в том, что главный вектор и главный момент всех сил, которые действуют на систему, будет равен нулю. Выражение (3) примет вид:

(3) $$\sum_k \vec{F}^{\,e}_k+\sum_k \vec{R}_k+\sum_k \vec{\Phi}_k=0\,,\ \sum_k \vec{M}_\gamma(\vec{F}^{\,e}_k)+\sum_k \vec{M}_\gamma(\vec{R}_k)+\sum_k \vec{M}_\gamma(\vec{\Phi}_k)=0\,,$$

где $\vec{F}^{e}_k$ – внешние силы, которые действуют на систему точек; $\vec{R}_k$ – силы реакций связей.

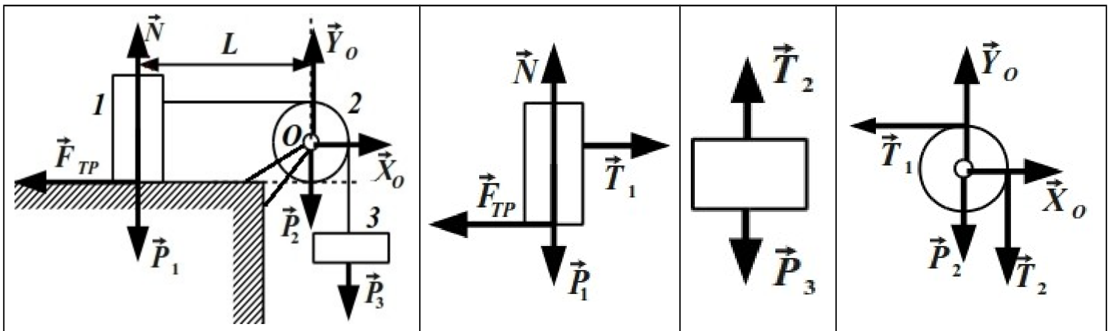
На практике возникает задача определения момента пары сил инерции тела, которое совершает вращательное движение и к которому приложены некоторые заранее, быть может, неизвестные по величине силы. Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента $\dfrac{d\vec{L}_\gamma}{dt}=\vec{M}_\gamma(\vec{F})$ и равенством $L_\gamma=\omega\cdot I_\gamma$, где γ – ось вращения. Тогда из второго уравнения формулы (4) в случае плоского вращательного движения получим:

$\sum_k M_\gamma(\vec{\Phi}_k)=-\sum_k M_\gamma(\vec{F}^{\,e}_k)-\sum_k M_\gamma(\vec{R}_k)=-M_\gamma(\vec{F})=-\dfrac{dL_\gamma}{dt}=-\varepsilon\cdot I_\gamma$. Знак выражения указывает, что пара сил инерции вращает тело в противоположном направлении углового ускорения, которое определяется из кинематических соображений.

Пример 1. Определить силу тяжести, действующую на круглый однородный диск радиуса 0,2 м, при вращении вокруг оси симметрии по закону $\varphi=3\cdot t^2$. Главный момент сил инерции относительно оси вращения равен $M_z(\vec{\Phi})=0{,}04$ Н·м.

Решение. По формуле (2) получаем, что $M_z(\vec{\Phi})=\varepsilon\cdot I_\gamma=\phi^{//}\cdot I_\gamma$. Момент инерции однородного диска относительно оси определяется по формуле: $I_\gamma=0{,}5\cdot m\cdot r^2$, а угловое ускорение $\varepsilon=\phi^{//}=6$. Тогда $0{,}04=6\cdot 0{,}5\cdot m\cdot 0{,}2^2$ откуда масса $m\approx 0{,}327$ кг и вес $G\approx 3{,}27$ Н.

Пример 2. Тело 1 скользит по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы тяжести тела 3, при этом известно что $m_1=m_3=m=3$, $m_2=1$ кг, $L=1$, $r_2=0{,}1$ м, $f_{TP}=0{,}1$. Определить все неизвестные величины (рисунок 1).



Система в целом	Тело 1	Тело 3	Тело 2

– Рисунок 1

Решение. В данной задаче рассматривается система 3 тел. Тело 3 движется вниз, а тело 1 движется вправо с некоторым ускорением ***a***, поэтому на эти тела действуют силы инерции $\Phi_1=\Phi_3=m\,a=3\,a$, которые направлены влево и вверх соответственно. Так как блок 2 тяжёлый, то он также обладает инерцией, которая сводится к паре сил с моментом $M_\Phi=\varepsilon\cdot I_\gamma=\frac{a}{r}I_\gamma=10\,a\,I_\gamma$, которая направлена против часовой стрелки.

