Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет
имени Т. Ф. Горбачева»

В. А. Гоголин И. А. Ермакова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

КЕМЕРОВО 2016

УДК 517.1:517.2:517.3

Рецензенты:

Профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет» доктор физико-математических наук А. В. Ханефт

Доцент Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г. В. Плеханова кандидат физико-математических наук Я. В. Славолюбова

Гоголин В. А. **Математический анализ** : учеб. пособие / В. А. Гоголин, И. А. Ермакова ; КузГТУ. – Кемерово, 2016. – 114 с.

ISBN 978-5-906888-19-8

Учебное пособие содержит разделы математического анализа функции одной и нескольких переменных. Логически последовательно, начиная с понятия предела и заканчивая кратными интегралами, излагаются теоретические аспекты дифференциального и интегрального исчисления. Теоретический материал иллюстрируется рисунками и подробными примерами.

Подготовлено для студентов технических и экономических направлений, изучающих дисциплины «Математика» и «Математический анализ».

Печатается по решению редакционно-издательского совета КузГТУ.

УДК 517.1:517.2:517.3

ISBN 978-5-906888-19-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математический анализ является основным разделом дисциплины «Математика», изучаемой студентами технических и экономических специальностей. Математический анализ – часть математики, в которой функции изучаются на основе теории пределов. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины.

Развитие математического анализа началось в XVII веке с анализа бесконечно малых функций. Основоположниками нового направления математики стали Г. Лейбниц, Л. Эйлер, Ж. Лагранж. Систематическое, целое изложение анализа бесконечно малых было выполнено И. Ньютоном, а полная теория пределов разработана О. Коши в начале XIX века. На этой основе были определены основные категории математического анализа: производная, дифференциал, интеграл. В настоящее время этот раздел математики объединяет дифференциальное и интегральное исчисление.

Знание математического анализа позволяет студентам в дальнейшем усвоить различные дисциплины, такие как: теоретическая механика, физика, электротехника, теория вероятностей, эконометрика и многие другие.

Учебное пособие составлено на основе многолетнего опыта преподавания авторами в вузе математического анализа будущим инженерам и экономистам. В нем в доступной форме с использованием достаточного количества примеров разъясняются наиболее сложные вопросы математического анализа, учтены методические приемы к изложению математического анализа.

Учебное пособие предназначено для изучения студентами теоретической части дисциплин «Математика» и «Математический анализ», а также для использования на практических занятиях.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Общие представления о функции одной переменной

1.1.1. Понятие функции одной переменной и способы ее задания

Функцией называется закон или правило, по которому каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.

При этом x называется независимой переменной или аргументом, y – зависимой переменной или функцией, множество X или $D(f)$ – областью определения функции, а множество Y или $E(f)$ – областью значений. Можно сказать, что функция f осуществляет отображение множества X в множество Y, то есть $X \to Y$. Значение функции при фиксированном $x = x_0$ равно $f(x_0) = y_0$, оно называется частным значением функции.

<u>Пример.</u> Задана функция $y = f(x) = 2x + 3$, найти $f(4)$.

Решение. Подставим в выражение функции $x = 4$: $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Зададим две оси: ось Ox – ось абсцисс и ось Oy – ось ординат, которые определяют координатную плоскость. Задавая различные значения x и рассчитав соответствующие значения $y = f(x)$, получим множество точек $M(x;\, y)$, которые можно изобразить на координатной плоскости. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Способы задания функции

1. Аналитический способ – с помощью формулы.

Например, $y = 3x^2 + 1$, $y = \sin x$ и т. п. – это функции, заданные формулами.

2. Табличный способ – с помощью таблицы. Примером являются таблицы Брадиса.

3. Графический способ – с помощью графика. Например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют самопишущий барограф, который записывает на движущейся ленте в виде кривой изменение давления в зависимости от высоты.

1.1.2. Область определения

Областью определения функции называется совокупность значений независимой переменной, при которой эта функция определена. Если функция задана формулой (аналитически), то область определения находится из нее. При этом существуют следующие ограничения:

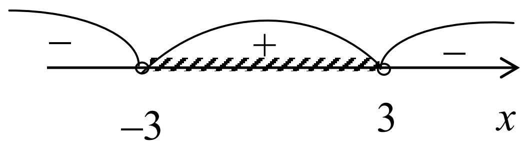
1) $y = \dfrac{1}{\varphi(x)}, \ \ \varphi(x) \neq 0;$ 2) $y = \sqrt[2n]{\varphi(x)}, \ \ \varphi(x) \geq 0;$

3) $y = \log_a \varphi(x), \ \ \varphi(x) > 0;$ 4) $\begin{array}{l} y = \arcsin \varphi(x), \\ y = \arccos \varphi(x), \ \ |\varphi(x)| \leq 1. \end{array}$

<u>Пример 1.</u> Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Решение. Учитывая ограничения 1) и 2), запишем: $9 - x^2 > 0$. Найдем корни: $9 - x^2 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = 9 \ \Rightarrow \ x = \pm 3$.

Отложим корни на числовой оси и определим знаки в интервалах.

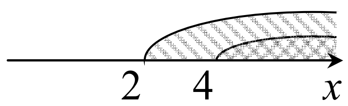


Выбираем нужный интервал: $x \in (-3; 3)$.

<u>Пример 2.</u> Найти область определения функции $y = \sqrt{x - 4} + \log_3(x - 2)$.

Решение. Учтем ограничения 2) и 3), а также то, что областью определения является общая часть тех числовых множеств, при которых существуют оба слагаемых:

$$D = \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4.$$



1.1.3. Сложная и обратная функции

Сложная функция. Если $y = f(u), \ u \in U$, а $u = \varphi(x), \ x \in X$, то зависимая переменная y называется сложной функцией или композицией функций и записывается в виде $y = f(\varphi(x))$. При этом x

является независимой переменной, а u – промежуточной переменной.

Пример 1. $y = \sin^2(2x+1)$ является сложной функцией двух промежуточных аргументов *u* и *t*, $y = u^2$, где $u = \sin t$, $t = 2x+1$.

Обратная функция. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие $y = f(x)$, при котором каждый элемент $y \in Y$ является образом одного и только одного элемента $x \in X$, и наоборот. Тогда можно, считая *y* аргументом, вычислять соответствующие значения *x,* то есть значения функции $x = f^{-1}(y)$.

Пример 2. Функция $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$ задает зависимость объема шара *V* от его радиуса *R*. Разрешив это уравнение относительно радиуса, получим обратную функцию $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

Придерживаясь стандартных обозначений, под *x* понимаем независимую переменную, а под *y* – функцию. В таком случае обратную функцию следует записать в виде $y = f^{-1}(x)$.

Пример 3. Найти обратную функцию к функции $y = 2^x$.

Решение. Выразим *x*: $x = \log_2 y$, так как независимая переменная обозначается как *x*, а функция – как *y*, то получим $y = \log_2 x$. Таким образом, функции $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ являются взаимно обратными.

Чтобы из графика функции $y = f(x)$ получить график обратной функции $y = f^{-1}(x)$, нужно первый график зеркально отобразить относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 1.1).

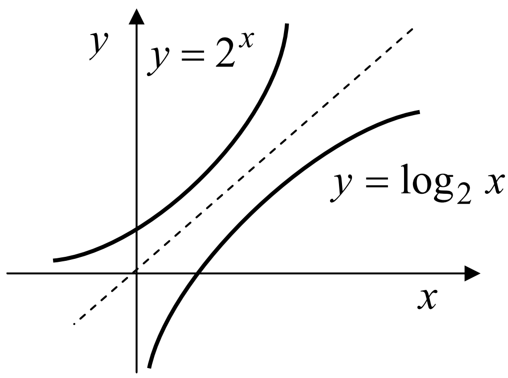


Рис. 1.1

1.1.4. Характеристики поведения функции

1. Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого $x \in D$ выполняется условие

$$f(-x) = f(x). \tag{1.1}$$

Например, функции $y = x^2$, $y = \sqrt{x^2 - 3}$, $y = \cos x$ являются четными. График четной функции симметричен относительно оси OY, например, график $y = x^4$ (рис. 1.2).

Функция называется ***нечетной***, если для любого $x \in D$ выполняется

$$f(-x) = -f(x). \tag{1.2}$$

Примерами нечетной функции являются $y = x^3$, $y = \sin x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 1.3).

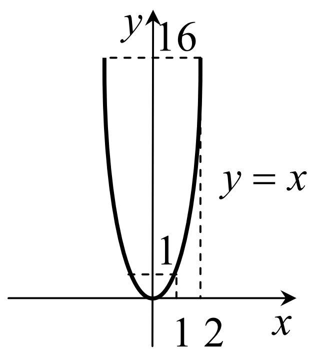


Рис. 1.2

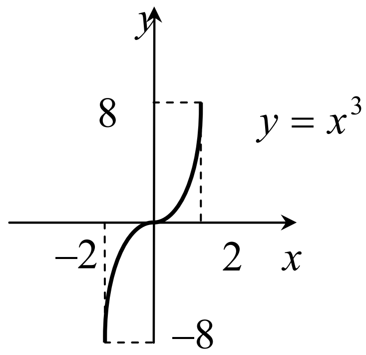


Рис. 1.3

Функции, не удовлетворяющие соотношениям (1.1) и (1.2), называются функциями общего вида.

Следует заметить, что произведение двух четных, а также двух нечетных функций дает функцию четную, а произведение четной на нечетную – нечетную. Например, функция $y = x \cdot \sin x$ – четная, а $y = x \cdot \cos x$ – нечетная.

<u>**Пример 1.**</u> Проверить функцию $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ на четность – нечетность.

Решение. Подставим в формулу вместо x значение $(-x)$, то есть найдем $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -\dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$. Перед выражением появился знак «минус», то есть $f(-x) = -f(x)$. Эта функция – нечетная (1.2).

2. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число *T*, что при любом значении $x \in D$ выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x). \qquad (1.3)$$

Наименьшее число *T*, удовлетворяющее данному условию, называется периодом функции.