Рассмотрим тело 1. Для него система уравнений (4) имеет вид: $T_1-F_{TP}-\Phi_1=0$, $N-P_1=0$.

Рассмотрим тело 3. Для него система уравнений (4) имеет вид: $T_2-P_3+\Phi_3=0$.

Рассмотрим тело 2. Для него система уравнений (4) имеет вид: $-T_2-P_2+Y_O=0$, $-T_1+X_O=0$, $\sum_k M_\gamma=T_1\cdot r-T_2\cdot r+10\,a\,I_\gamma=0$.

Подставим в составленные уравнения известные значения: $G_1=G_3=30$, $G_2=10$, $I_\gamma=\frac{m_2\cdot r_2^2}{2}=0{,}5\cdot 1\cdot 0{,}01=0{,}005$. получим следующую систему уравнений:

$N=P_1=30\Rightarrow F_{TP}=0{,}1\cdot 30=3$, $-T_2+Y_O=10$, $T_2+3\,a=30$, $T_1-3\,a=3$, $T_1=X_O$, $6\,a+100\,a\,I_\gamma-27=0\Rightarrow a=4{,}1538$. Тогда $T_2=30-3\,a=17{,}5386$, $T_1=3+3\,a=13{,}4614$, $Y_O=10+T_2=27{,}5386$, $X_O=T_1=13{,}4614$ Н. Все переменные найдены.

Рассмотрим систему в целом и убедимся в её непротиворечивости.

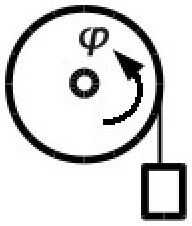
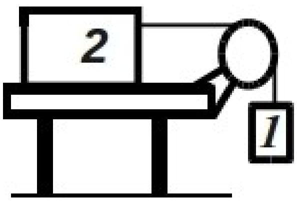
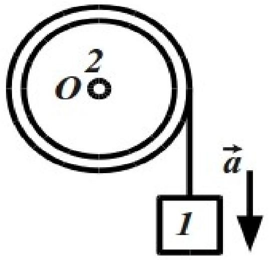
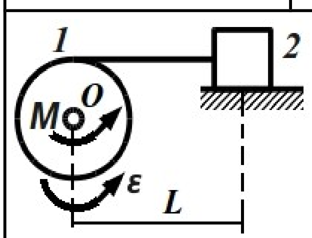
$X_O-F_{TP}-\Phi_1=0\Rightarrow X_O-3-3\,a=0$, что совпадает с четвёртым уравнением.

$N-P_1+Y_O-P_2-P_3+\Phi_3=0\Rightarrow Y_O-40+3\,a=0\Rightarrow T_2-30+3\,a=0$, что совпадает с третьем уравнением.

$\sum_k M_\gamma = P_1\cdot L - N\cdot L + F_{TP}\cdot r + \Phi_1\cdot r - P_3\cdot r + \Phi_3\cdot r + 10\,a\,I_\gamma = 0 \Rightarrow -27 + 6\,a + 100\,I_\gamma = 0$ что совпадает с шестым уравнением.

Произведём **проверку** по теореме об изменении кинетической энергии. Найдём кинетическую энергию: $E_1 = 0{,}5\cdot m_1\cdot v_3^2 = 1{,}5\cdot v_3^2$, $E_2 = 0{,}5\cdot I_O\cdot \omega_2^2 = 0{,}5\cdot 0{,}005\cdot\left(\frac{v_3}{0{,}1}\right)^2 = 0{,}25\cdot v_3^2$, $E_3 = 0{,}5\cdot m_3\cdot v_3^2 = 1{,}5\cdot v_3^2$, $E = E_1 + E_2 + E_3 = 3{,}25\,v_3^2$. Найдём работу внешних сил: $A_{TP} = -F_{TP}\cdot S_3 = -3\cdot S_3$, $A_{G_3} = G_3\cdot S_3 = 30\cdot S_3$, $A = A_{TP} + A_{F_3} = 27\cdot S_3$. По теореме получим следующее равенство: $3{,}25\cdot v_3^2 = 27\cdot S_3 \Rightarrow 6{,}5\cdot v_3\cdot a_3 = 27\cdot v_3 \Rightarrow a_3 = a = 4{,}1538$ м/с^2. Полученное выражение совпадает с вычисленным ранее.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

<table>
<tr><td>
</td><td>1 (17.1.2). Груз массой 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся по закону $\varphi = 0{,}6\,t^2$. Определить натяжение каната, если радиус $r = 0{,}4$ м.
Ответ: $T = 617$ Н.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2 (41.16). На столе массой 10 кг расположены грузы 1 и 2. Груз 1 массой 2 кг скользит вниз и тянет за собой на нити, перекинутой через блок, груз 2 массой 3 кг. Определить силу давления стола на пол, силу натяжения нити, ускорение движения грузов.
Ответ: $N = 146{,}923$, $T = 12$ Н, $a = 4$ м/с^2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 (17.1.12). Точка M массой $m = 10$ движется по окружности радиуса $r = 3$ согласно закону $s = 4\,t^3$. Определить модуль силы инерции в момент времени $t = 1$ с. Ответ: $\Phi = 537$ Н.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 (17.3.5). Два одинаковых тела массой 1 кг каждый соединены между собой нитью и движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $F = 40$ Н. Коэффициент трения $f = 0{,}1$. Определить ускорения грузов и натяжение нити. Ответ: $T = 20$ Н, $a = 19$ м/с^2.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>5 (17.3.15). Определить модуль реакции шарнира O, момент инерции тела 2 I_O, натяжение нити T, если тело 1 массой $m_1 = 5$ кг опускается с ускорением $a = 3$ м/с^2. Масса блока $m_2 = 10$ кг, а его центр масс расположен на оси вращения. Ответ: $R_O = 132$, $T = 35$ Н.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>6 (17.3.16). Барабан 1 радиуса $r_1 = 0{,}2$ м вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_1 = 2$ 1/с^2. Определить модуль реакции шарнира барабана O, натяжение нити T, момент инерции I_O, момент пары сил M, если $f = 0{,}1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$ кг, $L = 2$ м.</td></tr>
</table>

6. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

Опр. 1. Связь – это ограничения, которые накладываются на координаты и скорости механической системы и которые должны выполняться на любом её движении. Связь можно описать математически как равенство или неравенство, содержащее время, координаты и скорости.

Опр. 2. Обобщенные координаты системы q_s – это независимые величины, которые однозначно определяют положение всех точек системы. Количество таких независимых координат определяется числом степеней свободы системы.

Примеры. Рычаг: положение определяется заданием одной величины – угла наклона φ; кривошипно-ползунный механизм определяется углом поворота кривошипа φ.

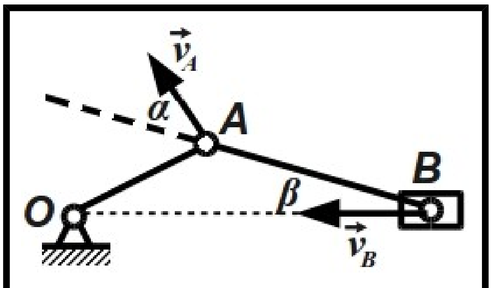
Опр. 3. Возможные (виртуальные) перемещения несвободной механической системы – это воображаемые бесконечно малые перемещения, которые допускаются в данный момент наложенными на систему связями.

Замечание 1. Будем различать действительное перемещение $d\vec{r}$ точки системы, которое она совершает за бесконечно малый промежуток времени dt и возможное перемещение $\delta\vec{r}$ за время δt, которое точка не совершает, но могла бы совершить, не нарушая наложенных на нею связей. **Отличие** заключается в том, что перемещение $d\vec{r}$ происходит вдоль вектора скорость, а перемещение $\delta\vec{r}$ – в любом направлении. Однако, на практике в качестве возможного направления выбирают самое простое – вдоль вектора скорости.

Замечание 2. Возможное перемещение $\delta\vec{r}$ всегда является линейным и представляет собой бесконечно малый отрезок, который образуется при бесконечно малом изменении независимой координаты. Если тело или система тел совершает плоское движение, то для определения возможных перемещений необходимо использовать теорию кинематики плоского движения.

Пример 1. Определим величину δs точки A для рычага и кривошипно-ползунного механизма (рисунок 2). Рычаг (кривошип) совершает вращательное движение, поэтому скорость точки A определяется как $v_A = OA\cdot\omega_{OA}$. Запишем скорости через элементарные приращения: $v_A = \dfrac{\delta s_A}{\delta t}$ и $\omega_{OA} = \dfrac{\delta\varphi_{OA}}{\delta t}$. Отсюда получаем

(1) $$\delta s_A = OA\cdot\delta\varphi_{OA}.$$



– Рисунок 2

Пример 2. Определим возможное перемещение δs_B точки B для кривошипно-ползунного механизма (рисунок 12). По теореме о проекциях скорость v_B можно выразить через v_A как $v_B = \dfrac{v_A\cdot\cos\alpha}{\cos\beta}$, и тогда, учитывая (1), получим выражение

(2) $$\delta s_B = \frac{OA\cdot\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\delta\varphi_{OA}.$$

Опр. 4. Возможная работа δA приложенной силы – это элементарная работа, которую могла бы совершить сила $\vec{F}$ при возможном перемещении $\delta\vec{r}$:

(3) $$\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}.$$

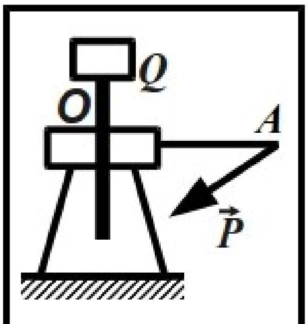
Опр. 5. Связи называются **идеальными**, если сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:

(4) $$\sum_k \delta A_k^r = 0 .$$

Принцип возможных перемещений Лагранжа. Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени также равны нулю.