Например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$; функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ имеют период $T = \pi$.

<u>Пример 2</u>. Найти период функции $y = \sin 2x$.

Решение. График функции $y = \sin 2x$ получается из графика $y = \sin x$ сжатием в два раза вдоль оси абсцисс (рис. 1.4). Так как для $y = \sin x$ период $T = 2\pi$, то у функции $y = \sin 2x$ период в два раза меньше, $T = \pi$.

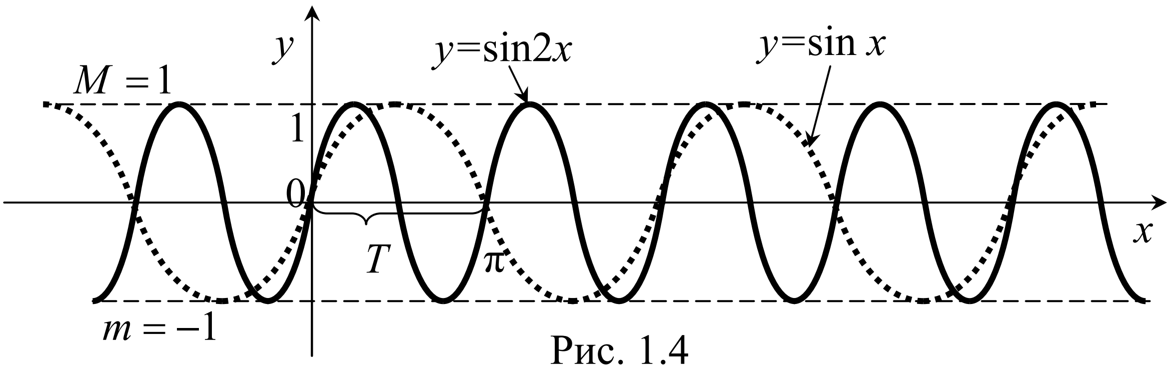


Рис. 1.4

3. Ограниченность

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на $x \in [a, b]$, если существует такое число *M*, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется условие

$$f(x) \le M. \qquad (1.4)$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на $x \in [a, b]$, если существует такое число *m*, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется условие

$$f(x) \ge m. \qquad (1.5)$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху и снизу* на $x \in [a, b]$, если для всех $x \in [a, b]$ выполняется условие

$$m \le f(x) \le M. \qquad (1.6)$$

График такой функции располагается между горизонтальными прямыми $y = m$ и $y = M$. Примерами функций, ограниченных на всей области определения, являются $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, здесь $-1 \le f(x) \le 1$ (см. рис. 1.2).

4. Возрастание, убывание

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей***, если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции y. То есть при $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_2)$ (рис. 1.5, *а*).

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей***, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. При $x_2 > x_1$ выполняется $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 1.5, *б*).

а) *б*)

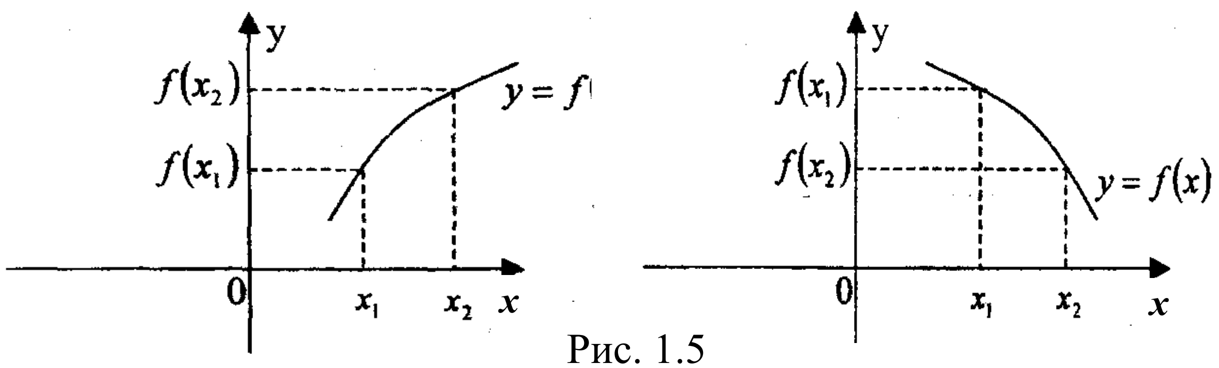


Рис. 1.5

Такие функции называются монотонными.

Если функция не является монотонной, то выделяют интервалы монотонности. Например, функция $y = x^4$ является убывающей на множестве $x = (-\infty, 0)$, а на множестве $x = (0, +\infty)$ эта функция является возрастающей (см. рис. 1.2).

1.1.5. Основные элементарные функции и их графики

1. Степенная функция $y = x^n$.

а) $n = 1$. Линейная функция $y = kx + b$ (рис. 1.6).

Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$. Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$;

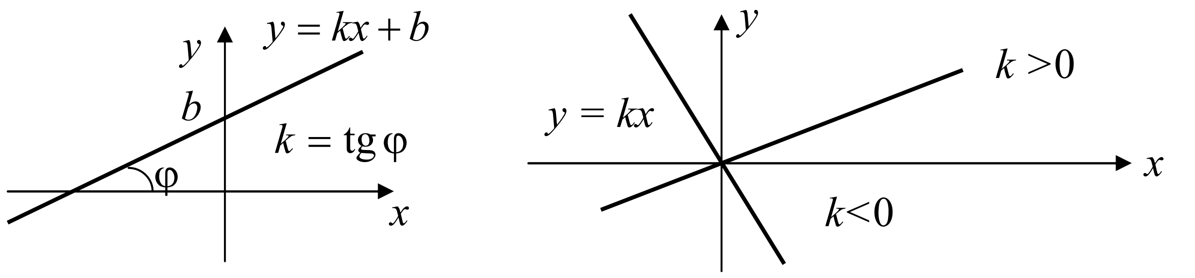


Рис. 1.6

б) n – целое, $n > 1$ (рис. 1.7).

Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$, область значений $y \in [0; +\infty)$ при n четном (рис. 1.7, *а*); или $y \in (-\infty; +\infty)$ при n нечетном (рис. 1.7, *б*);

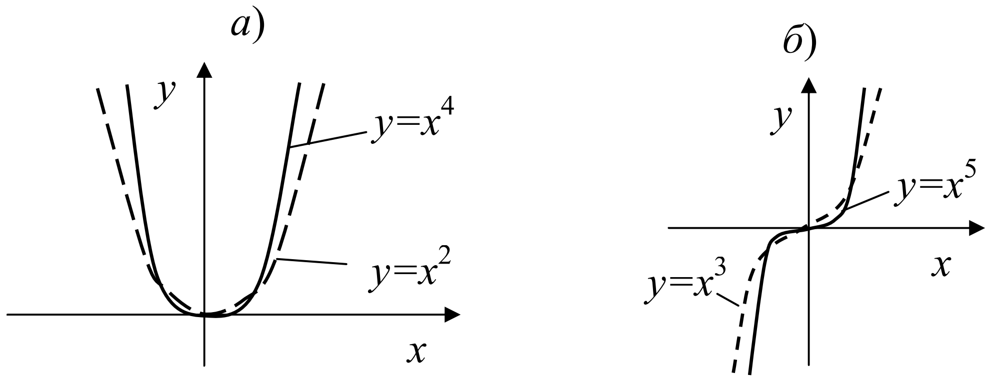


Рис. 1.7

в) n – целое, $n < 1$ (рис. 1.8).

Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$, область значений $y \in [0; +\infty)$ при n четном (рис. 1.8, *а*); или $y \in (-\infty; +\infty)$ при n нечетном (рис. 1.8, *б*);

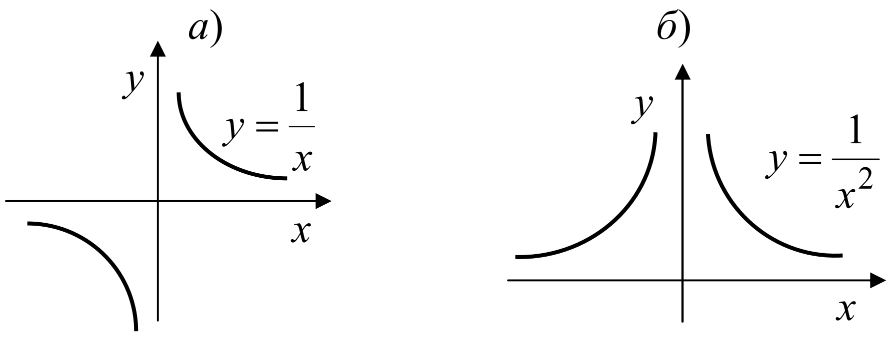


Рис. 1.8

г) n – дробное (рис. 1.9).

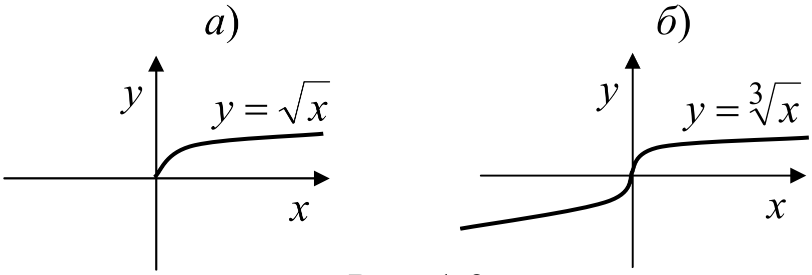


Рис. 1.9

2. Показательная функция $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ (рис. 1.10).

Область определения $x \in (-\infty;+\infty)$. Область значений $y \in (0;+\infty)$.

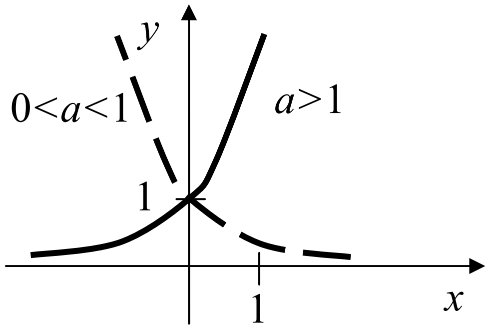


Рис. 1.10

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ (рис. 1.11). Область определения $x \in (0;\ +\infty)$. Область значений $y \in (-\infty;\ +\infty)$.