(5) $$\sum_k \delta A_k^a = \sum_k \vec{F}_k^a \cdot \delta \vec{r}_k = 0 .$$

Пример 3 (аналог РГР Д-15). Груз Q поднимается с помощью домкрата, который приводится в движение рукояткой $OA = 0{,}6$ м. К концу рукоятки, перпендикулярно ей, приложена сила $P = 160$ Н. Определить величину силы тяжести груза Q, если шаг винта домкрата $h = 0{,}012$ м (рисунок 3).



– Рисунок 3

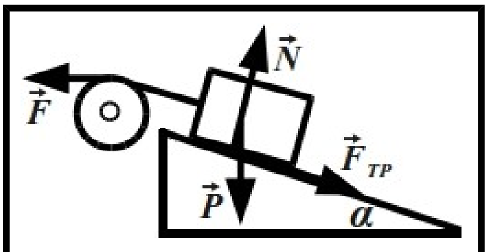
Решение. Придадим рычагу OA бесконечно малое перемещение $\delta \vec{r}$, по формуле (1) линейная длина этого перемещения будет равна $\delta s_A = OA \cdot \delta \varphi$.

Работа силы P будет определяться по формуле (3): $\delta A_P = P \cdot ds_A = P \cdot OA \cdot \delta \varphi = 160 \cdot 0{,}6 \cdot \delta \varphi = 96 \cdot \delta \varphi$. Шаг винта – это расстояние пройденное винтом за полный оборот в 360^0, следовательно за бесконечно малый поворот груз Q вместе с винтом пройдет расстояние $\delta s_Q = \dfrac{0{,}012}{2\pi} \cdot \delta \varphi = 0{,}0019 \cdot \delta \varphi$. Работа, совершенная силой тяжести, определится по формуле: $\delta A_Q = -Q \cdot \delta s_Q = -Q \cdot 0{,}0019 \cdot \delta \varphi$. Так как сумма работ по формуле (5) должна быть равна нулю, то получим: $Q = 50526$ Н.

Объединяя вместе принцип д'Аламбера и принцип возможных перемещений Лагранжа получим **принцип д'Аламбера – Лагранжа** (для систем, которые движутся с ускорением): при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

(6) $$\sum_k \delta A_k^a + \sum_k \delta A_k^{\Phi} = 0 .$$

Пример 4. Тело массой $m_1 = 3$ кг поднимается по шероховатой наклонной плоскости с постоянным ускорением $a = 1$ м/с^2. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}12$, масса блока $m_2 = 2$ кг равномерно распределена по ободу блока (рисунок 4). Вычислить модуль силы F.



– Рисунок 4

Решение. Расставим силы реакции опоры, силу трения, внешнюю приложенную силу, силу тяжести. Произведем расчет активных сил: $P = m \cdot g = 30$, $\Phi = m \cdot a = 3$, $N = P \cdot \cos 30^0 = 25{,}98$, $F_{TP} = f \cdot N = 3{,}12$ Н. Так как известна масса блока, то при его вращении необходимо учитывать его инерцию: $M_O(\vec{\Phi}) = \varepsilon \cdot I_O$, учитывая, что его масса распределена по ободу, то можно считать его однородным тонким кольцом, и тогда $I_O = m_2 \cdot r^2 = 2 \cdot r^2$. Угловое ускорение выражается через линейное $\varepsilon = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{r}$, тогда

$M_O(\vec{\Phi})=2\cdot r$. Придадим системе бесконечно малое перемещение δr, тогда блок повернется на бесконечно малый угол $\delta\varphi=\dfrac{\delta r}{r}$. Сумма работ активных сил и сил инерции будет равна: $\delta A=-\Phi\cdot\delta r-F_{TP}\cdot\delta r-P\cdot h+F\cdot\delta r-M_O\cdot\delta\varphi=0$, откуда можно выразить приложенную силу F: $F=2+3+3{,}12+15=23{,}12$ Н.