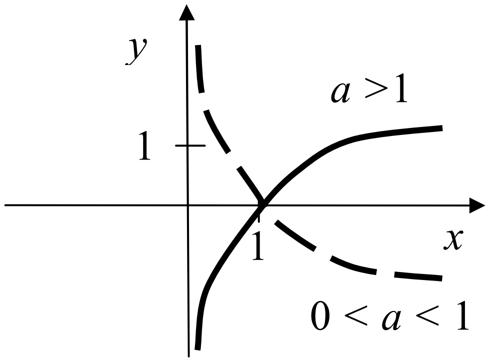


Рис. 1.11

4. Тригонометрические функции

а) $y = \sin x$ (рис. 1.12, *а*). Область определения $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Область значений $y \in [-1; 1]$. Периодическая, с периодом $T = 2\pi$. Нечетная;

б) $y = \cos x$ (рис. 1.12, *б*). Область определения $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Область значений $y \in [-1; 1]$. Периодическая, с периодом $T = 2\pi$. Четная;

в) $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 1.12, *в*). Область определения $x \in R$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ Область значений $y \in (-\infty;\ +\infty)$. Периодическая, с периодом $T = \pi$. Нечетная;

г) $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 1.12, *г*). Область определения $x \in R$, $x \neq \pi k, k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ Область значений $y \in (-\infty;\ +\infty)$. Периодическая, с периодом $T = \pi$. Четная.

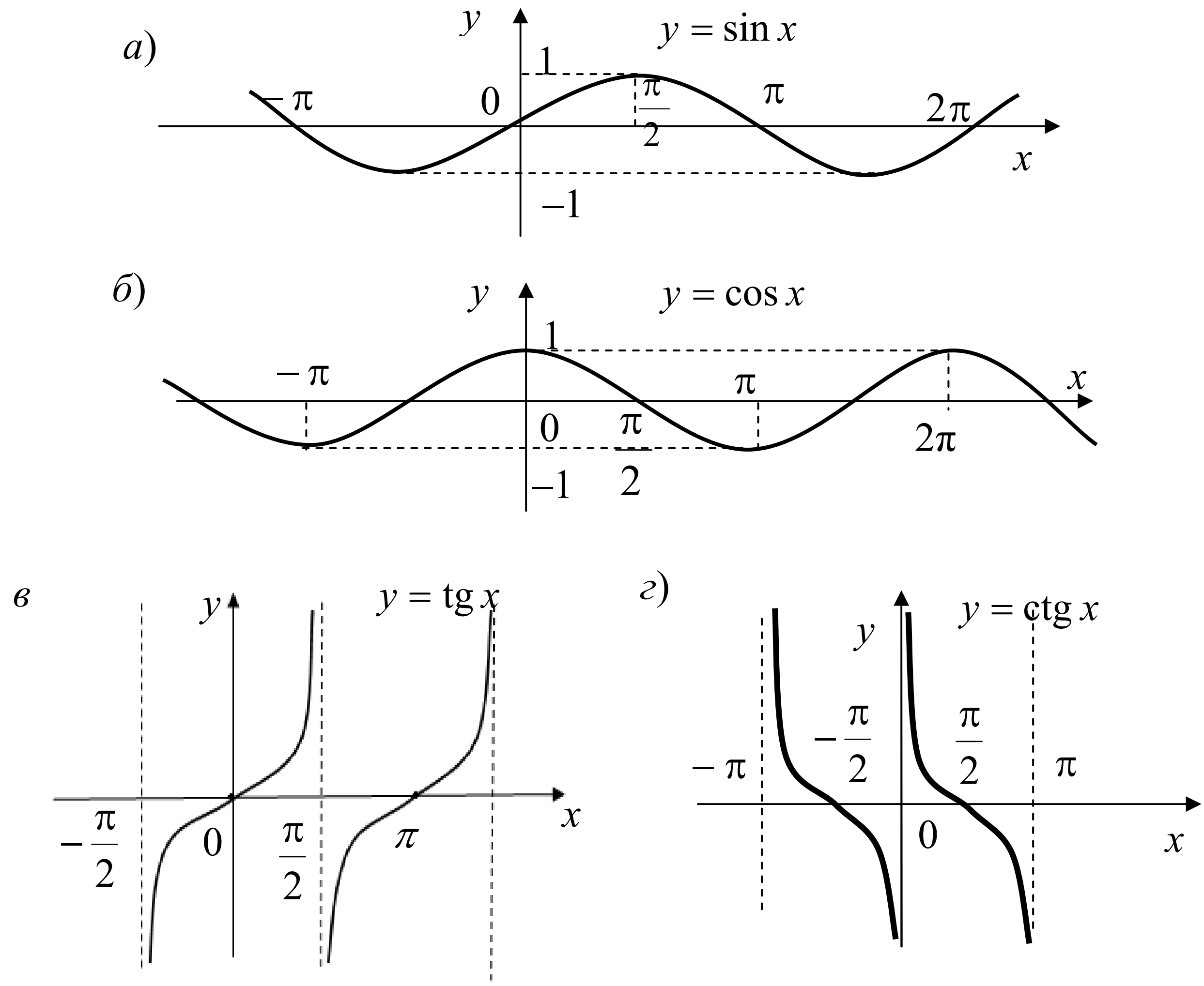


Рис. 1.12

5. Обратные тригонометрические функции

а) $y = \arcsin x$ (рис. 1.13, *а*). Область определения $x \in [-1;\ 1]$. Область значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Нечетная;

б) $y = \arccos x$ (рис. 1.13, *б*). Область определения $x \in [-1;\ 1]$. Область значений $y \in [0;\ \pi]$;

в) $y = \mathrm{arctg}\, x$ (рис. 1.13, *в*). Область определения $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Область значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Нечетная, возрастающая;

г) $y = \mathrm{arcctg}\, x$ (рис. 1.13, *г*). Область определения $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Область значений $y \in (0;\ \pi)$, убывающая.

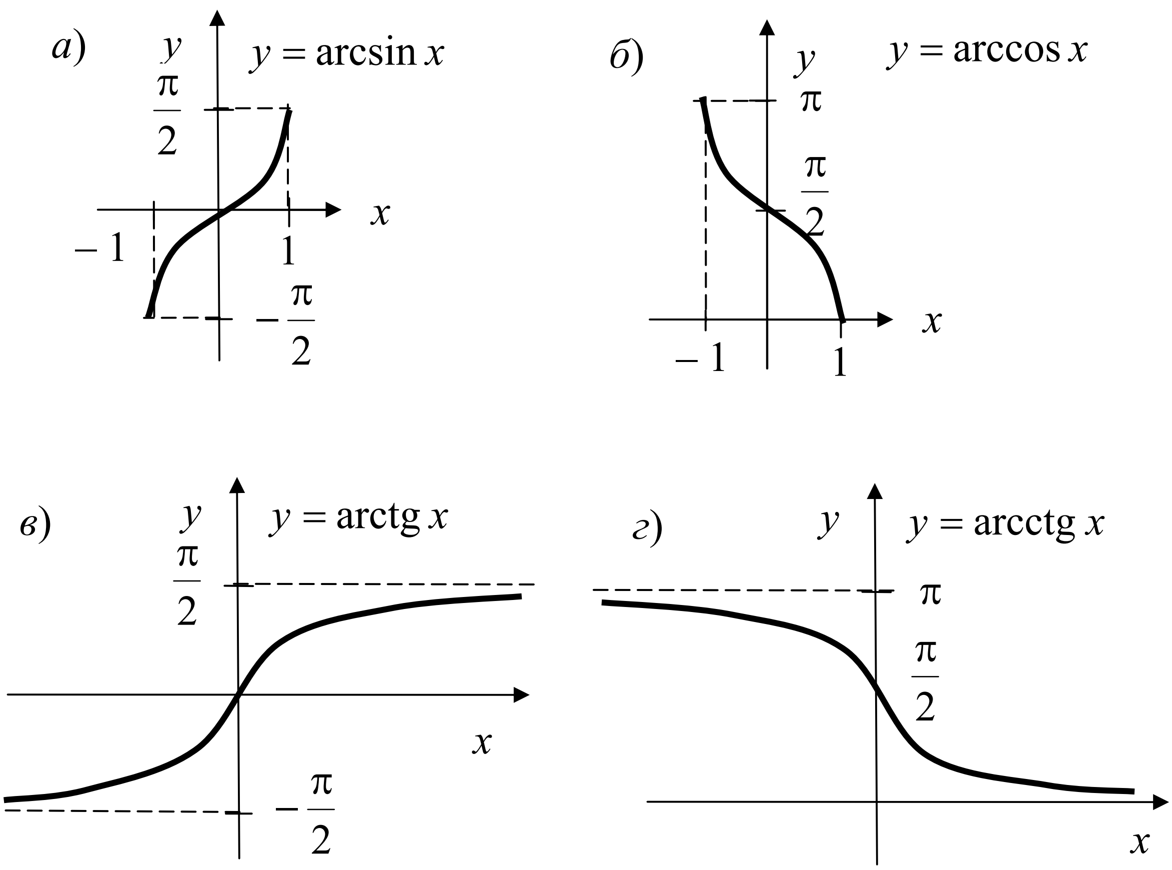


Рис. 1.13

Элементарной называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз. Например: $y = 2^{\sqrt{\cos x}} + \lg x$.

Графики элементарных функций можно получить путем деформации и сдвигов, отображением относительно осей координат, графическим сложением графиков основных элементарных функций. По виду заданной функции определяем группу преобразований. Для этого удобно воспользоваться табл. 1.1.