Можно показать, что возможную работу δA_j всех сил $\vec{F}_1$, …, $\vec{F}_n$ на перемещении $\delta\vec{r}_{kj}$, вызванных приращением одной обобщённой координаты δq_j, всегда можно выразить через δq_j следующим образом:

(7) $$\delta A_j=Q_j\cdot\delta q_j.$$

Опр. 6. Силу $\vec{Q}_j$ из формулы **(7)** называют **обобщённой силой**, соответствующей координате q_j. Размерность этой величины зависит от размерности обобщённой координаты q_j.

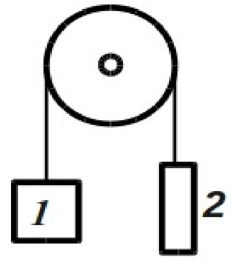
Опр. 7. Полная элементарная работа всех действующих на систему сил определяется по формуле:

(8) $$\delta A=Q_1\cdot\delta q_1+\ldots+Q_s\cdot\delta q_s.$$

Замечание. Вычисление обобщенной силы производится по формулам вида (7, 8) после определения элементарной работы.

Пример 5. Грузы 1 и 2 массой $m_1=20$ и $m_2=5$ кг присоединены к нерастяжимому тросу, который переброшен через блок 3 массой $m_3=5$ кг. Определить обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате y_1 (рисунок 5).

Решение. Определим активные силы, действующие на систему $P_1=m_1\cdot g=200$ Н и $P_3=m_3\cdot g=50$ Н. Придадим системе положительное приращение δy_1. Вычислим работу всех сил: $\delta A=P_1\cdot\delta y_1-P_3\cdot\delta y_1=150\,\delta y_1$, откуда $Q_1=150$.



– Рисунок 5

Из принципа д'Аламбера – Лагранжа следуют дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах **(уравнение Лагранжа 2-го рода)**:

(9) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q'}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q,$$

где E – кинетическая энергия; q – обобщенная координата.

Для того, чтобы для данной системы построить уравнения Лагранжа необходимо:

1) определить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты;

2) изобразить систему в любом положении и указать все активные силы (в том числе и силы трения);

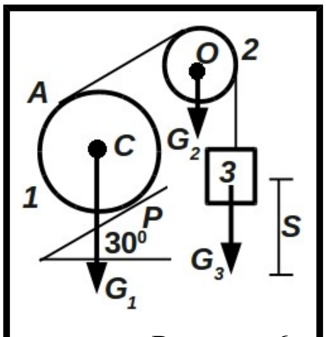
3) вычислить обобщенные силы, при этом надо учесть, что приращение соответствующей обобщенной координаты должно быть положительным;

4) вычислить кинетическую энергию при абсолютном движении и выразить эту энергию через обобщенные координаты и скорости;

5) вычислить все частные и обыкновенные производные и подставить их в систему (9).

Пример 6. Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы равна $E=4\cdot(q')^2$, обобщенная сила $Q=76-2\cdot q$. Найти значение ускорения при $q=2$.

Решение. Частные производные $\frac{\partial E}{\partial q^{/}}=8\cdot q^{/}$, $\frac{\partial E}{\partial q}=0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right)=8\cdot q^{//}$. Обобщенная сила $Q(2)=76-2\cdot 2=72$. Тогда $q^{//}=72/8=9$.



– Рисунок 6

Пример 7 (аналог задания РГР Д-19). Дано $m_1=1$, $m_2=2$, $m_3=2$ кг. Найти ускорение тела 3, натяжения нитей (рисунок 6). Сделать проверку.

Решение. Общая кинетическая энергия системы определяется точно также, как при применении теоремы об изменении кинетической энергии. Получим следующее выражение $E=\frac{27\,v_3^2}{16}$. Выберем обобщённую координату $q=S_3$, тогда кинетическая энергия примет вид $E=\frac{27\left(S_3^{`/}\right)^2}{16}$. Вычислим частные и обыкновенные производные из выражения (7): $\frac{\partial E}{\partial q^{/}}=\frac{\partial E}{\partial S_3^{/}}=3{,}375\cdot S_3^{/}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right)=3{,}375\cdot S_3^{//}=3{,}375\cdot a_3$, $\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial S_3}=0$. Тогда левая часть выражения (7) примет вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=3{,}375\cdot a_3$.

Для определения обобщённой силы найдём возможную работу всех активных сил на возможном перемещении $\delta q=\delta S_3$: $\delta A_{G_1}=-G_1\cdot\delta S_C\cos 60^0=-5\,\delta S_C=-2{,}5\cdot\delta S_3$, так как $\delta S_C=\frac{\delta S_3}{2}$ и $\delta A_{G_3}=G_3\cdot\delta S_3=20\,\delta S_3$; общая работа будет равна $\delta A=17{,}5\,\delta S_3$, а обобщённая сила соответственно $Q=17{,}5$ Н.