Таблица 1.1

Преобразование графиков функций

№	Вид функции	Преобразование графика	Неподвижные точки графика
1	$y = f(x+a),\ a > 0$	Сдвиг по оси Ox влево на a единиц	
2	$y = f(x-a),\ a > 0$	Сдвиг по оси Ox вправо на a единиц	
3	$y = f(a \cdot x),\ a > 1$	Сжатие в a раз вдоль оси Ox	
4	$y = f\left(\dfrac{x}{a}\right),\ a > 1$	Растяжение в a раз вдоль оси Ox	
5	$y = f(x) + a,\ a > 0$	Сдвиг по оси Oy вверх на a единиц	
6	$y = f(x) - a,\quad a > 0$	Сдвиг по оси Oy вниз на a единиц	
7	$y = a \cdot f(x)$	Растяжение по оси Oy в a раз	Точки пересечения графика функции с осью Ox
8	$y = -f(x)$	Зеркальное отображение относительно оси Ox	Точки пересечения графика функции с осью Ox
9	$y = f(-x)$	Зеркальное отображение относительно оси Oy	Точка пересечения графика функции с осью Oy

Пример. Построить график функции $y = 2\cdot 3^{x-4} + 1$ путем преобразования графика соответствующей элементарной функции.

Решение. Построим последовательно графики.

1) $y_1 = 3^x$ – основная элементарная функция (рис. 1.14);

2) $y_2 = 3^{x-4}$ – по табл. 1.1 определяем, что функция вида № 2, и ее график получаем путем сдвига графика y_1 на 4 единицы вправо по оси Ox;

3) $y_3 = 2\cdot 3^{x-4}$ получаем путем растяжения в два раза вдоль оси Oy графика $y_2 = 3^{x-4}$ (табл. 1.1, № 7);

4) $y = 2\cdot 3^{x-4} + 1$ – окончательный график получаем сдвигом графика $y_3 = 2\cdot 3^{x-4}$ по оси Oy вверх на одну единицу (табл. 1.1, № 5).

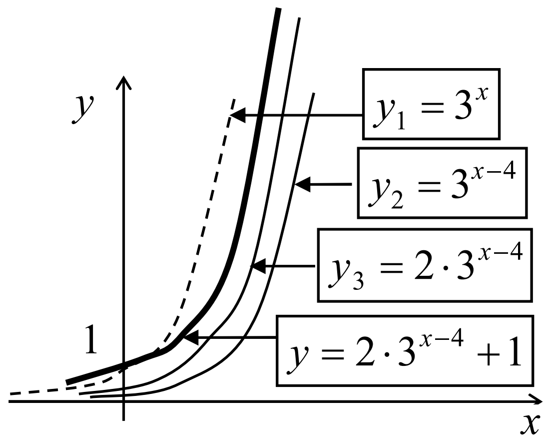


Рис. 1.14

Пример неэлементарной функции:

$$y = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ -x, & -1 \le x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 1.15.

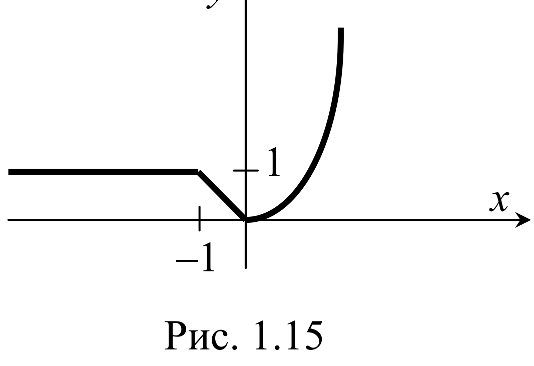


Рис. 1.15

1.2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1.2.1. Предел функции на бесконечности

Рассмотрим функцию $y = 4 - \dfrac{1}{x}$ на интервале $]0, \infty[$.

Составим таблицу значений и построим график (рис. 1.16).

x	1	2	3	10	100	1000	...
$f(x)$	3	3,5	3,7	3,9	3,99	3,999	...

Рассмотрим расстояние между точками графика $y = f(x) = 4 - \dfrac{1}{x}$ и прямой $y = 4$: $d = \left|f(x) - 4\right| = \left|\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) - 4\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

Зададим это расстояние $d = \varepsilon$ и рассчитаем x**.**

Если $\varepsilon = \dfrac{1}{|x|}$, то $|x| = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}1$ $x = 10$ и $\left|f(x) - 4\right| < 0{,}1$.

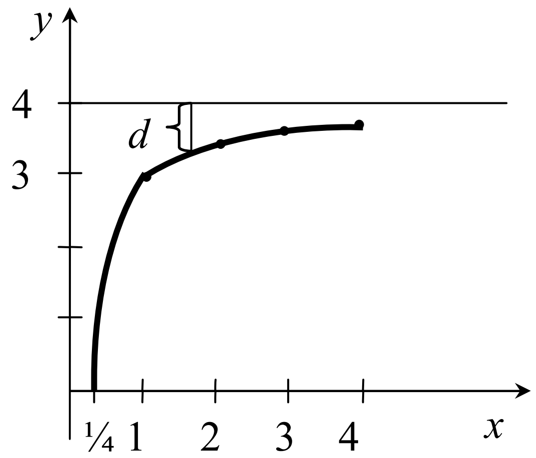


Рис. 1.16

При $\varepsilon = 0{,}01$ $\left|f(x) - 4\right| < 0{,}01$, начиная с $x > 100$.

Таким образом, можно задать какую угодно степень близости функции к числу 4, которое является ее пределом при $x \to \infty$.

Число A называется пределом $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, существует такое число

$N > 0$, зависящее от ε, что для $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение предела функции при $x \to -\infty$.

Число B называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x < -M$ справедливо неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.

1.2.2. Предел функции в конечной точке. Односторонние пределы

Если при произвольном и неограниченном приближении аргумента x к значению x_0 соответствующие значения $f(x)$ неограниченно близко подходят к числу A, то говорят, что A является ***пределом функции*** $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$). При этом в самой точке x_0 значение функции $f(x)$ может и не существовать.

Дадим строгое определение предела $f(x)$ при $x \to x_0$.

Число A называется пределом $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Иногда приходится рассматривать пределы $f(x)$ при условии, что x приближается к x_0, оставаясь только слева (то есть при $x < x_0$) или только справа (при $x > x_0$). Такие пределы называются ***односторонними***. Число A называется левосторонним пределом $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Обозначается: $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Аналогично определяется правосторонний предел $f(x)$ в точке x_0, который обозначается: $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

1.2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y = \alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** (б. м.) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0. \tag{1.7}$$

Другими словами $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, то есть $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при x достаточно близких к x_0.

Аналогично определяются б. м. при $x \to \pm x_0$ и при $x \to \pm\infty$.

<u>Пример 1</u>. $y = 4 - \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to \frac{1}{4}$, так как $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой*** (б. б.) в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty . \tag{1.8}$$

<u>Пример 2</u>. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является бесконечно большой при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$. Эта же функция является бесконечно малой при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0$.

1.2.4. Свойства бесконечно малых функций и их связь с бесконечно большими

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая.

Свойство справедливо для любого конечного числа таких сомножителей.

Следствие. Произведение конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой величиной.

3. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая. И наоборот.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно большая, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно малая.

Пример. Функция $y = x^2$ – бесконечно большая при $x \to \infty$, а $y = \dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно малая при $x \to \infty$.

1.2.5. Основные свойства пределов

Свойство 1. Предел суммы (разности, произведения) функций равен сумме (разности, произведению) пределов этих функций, если каждый из них существует:

$$\lim_{x \to x_0} \left(u(x) \pm v(x)\right) = \lim_{x \to x_0} u(x) \pm \lim_{x \to x_0} v(x).$$

Свойство 2. Предел частного функций равен частному пределов, если каждый из них существует и знаменатель не обращается в ноль:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}.$$

Свойство 3. Предел постоянной величины равен ей самой:

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

Свойство 4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} \left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Свойство 5. Предел степенной функции:

$$\lim_{x \to x_0} f^p(x) = \left(\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)\right)^p.$$

Свойство 6. Предел показательной функции:

$$\lim_{x \to x_0} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}.$$

Свойство 7. Пусть даны три функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$ в промежутке $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Если функции $\varphi(x)$, $g(x)$ имеют один и тот же предел при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$, то и функция $f(x)$, заключенная между ними, имеет тот же предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

1.2.6. Нахождение пределов

Для всех элементарных функций в точке x_0 из области определения значение функции равно пределу функции. Поэтому для нахождения предела функции следует подставить значение предельной точки в выражение функции. Если получено число, то оно и является пределом функции. Если получена неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty\right)$, то она раскрывается с помощью специальных приемов.

1. Нахождение пределов в конечной точке при $x \to x_0$.

<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x \to -2} \frac{6x^2 + 3x + 1}{x^2 - x - 3} = \frac{6(-2)^2 + 3(-2) + 1}{(-2)^2 - (-2) - 3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x \to 3} \frac{4x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \left(\frac{14}{0}\right) = \infty.$$

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0}{4} = 0.$$

<u>Пример 4.</u>

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Это неопределенность. Чтобы раскрыть ее, разложим числитель и знаменатель на множители.

В числителе воспользуемся формулой $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$.

Знаменатель разложим по формуле

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения.

Найдем корни: $x^2 - 5x + 4 = 0$, $D = 5^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 9$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = 1; 4$. Тогда $x^2 - 5x + 6 = (x-1)\cdot(x-4)$. Имеем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x-1} = \frac{4+4}{4-1} = \frac{8}{3}.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\langle \begin{array}{l}\text{домножим числитель и знаменатель}\\ \text{на множитель, сопряженный к числителю}\end{array}\right\rangle =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

2. Нахождение пределов на бесконечности при $x \to \infty$.

Рассмотрим два способа.

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{5x^3+6x-1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на *x* в высшей степени, то есть на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{5x^3+6x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{3/x^2 + 4/x^3}{5 + 6/x^2 - 1/x^3} = \frac{0}{5} = 0, \text{ так как}$$

$$\lim_{x\to\infty} 3/x^2 = \lim_{x\to\infty} 4/x^3 = \lim_{x\to\infty} 6/x^2 = \lim_{x\to\infty} 1/x^3 = 0.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{5x^3+6x-1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Чтобы раскрыть эту неопределенность, заменим числитель и знаменатель эквивалентными на бесконечности функциями, для чего оставляем наибольшие степени в этих выражениях:

$(3x+5)$ ~ (эквивалентно) $3x$; $\left(5x^3+6x-1\right)\sim 5x^3$.

Получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{5x^3+6x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{5x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{5x^2}=\dfrac{3}{5\cdot\infty}=0$.

Пример 8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+8x-3}{7x^2+9}=\left\langle\begin{matrix}2x^4+8x-3\sim 2x^4\\ 7x^2+9\sim 7x^2\end{matrix}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{7x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{7}=\infty.$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-1}{6x^2+2x}=\left\langle\begin{matrix}4x^2+3x-1\sim 4x^2\\ 6x^2+2x\sim 6x^2\end{matrix}\right\rangle=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{6x^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

В общем случае имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\dots+b_0}=\begin{cases}0, \text{ если } n<k\\ \infty, \text{ если } n>k\\ \dfrac{a_n}{b_k}, \text{ если } n=k\end{cases}$$

Пример 10.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\left\{\frac{-4}{\infty}\right\}=0.$$

Пример 11.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=\sin(\infty)$ – не существует, так как значение функции колеблется от (–1) до (+1). Аналогично не существуют пределы и других тригонометрических функций при $x\to\pm\infty$.

3. Нахождение односторонних пределов.

<u>Пример 12.</u> Найти односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{x-1}=\frac{1-0-2}{(1-0)-1}=(\text{здесь } 0-\text{бесконечно малая величина})=$$

$$=\frac{-1}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-2}{x-1}=\frac{1-0-2}{(1+0)-1}=\frac{-1}{+0}=-\infty.$$

1.2.7. Первый замечательный предел

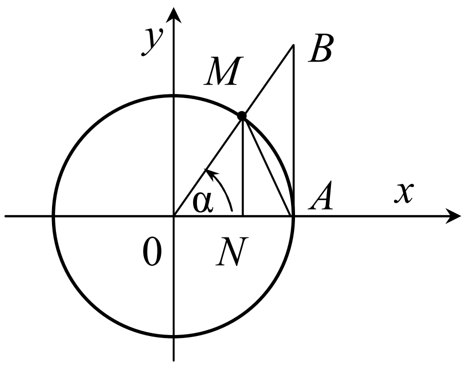


Рис. 1.17

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \qquad (1.9)$$

Доказательство. Рассмотрим для круга с радиусом $OA = 1$ дугу AM, радиальная мера которой равна α (рис. 1.17).

При этом $AB=\operatorname{tg}\alpha$, $NM=\sin\alpha$, (в силу четности функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ можно рассматривать только случай $\alpha>0$).

Так как $S_{\Delta OAM}<S_{\text{сек}}<S_{\Delta OAB}$, где $S_{\text{сек}}$ – площадь сектора OAM, то есть $\frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, то $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$. Поделив обе части неравенства на $\sin\alpha>0$, получим $1<\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}<\dfrac{1}{\cos\alpha}\Rightarrow$ $\Rightarrow 1>\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha$. И так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}1=1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$, то из свойства 7 следует равенство (1.9).

<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

1.2.8. Второй замечательный предел

Рассмотрим функцию натурального аргумента $y=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Таблица значений этой функции показывает, что $2<y<3$.

n	1	2	3	4	...	10	...	100	...	1000	...
y	2	2,25	2,37	2,44	...	2,53	...	2,705	...	2,707	...

В полных курсах математического анализа доказывается, что предел этой функции (числовой последовательности) при $x\to\infty$ равен числу $e=2{,}7182818...$. Это число является основанием натуральных логарифмов $\ln a=\log_e a$.

Получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

Эта форма второго замечательного предела справедлива и для действительного аргумента, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (1.10)$$

Положив $x=\dfrac{1}{\alpha}$, откуда $\alpha=\dfrac{1}{x}$, получим другую форму второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \qquad (1.11)$$

Второй замечательный предел используется для раскрытия неопределенности $\left(1^{\infty}\right)$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}\cdot 3x}=e^{6}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{выделим}\\ \text{целую часть}\end{array}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)+5}{x-3}\right]^{x}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{5}{x-3}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{1-\frac{3}{x}}}=e^{5}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right]=\lim_{x\to\infty}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

1.2.9. Эквивалентные функции

Пусть α и β бесконечно малые при $x\to x_0$ (или $x\to\infty$). Тогда если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то α и β – ***эквивалентные*** бесконечно малые. Обозначение $\alpha\sim\beta$.

Пример 1. Бесконечно малые при $x\to 0$ функции $y=x$ и $y=\operatorname{arctg}x$ являются эквивалентными, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\langle\begin{array}{c}\operatorname{arctg}x=t\\ x=\operatorname{tg}t\\ x\to 0,\, t\to 0\end{array}\right\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}t}{t}=1.$$

Ниже приведены эквивалентные бесконечно малые функции в точке $x = 0$.

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x, \qquad \mathrm{tg} x \sim x,$$

$$\mathrm{arctg} x \sim x, \qquad \ln(1+x) \sim x, \qquad e^x - 1 \sim x,$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}, \qquad \sqrt{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{2}$$

Аналогично сравниваются бесконечно большие величины.

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 3x - 5}{2x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{2} = 1.$$

Поэтому $\left(2x^3 + 3x - 5\right) \sim \left(2x^3\right)$ при $x \to \infty$. Этот прием (переход к эквивалентным величинам) удобно использовать при нахождении пределов на бесконечности (см. п. 1.2.6).

Рассмотрим применение эквивалентных бесконечно малых к вычислению пределов функций.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0} 3\sqrt{x} = 0, \text{ так как } \sin 3x \sim 3x.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\mathrm{tg}(4 - x^2)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{4 - x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)(2+x)} = -\frac{(2-3)}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

1.3. Непрерывность функции

1.3.1. Определение функции, непрерывной в точке

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если она определена в этой точке, и бесконечно малому приращению Δx

аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \qquad (1.12)$$

Здесь $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$. Так как $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Получим, что $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$, откуда: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из этого равенства имеем три условия непрерывности функции:

1) значение $f(x_0)$ существует, то есть $f(x)$ определена в точке x_0;

2) односторонние пределы существуют и равны между собой, то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

3) односторонние пределы и значение функции в точке x_0 равны между собой: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} = f(x_0)$.

Если хотя бы одно из условий 1–3 нарушено, то x_0 называется точкой разрыва.

1.3.2. Точки разрыва и их классификация

Точка x_0 называется ***точкой разрыва 1 рода***, если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)$.

Точка x_0 разрыва 1 рода, в которой

$$\lim_{x\to x_{0+0}} f(x) = \lim_{x\to x_{0-0}} f(x) \neq f(x_0),$$

называется ***точкой устранимого разрыва.***

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва 1 рода, называется ***точкой разрыва 2 рода***.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{x-1}$, построить график.

Функция не определена в точке $x_0 = 1$, следовательно, эта точка является точкой разрыва (не выполнено первое условие непрерывности).

Для определения характера разрыва найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-0}=-\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Оба предела бесконечны, что означает, что $x = 1$ является точкой разрыва 2 рода или точкой бесконечного разрыва (рис. 1.18).

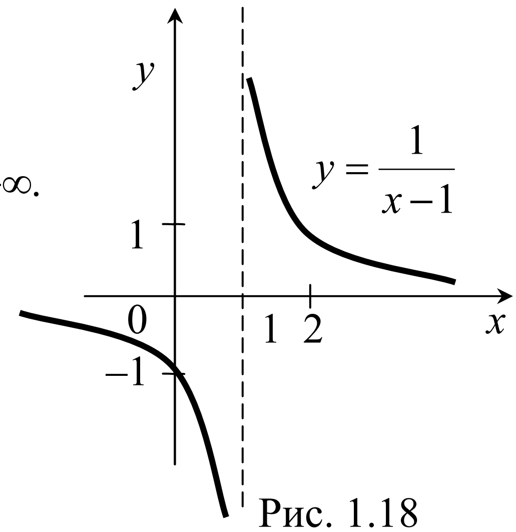


Рис. 1.18

<u>Пример 2.</u> Исследовать на непрерывность функцию, построить график:

$$y=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

Область определения этой функции $(-\infty;\ \infty)$. Поскольку функция задана различными выражениями на нескольких промежутках (не является элементарной), то необходимо проверить на непрерывность точки «стыка» промежутков: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

Проверим три условия непрерывности в каждой точке.

Исследуем точку $x_1 = 0$.

1. Найдем значение функции $f(0) = -x = 0$.

2. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0}(-x) = 0,\quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right) = 1.$$

Односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой (второе условие не выполняется). Поэтому $x_1 = 0$ – точка разрыва 1 рода. В этой точке $f(x)$ имеет скачок $H = 1 - 0 = 1$.

Исследуем точку $x_2 = 1$.

1. Значение функции $f(1) = x^2 + 1 = 2$.

2. Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right) = 2,\ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2 = 2\ .$$

3. Значение функции и односторонние пределы равны между собой.

Так как все три условия непрерывности выполняются, то в точке $x_2 = 1$ функция непрерывна. График показан на рис. 1.19.

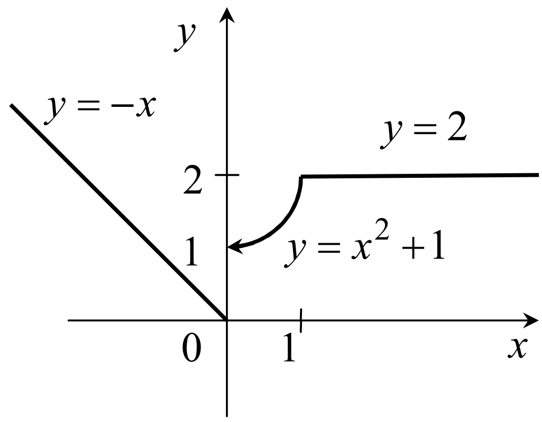


Рис. 1.19

<u>Пример 3.</u> Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Функция не определена в точке $x = 0$, которая является точкой разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Так как они равны между собой, то $x = 0$ – точка устранимого разрыва (рис. 1.20).

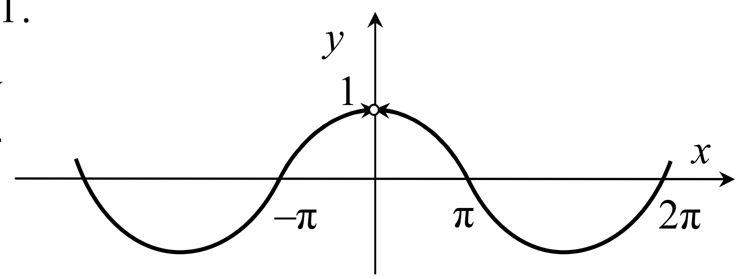


Рис. 1.20

Функцию можно доопределить в точке $x = 0$ таким образом, чтобы она была непрерывной:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

1.3.3. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, если она непрерывна во всех точках интервала $(a,\ b)$ и непрерывна в точке $x = a$ справа и в точке $x = b$ слева. Для функций, непрерывных в точке или на отрезке, справедливо:

1. Если $y = f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, то их сумма, произведение и частное (если знаменатель $\neq 0$) есть непрерывные функции.

2. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, есть непрерывная функция.

3. Все элементарные функции непрерывны в области своего определения.

Так функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна для всех действительных чисел, за исключением точек $x = \pi k$ (k – целое) (см. рис. 1.12, *г*).

Теорема 1. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке она ограничена и достигает своего наибольшего значения M и своего наименьшего значения m.

Например, $f(x) = x^2$ – непрерывная на отрезке $[-2; 3]$. Она ограничена на этом отрезке, так как $\left|x^2\right| \leq 9$, и достигает в точке $x = 3$ своего наибольшего значения $M = 9$, а в точке $x = 0$ своего наименьшего значения $m = 0$.

Теорема 2. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет значения на концах интервала $f(a) = A$, $f(b) = B$, то функция принимает любое значение *C*, заключенное между *A* и *B* хотя бы один раз.

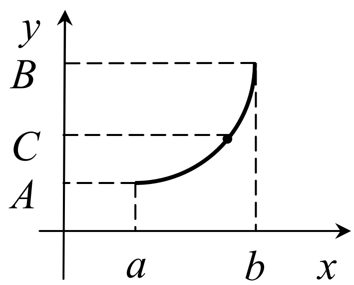


Рис. 1.21

Геометрически это означает, что прямая $y = C$, где C – любое число между *A* и *B*, пересечет график функции $y = f(x)$ по крайней мере в одной точке (рис. 1.21).

Теорема 3. Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует, по крайней мере, одна точка, в которой значение функции равно нулю.

Геометрический смысл теоремы: если точки $M(a; f(a))$ и $N(b; f(b))$, соответствующие концам отрезка $[a, b]$, лежат по разные стороны от оси *Ox* (рис. 1.22), то график функции хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось *Ox*. Для функции $y = f(x)$, график которой представлен на рис. 1.22, таких точек три: c_1, c_2, c_3.

Замечание. Эта теорема является важным частным случаем теоремы 2 и используется в приближенных вычислениях для нахождения корней уравнений $f(x)=0$ с любой степенью точности.

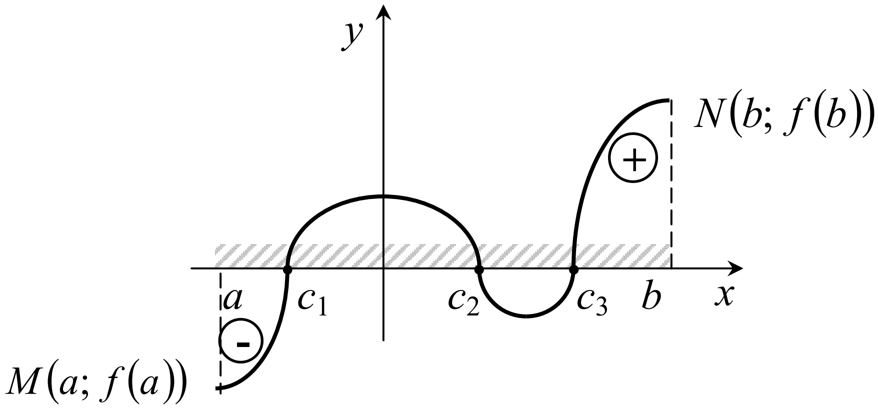


Рис. 1.22

__**Пример.**__ Показать, что уравнение $x^3-3x+1=0$ имеет в промежутке (1, 2) действительный корень.

Обозначим $f(x)=x^3-3x+1$. Значения функции на границах: $f(1)=1-3+1=-1<0$, $f(2)=8-6+1=3>0$. Так как функция непрерывна и имеет на концах промежутка разные знаки, то $f(x)=0$ хотя бы в одной точке из (1, 2).

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная

2.1.1. Производная функции, ее механический и геометрический смысл

Рассмотрим задачи, приводящие к понятию производной.

Задача 1. Материальная точка движется по оси S слева направо, причем неравномерно, по закону $s = f(t)$, где t – время, s – путь. Найти скорость v материальной точки в момент времени t.

Решение. Пусть за время t материальная точка прошла путь $s(t)$ и заняла положение A (рис. 2.1). В момент $t+\Delta t$, пройдя путь $s(t+\Delta t)$, точка окажется в положении B. Таким образом, за время Δt она пройдет путь $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = f(t+\Delta t) - f(t)$. На участке AB средняя скорость движения $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а мгновенная скорость в момент t

$$v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

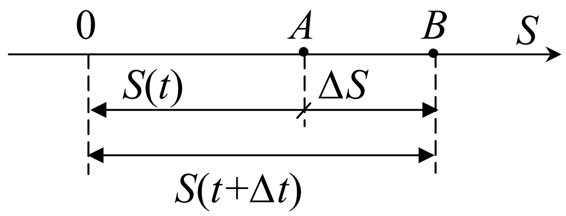


Рис. 2.1

Задача 2. Дана кривая $y = f(x)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ на ней. Найти угловой коэффициент касательной к кривой в M_0.

Решение. Зададим значение x, а соответствующее значение $y = f(x)$. Дадим приращение Δx, функция получит приращение Δy. Проведем секущую l через точки M_0 и M. При уменьшении Δx секущая l поворачивается и стремится к положению касательной m. Углы наклона касательной m и секущей l к оси Ox составляют соответственно α и β. При $\Delta x \to 0$, $\beta \to \alpha$. На рис. 2.2 видно, что угловой коэффициент касательной

$$k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ то есть}$$

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.2}$$

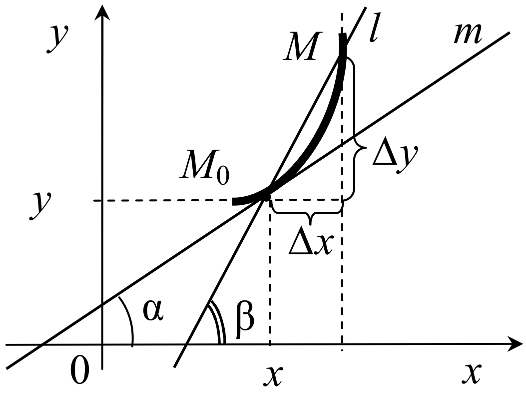


Рис. 2.2

Задачи 1 и 2 имеют одинаковый смысл. Дана функция $y = f(x)$. В точке x ее значение $y = f(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx, найдем значение функции в точке $x+\Delta x$, равное $f(x + \Delta x)$. Тогда приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ дает среднюю скорость изменения функции на интервале длиной Δx.

Производная – это предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, вычисленный в процессе, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная функции $y = f(x)$ обозначается: $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, y'_x.

Таким образом, в задаче 1 скорость движения – это производная пройденного пути по времени $v = s'(t)$. В этом заключается ***механический смысл производной***.

Во второй задаче угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x равен значению производной этой функции в точке x, $k_{\text{кас}} = f'(x)$. То есть, ***геометрический смысл производной*** состоит в том, что она равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в интервале $[a, b]$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

2.1.2. Таблица производных

1) Производная постоянной: $(c)' = 0$.

Здесь $y = c$. По определению производной:

$$(c)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

2) Производная синуса: $(\sin x)' = \cos x$.

Здесь $y = \sin x$.

Найдем $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Аналогично находятся и другие производные основных элементарных функций.

Запишем таблицу производных.

1. $(c)' = 0$	8. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
2. $(\sin x)' = \cos x$	9. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$
3. $(\cos x)' = -\sin x$	10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	11. $\left(a^x\right) = a^x \ln a$
5. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	12. $\left(e^x\right)' = e^x$
6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$
7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $(x)' = 1$

Рассмотрим примеры нахождения производных степенной функции (13).

Пример 1. $\left(x^3\right)' = 3x^2$.

Пример 2. $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4}$.

Пример 3. $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{2/3}\right)' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$.

Пример 4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$.

2.1.3. Правила дифференцирования

1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u'. \tag{2.3}$$

Пример 1.

$$\left(4x^2\right)' = 4 \cdot \left(x^2\right)' = 4 \cdot 2x = 8x.$$

2. Производная суммы функций равна сумме производных:

$$(u+v)' = u' + v'. \tag{2.4}$$

Замечание. Формула справедлива при любом числе слагаемых

$$(u \pm v \pm \ldots \pm t)' = u' \pm v' \pm \ldots \pm t'.$$

Пример 2.

$$\left(3^x+\operatorname{arctg}x-4\right)'=\left(3^x\right)'+\left(\operatorname{arctg}x\right)'-\left(4\right)'=3^x\ln 3+\frac{1}{1+x^2}.$$

3. Производная произведения:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'. \tag{2.5}$$

Пример 3.

$$(\ln x\cdot\cos x)'=(\ln x)'\cdot\cos x+\ln x\cdot(\cos x)'=\frac{1}{x}\cdot\cos x+\ln x\cdot(-\sin x).$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \tag{2.6}$$

Пример 4.