Тогда из равенства (9) получим $a_3=5{,}185$ м/с^2, что совпадает с решением по теореме об изменении кинетической энергии.

Рассмотрим третье тело в отдельности. Для него $E_3=\frac{m_3\cdot v_3^2}{2}=v_3^2=\left(S_3^{/}\right)^2$, откуда производные уравнения (9) будут определяться как $\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial S_3}=0$, $\frac{\partial E}{\partial q^{/}}=\frac{\partial E}{\partial S_3^{/}}=2\cdot S_3^{/}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial S_3^{/}}\right)=2\cdot S_3^{//}=2\cdot a_3=10{,}37$. Обобщённая работа двух сил: силы тяжести G_3 и силы натяжения T_1 равна $\delta A=\delta A_{G_3}+\delta A_{T_1}=G_3\cdot\delta S_3-T_1\cdot\delta S_3=\left(20-T_1\right)\cdot\delta S_3$, откуда обобщённая сила $Q=20-T_1$. Подставляя оба выражения в (9), получим $T_1=9{,}63$ Н.

Рассмотрим первое тело в отдельности. Для него $E_1=\frac{3\cdot v_3^2}{16}=0{,}1875\cdot\left(S_3^{/}\right)^2$, откуда производные уравнения (9) будут определяться как $\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{\partial E}{\partial S_3}=0$, $\frac{\partial E}{\partial q^{/}}=\frac{\partial E}{\partial S_3^{/}}=0{,}375\cdot S_3^{/}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial q^{/}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial S_3^{/}}\right)=0{,}375\cdot S_3^{//}=0{,}375\cdot a_3=1{,}944$. Обобщённая работа двух сил: силы тяжести G_1 и силы натяжения T_2 равна $\delta A=\delta A_{G_1}+\delta A_{T_2}=\left(T_2-2{,}5\right)\cdot\delta S_3$, откуда обобщённая сила $Q=T_2-2{,}5$. Подставляя оба выражения в (9), получим $T_2=4{,}44$ Н.

Сделаем **проверку** с помощью общего уравнения динамики. Найдём возможные работы активных сил: $\delta A_{G_3} = G_3 \cdot \delta S_3 = 20 \cdot \delta S_3$,

$\delta A_{G_1} = -G_1 \cdot \delta S_C = -10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5\, \delta S_3 = -2{,}5 \cdot \delta S_3$, найдём возможные работы сил инерции

$$\delta A_{\Phi_C} = -\Phi_C^{\tau} \cdot \delta S_C = -1 \cdot a_C^{\tau} \cdot \delta S_C = \begin{bmatrix} a_C^{\tau} = 0{,}5 \cdot a_3 \\ \delta s_C = 0{,}5 \cdot \delta S_3 \end{bmatrix} = -0{,}25\, a_3 \cdot \delta S_3,$$

$\delta A_{\Phi_3} = -\Phi_3 \cdot \delta S_3 = -2\, a_3\, \delta S_3$ и возможные работы пар сил инерции

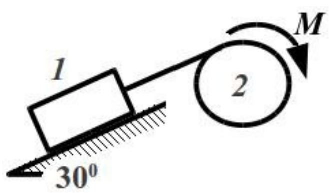
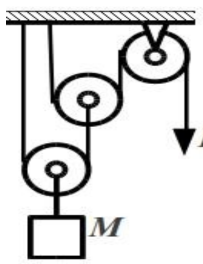
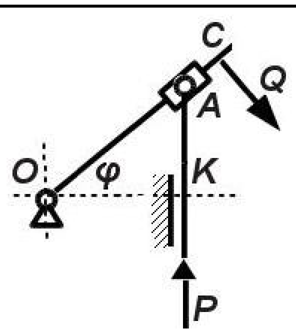
$$\delta A_{M_1} = -M_1 \cdot \delta \varphi_1 = -\varepsilon_1 \cdot I_C \cdot \delta \varphi_1 = \begin{bmatrix} a_3 = \varepsilon_1 \cdot AP \\ \delta S_3 = AP \cdot \delta \varphi_1 \\ I_C = m_1 \cdot r_1^2 \cdot 0{,}5 \end{bmatrix} = -\frac{a_3 \cdot \delta S_3}{8},$$