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 5. Найти производную $y=3x^2+\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^7}}+2.$

Так как $y=3x^2+x^{\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{7}{4}}+2$, то

$$y'=3\cdot 2x+\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}-2\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}-1}=6x+\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}x^{-\frac{11}{4}}=$$

$$=6x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}-\frac{3{,}5}{\sqrt[4]{x^{11}}}.$$

2.1.4. Производная сложной функции

Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Функция $y=f[\varphi(x)]$ есть сложная функция и переменная u – промежуточный аргумент.

Например, функция $y=\sin^3 x$ является сложной функцией, где $u=\sin x$, тогда $y=u^3$.

Производная сложной функции находится по следующей формуле: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$ (нижний индекс указывает переменную, по которой берется производная). Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по аргументу x.

Пусть x получит приращение Δx, тогда промежуточная функция $u(x)$ получит приращение Δu, а y также получит приращение Δy. Так как $u(x)$ непрерывна, то $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. При этом запишем, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$.

Запишем таблицу производных сложных функций.

1. $(c)' = 0$	8. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
2. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	9. $(\operatorname{arcctg})' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
3. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	10. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	11. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
5. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	12. $(a^u) = a^u \ln a \cdot u'$
6. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	13. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
7. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	14. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

<u>Пример 1.</u>

$$(\sin(2x+1))' = \left\langle \begin{matrix} u = 2x+1 \\ u' = 2 \end{matrix} \right\rangle = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(2x+1) \cdot 2 .$$

Пример 2.

$$\left[\operatorname{ctg}\left(3-x^3\right)\right]' = (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u' =$$

$$= -\frac{\left(3-x^3\right)'}{\sin^2\left(3-x^3\right)} = \frac{3x^2}{\sin^2\left(3-x^3\right)}.$$

Пример 3.

$$\left(\ln^2 x\right)' = \left\langle \begin{matrix} u = \ln x \\ u' = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right\rangle = \left(u^2\right)' = 2u\cdot u' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}.$$

Пример 4.

$$\left(\sqrt[3]{x}\cdot 2^{\operatorname{tg}5x}\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)'\cdot 2^{\operatorname{tg}5x} + \sqrt[3]{x}\cdot\left(2^{\operatorname{tg}5x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\cdot 2^{\operatorname{tg}5x} + \sqrt[3]{x}\cdot 2^{\operatorname{tg}5x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5.$$

Пример 5.

$$\left(\frac{\lg\left(x^2+4\right)}{2^x}\right)' = \frac{\left(\lg\left(x^2+4\right)\right)'\cdot 2^x - \lg\left(x^2+4\right)\cdot\left(2^x\right)'}{\left(2^x\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\ln 10\cdot\left(x^2+4\right)}\cdot 2x\cdot 2^x - \lg\left(x^2+4\right)\cdot 2^x\cdot\ln 2}{2^{2x}}.$$

Пример 6.

$$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{6x+5}\right)' = (\operatorname{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+(6x+5)}\cdot\frac{1}{2}(6x+5)^{-1/2}\cdot 6.$$

Пример 7.

$$\left(\sin^6(4x)\right)' = \left(u^6\right)' = 6u^5\cdot u' = 6\sin^5(4x)\cdot\cos(4x)\cdot 4.$$

2.1.5. Уравнение касательной и нормали к графику

Исходя из геометрического смысла производной (2.2), уравнение касательной, проходящей через заданную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$, с известным угловым коэффициентом имеет вид:

$$y - y_0 = y'\left(x_0\right)\cdot\left(x - x_0\right). \qquad (2.7)$$

Уравнение нормали (то есть перпендикуляра к касательной в точке касания $M_0(x_0, y_0)$) запишется следующим образом:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0). \qquad (2.8)$$

<u>Пример 1.</u> Найти уравнение касательной и нормали к линии $y = x^2 + 1$ в точке $M_0(-1, 3)$.

$$y' = \left(x^2 + 1\right)' = 2x,\ y'(x_0) = y'(-1) = 2x = -2.$$

Тогда уравнение касательной: $y - 3 = -2 \cdot (x + 1)$, откуда $y = -2x + 1$.

Уравнение нормали: $y - 3 = -\frac{1}{-2} \cdot (x + 1)$, откуда $y = 0{,}5x + 3{,}5$.

<u>Пример 2.</u> Найти точку, в которой касательная к графику функции $y = x^3 - 1$ параллельна прямой $y = 3x + 2$.

Так как неизвестная касательная и прямая $y = 3x + 2$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k_{\text{кас}} = y'(x_0) = 3$. Найдем производную и приравняем ее известному значению: $y' = \left(x^3 - 1\right)' = 3x^2 = 3$. Отсюда $x = \pm 1$. Таким образом, имеем две точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x + 2$. Первая точка: при $x = 1$, $y = x^3 - 1 = 0$, то есть $M_1(1; 0)$. Вторая точка: при $x = -1$, $y = (-1)^3 - 1 = -2$, то есть $M_2(-1; -2)$.

2.1.6. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл

По определению производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Слагаемое $y' \cdot \Delta x$ является линейной функцией от Δx, а слагаемое $\alpha(x) \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$.

Поэтому $y' \cdot \Delta x$ составляет главную часть приращения функции.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy, $dy = y' \cdot \Delta x$.

В частности, при $y = x$ имеем: $dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$. Итак, дифференциал dx независимой переменной x совпадает с ее приращением, то есть $dx = \Delta x$. Тогда $dy = y' \cdot dx$. При нахождении дифференциала функции надо производную этой функции умножить на дифференциал независимого переменного.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = 5x - 3$.

$$dy = (5x-3)' \cdot dx = 5dx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = x^4 + 3\cos^2 x$.

$$dy = \left(x^4 + 3\cos^2 x\right)' dx = \left(4x^3 - 6\cos x \cdot \sin x\right) dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции

$$y = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}.$$

$$dy = \left(x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) dx =$$

$$= \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \operatorname{arctg} x \cdot dx.$$

Рассмотрим ***механический смысл дифференциала***.

Пусть точка M движется по закону $s = f(t)$ с переменной скоростью $v = s'(t) = f'(t)$. За время Δt точка пройдет путь Δs. Однако если Δt невелико, то скорость не успеет существенно измениться и ее можно считать постоянной. Поэтому путь равен $v \cdot \Delta t = s'(t) \cdot \Delta t = ds$. Итак, $ds = s'(t) \cdot \Delta t$.

Дифференциал пути ds – это бесконечно малый путь, пройденный за бесконечно малый промежуток времени, на котором скорость движения считается постоянной.

Геометрический смысл дифференциала показан на рис. 2.3.

Проведем касательную m к графику $y = f(x)$ в точке $A(x;\, y)$. Дадим приращение $\Delta x = AB$, функция получит приращение

$\Delta y = BD$. Так как $y' = \mathrm{tg}\,\alpha$, то $dy = y' \cdot dx = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \Delta x = BC$. Таким образом, дифференциал функции dy – это приращение ординаты касательной на промежутке от x до $x + \Delta x$. При малом Δx приращение функции Δy приближенно равно дифференциалу dy, то есть $dy \approx \Delta y$.

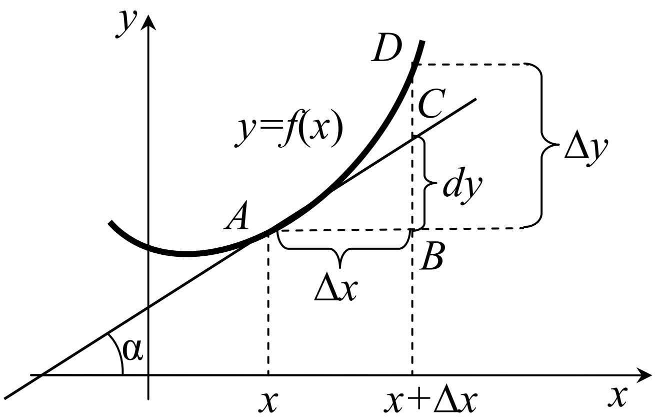


Рис. 2.3

<u>Свойства дифференциала</u> аналогичны свойствам производной, так как $dy = y' \cdot dx$:

1. $d(u+v) = (u+v)' \cdot dx = u'dx + v'dx = du + dv$.
2. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$.

2.1.7. Применение дифференциала для приближенных вычислений

Дана функция $y = y(x)$ и известно ее значение в точке x. Аргумент получил приращение Δx, тогда новое значение функции $y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y$. Так как $\Delta y \approx dy$, а $dy = y'(x) \cdot dx$, то

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x) \cdot \Delta x.$$

<u>Пример</u>. Вычислить $\sin 31°$.

$y = \sin x$, $y' = \cos x$.

Пусть $x = 30°$, $(x + \Delta x) = 31°$, $\Delta x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад.

Тогда $\sin 31^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}516.$

2.2. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция.

Тогда $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \; = f'(x)$ – производная первого порядка функции $f(x)$. И если она, в свою очередь, является непрерывной функцией, то от нее можно найти производную $(y')' = y''$, которая называется производной второго порядка от исходной функции: $y'' = f''(x)$. Аналогично определяется производная третьего порядка: $y''' = (y'')' = f'''(x)$. Производные более высших порядков обозначаются $y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$

Пример. Найти первую, вторую и третью производные для $y = 5x^4 - 3x^3 + 2x - 5$.

$y' = 20x^3 - 9x^2 + 2$, $y'' = 60x^2 - 18x$, $y''' = 120x = 18$.

Рассмотрим механический смысл производной второго порядка.

$$s = f(t),\ v = s'(t) = f'(t), \quad s'' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \omega,$$

где ω – мгновенное ускорение.