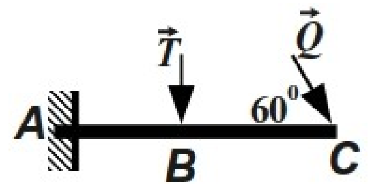
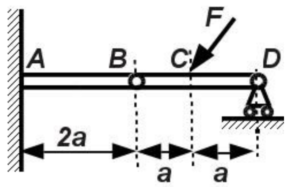
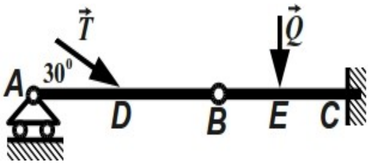
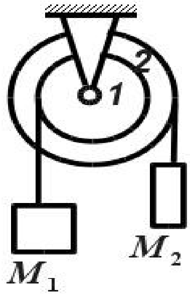
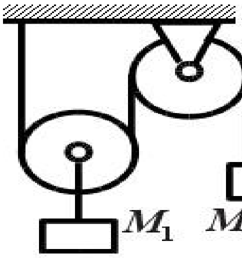
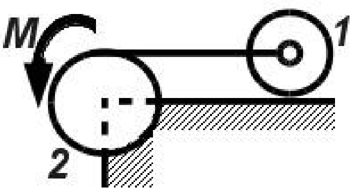
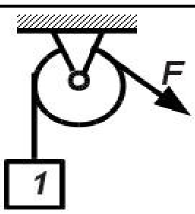
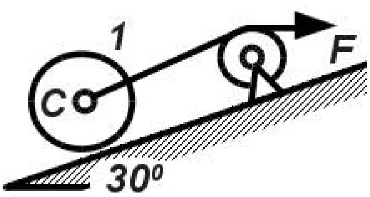
$$\delta A_{M_2} = -M_2 \cdot \delta \varphi_2 = -\varepsilon_2 \cdot I_O \cdot \delta \varphi_2 = \begin{bmatrix} a_3 = \varepsilon_2 \cdot r_2 \\ \delta S_3 = r_2 \cdot \delta \varphi_2 \\ I_O = m_2 \cdot r_2^2 \cdot 0{,}5 \end{bmatrix} = -a_3 \cdot \delta S_3.$$

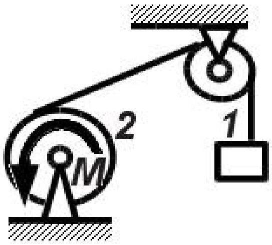
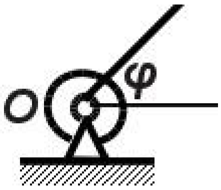
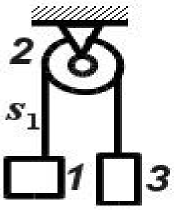
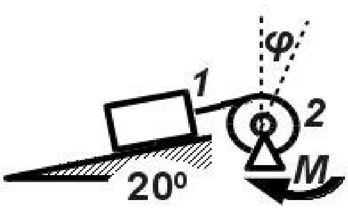
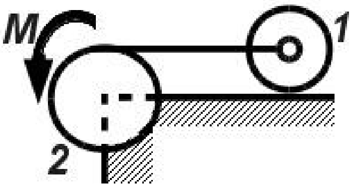
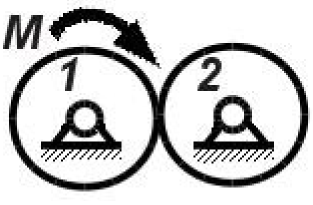
Складывая все работы и приравнивая сумму нулю, получим уравнение: $17{,}5 = 3{,}375 \cdot a_3$, откуда $a_3 = 5{,}185$ м/с^2, что совпадает с вышеприведёнными значениями.

Аналогично делается проверка для натяжений нитей T_1 и T_2. Рассмотрим более сложный случай T_2. Учитывая только что записанные выражения, сумма возможных работ будет иметь вид $\delta A_{G_1} + \delta A_{T_2} + \delta A_{M_1} + \delta A_{\Phi_C} = (-2{,}5 - 1{,}296 - 0{,}648 + T_2) \cdot \delta S_3 = 0$. Откуда $T_2 = 4{,}44$ Н

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	**1 (18.3.2).** Определить момент $\boldsymbol{M}$ пары сил, который необходимо приложить к барабану 2 радиуса $r = 0{,}2$ м для равномерного подъёма груза 1 весом 200 Н. **Ответ:** 20 Нм.
	**2 (46.9).** Полиспаст состоит из одного неподвижного и двух подвижных блоков. Определить в случае равновесия отношение массы поднимаемого груза к силе $\boldsymbol{P}$. **Ответ**: 4.
	**3 (46.10).** Дан кривошипно-кулисный механизм, при этом $OC = 1$, $OK = 0{,}3$ м, $\varphi = 30^0$. Найти величину силы $\boldsymbol{Q}$ для уравновешивания силы $P = 40$ Н. **Ответ:** 16 Н.

	**4 (2.4.35)** Определить реакции в заделке A, если $T=50$ Н, $Q=100$ Н, а размеры $AB=BC=2$ м. Сделать проверку.
	**5 (46.27).** Балка, которая состоит из двух частей, закреплена в жёсткой заделке и подвижном шарнире. Определить реакцию опор, если $F=10$ Н, $\alpha=60^0$ и $a=1$ м. **Ответ:** $X_A=5$, $Y_A=4{,}33$ Н, $M_A=8{,}66$ Нм.
	**6 (3.2.9)** Два стержня соединены в шарнире B. Определить реакции в опорах, если $T=60$, $Q=60$ Н и $AD=DB=2$, $BE=EC=3$ м. Сделать проверку.
	**7 (47.4).** Два груза массы $M_1=20$ $M_2=34$ кг подвешены на тросах, которые намотаны на барабаны с радиусами $r_1=0{,}05$, $r_2=0{,}1$ м и массами $m_I=4$, $m_{II}=8$ кг равномерно распределёнными по ободам колёс. Определить угловое ускорение колёс и натяжение в нитях. **Ответ:** $\varepsilon=49$ 1/с^2, $T_1=246$, $T_2=167$ Н.
	**8 (47.5).** К системе блоков подвешены грузы с массами $M_1=10$ $M_2=8$ кг. Определить ускорение второго груза и натяжение нити, пренебрегая массами блоков. **Ответ:** $a_2=2{,}8$ м/с^2, $T=56{,}1$ Н.
	**9 (19.2.13).** Определить угловое ускорение барабана 1, если к нему приложена пара сил с постоянным моментом $M=0{,}2$ Нм, массы тел $m_1=m_2=1$ кг, моменты инерции относительно центральных осей $I_1=I_2=0{,}02$ кг·м^2, радиусы $r_1=r_2=0{,}2$ м. **Ответ:** 2,5 1/с^2.
	**10 (19.3.11).** Определить модуль силы F, под действием которой тело 1 массой 10 кг поднимается с постоянным ускорением $a=1$ м/с^2. **Ответ:** 108 Н.
	**11 (19.3.20).** Определить модуль силы F, под действием которой центр C однородного сплошного катка 1, масса которого 20 кг, а радиус $r=0{,}4$ м, движется вверх с постоянным ускорением $a_C=1$ м/с^2. **Ответ:** 128 Н.

<table>
<tr><td>
</td><td>12 (19.3.16). Определить модуль момента M пары сил, если тело 1 поднимается с ускорением 1 м/с^2, массы тел $m_1 = m_2 = 2$ кг, радиус однородно цилиндрического барабана 2 $r_2 = 0{,}2$ м. Ответ: 4,52 Нм.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>13 (20.2.2). Однородный стержень длинной 3 м и массой 30 кг вращается в вертикальной плоскости. Определить обобщённую силу которая соответствует обобщённой координате φ, в момент времени, когда $\varphi = 45^0$. Ответ: -312 Нм.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>14 (20.2.8). Грузы 1 и 3 массой 30 и 10 кг присоединены к нерастяжимому тросу, который переброшен через блок 2 массой 5 кг. Определить обобщённую силу, которая соответствует обобщённой координате s_1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">15 (20.5.3). Обобщённая сила системы $Q_\varphi = -20\sin\varphi$, где Q_φ – Нм, φ – обобщённая координата, рад. Определить угловое ускорение в момент времени, когда $\varphi = 3$, если кинетическая энергия системы $E = 5(\varphi^/)^2 + 30 \cdot \varphi^/ \cdot \sin\varphi$. Ответ: -0,282</td></tr>
<tr><td>
</td><td>16 (20.5.13). Механическая система, которая состоит из тела 1 массой 20 кг и цилиндра 2 с моментом инерции $I_O = 2$ кг●м^2, имеет кинетическую энергию $E = 35(s^/)^2$. Определить ускорение тела 1, если момент пары сил $M = 20$ Нм, радиус $r = 0{,}2$ м. Ответ: 0,470</td></tr>
<tr><td>
</td><td>17 (20.5.15). Определить угловое ускорение катка 1, который катится без скольжения, если на блок 2 действует пара сил с моментом $M = 0{,}6$ Нм. Каток 1 считать однородным цилиндром массой 4 кг и радиусом 0,5 м. Ответ: 0,4 1/с^2.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>18 (20.5.14). Определить угловое ускорение диска 1, если на него действует пара сил с моментом $M = 0{,}4$ Нм. Массы и радиусы дисков одинаковы и равны 10 кг и 0,2 м соотвественно. Ответ: 1 1/с^2.</td></tr>
</table>