2.3. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя используется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в окрестности точки $x = a$ непрерывны, дифференцируемы и $\varphi'(x) \neq 0$. При $x \to a$ обе функции одновременно стремятся или к нулю, или к бесконечности: $f(x) \to 0,\ \varphi(x) \to 0$ или $f(x) \to \infty,\ \varphi(x) \to \infty$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Правило Лопиталя может применяться неоднократно.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{\frac{1}{x}}=3.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3^x\ln 3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

(если получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то следует перейти к отношению вторых производных и т. д.)

$$=\lim\frac{6x}{3^x\cdot\ln^2 3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{3^x\cdot\ln^3 3}=\frac{6}{\infty}=0.$$

В случае неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ или $(\infty-\infty)$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и далее использовать правило Лопиталя.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2-x)}=\frac{1}{2}.$$

В случае неопределенности вида $0^0,\infty^0,1^\infty$ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Пример 4.

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=\left(0^0\right)$. Пусть $y=(\sin x)^x$, прологарифмируем равенство $\ln y=x\cdot\ln\sin x$. Найдем предел этого выражения:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln\sin x)=(-0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\left(-\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot\cos x}{\sin x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\cos x\right] = -1\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y} = e^0 = 1.$

2.4. Полное исследование функций

2.4.1. Условия и интервалы монотонности функций

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей***, если б*о*льшему значению аргумента $x_2 > x_1$ соответствует б*о*льшее значение функции $f(x_2) > f(x_1)$ (рис. 2.4, *а*).

График возрастающей функции при движении вправо по оси x поднимается вверх и любая касательная к графику образует острый угол α, тогда $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $y' > 0$.

Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей***, если б*о*льшему значению аргумента $x_2 > x_1$ соответствует м*е*ньшее значение функции $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 2.4, *б*). При этом угол α – тупой, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $y' < 0$.

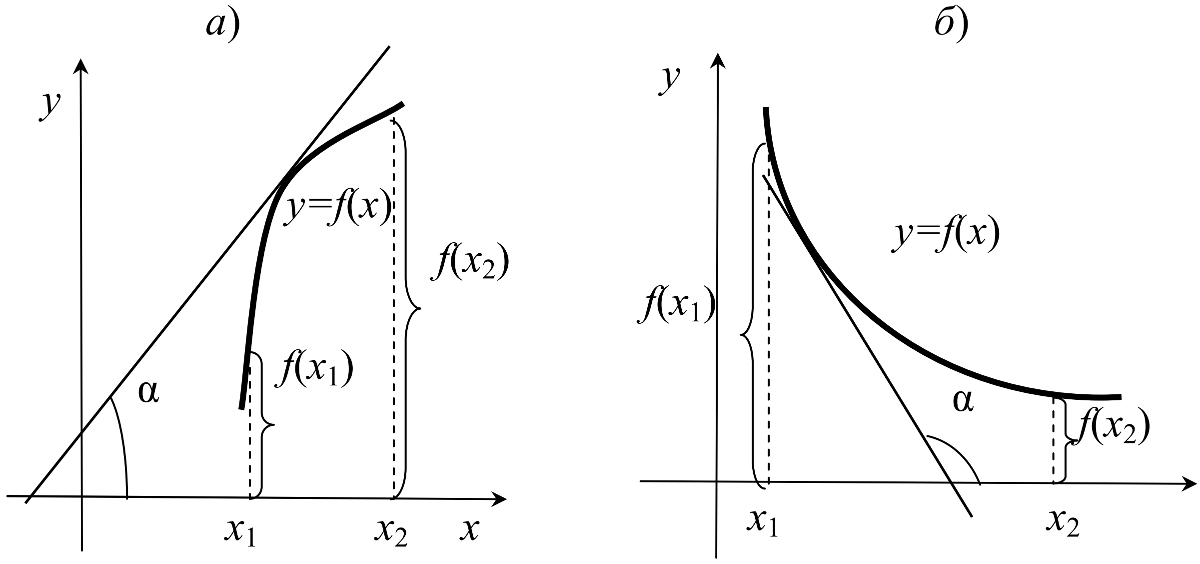


Рис. 2.4

Таким образом, возрастание и убывание функции связано со знаком первой производной.

Функция $y = f(x)$ возрастает, когда $y' > 0$.

Функция $y = f(x)$ убывает, когда $y' < 0$ (функции $y = f(x)$ и $y' = f'(x)$ непрерывны).

Интервалы, в которых функция либо только возрастает, либо только убывает, называются интервалами монотонности.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет вид, показанный на рис. 2.5. Отметим точки $x = b$, $x = c$, $x = d$, в которых касательные к графику параллельны оси Ox ($y' = \mathrm{tg}\,\alpha = \alpha = 0$), и угловую точку $x = a$ (y' не существует). Эти точки называются критическими.

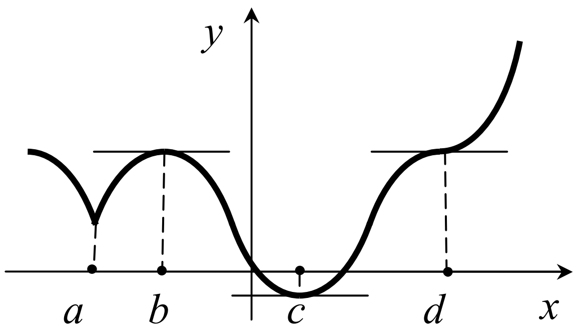


Рис. 2.5

Для нахождения интервалов монотонности функции $y = f(x)$ надо на ось Ox нанести все критические точки этой функции, после чего проверить знак y' на каждом из интервалов между критическими точками. Интервалы, на которых $y' > 0$, будут интервалами возрастания, а на которых $y' < 0$, будут интервалами убывания функции. При этом если на соседних интервалах знак y' одинаков, то они составляют единый интервал монотонности. На рис. 2.5 интервал $(c; \infty)$ составляет единый интервал возрастания функции.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$.

1) Найдем производную функции:

$y' = x^2 - 4$.

2) Найдем критические точки, в которых производная равна нулю или не существует:

а) $y' = 0$, $x^2 - 4 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$;

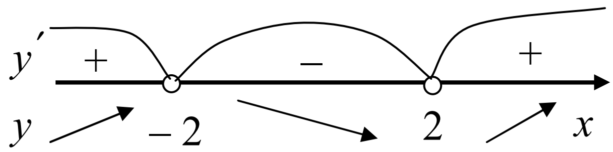
б) y' не существует – таких точек нет.

Критические точки разбивают ось Ox на три интервала. Определим знак y' в каждом интервале. Для этого возьмем произвольные точки в каждом из интервалов.

$x = -3$, $y' = x^2 - 4 = 9 - 4 > 0$,

$x = 0$, $y' = x^2 - 4 = 0 - 4 < 0$,

$x = 3$, $y' = x^2 - 4 = 9 - 4 > 0$.



Таким образом, данная функция возрастает на промежутках $(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$ и убывает на $(-2; 2)$.

2.4.2. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума

Точки x, лежащие в δ-окрестности x_0, ($x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$), будем называть соседними.

Точка x называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если значение функции в этой точке больше соседних значений. На рис. 2.6 точки x_2 и x_4 являются точками максимума.

Точка x называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$, если значение функции в этой точке меньше соседних значений. На рис. 2.6 точками минимума являются точки x_1 и x_3.

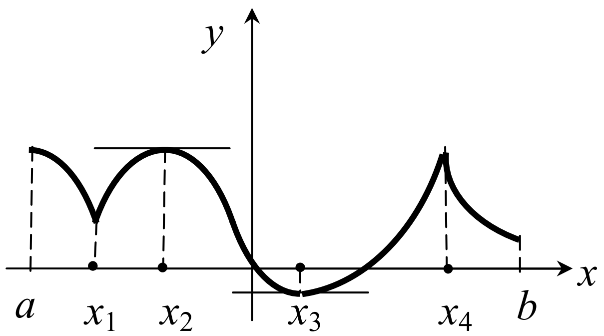


Рис. 2.6

Точки максимума и минимума объединяются словом ***экстремум*** (extremus, латинское). Крайние точки $x = a$ и $x = b$ не относятся к точкам экстремума, так как они не имеют соседних точек слева и справа соответственно.

Касательные к графику в точках экстремума либо параллельны оси Ox (x_2, x_3), либо не существуют (x_1, x_4).

Таким образом, ***необходимое условие экстремума***: если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (максимум или минимум), то производная в этой точке $y'(x_0) = 0$ или не существует.

Теорема дает лишь необходимое условие существования экстремума, но не достаточное.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на экстремум $y = x^3$.

Производная $y' = \left(x^3\right)' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, однако экстремума в этой точке нет (рис. 2.7).

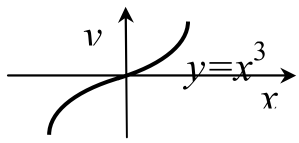


Рис. 2.7

Критическими называются точки, в которых производная равна нулю или не существует.

Запишем ***первое достаточное условие*** существования экстремума.

Критическая точка x_0 является точкой экстремума непрерывной функции $y = f(x)$, если производная y' при переходе слева направо через x_0 меняет знак. Причем, если y' меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума, если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на экстремум $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

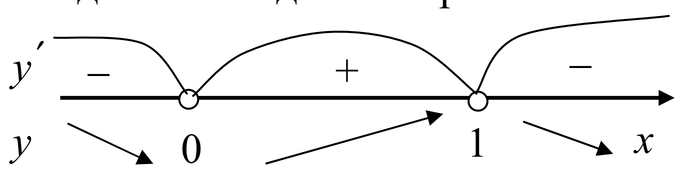
1. Находим производную данной функции: $y' = 6x^2 - 6x$.

2. Находим критические точки:

$y' = -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -6x(x-1) = 0$, отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

y' не существует – нет точек.

3. Критические точки откладываем на числовой оси и определяем знак производной в каждом интервале.



$x = -1,\ y' = -6x(x-1) = 6 \cdot (-7) < 0$;

$x = \dfrac{1}{2},\ y' = -6x(x-1) = -6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = (-) \cdot (-) > 0$;

$x = 2$, $y' = -6x(x-1) = -6 \cdot 2 \cdot (2-1) = (-)\cdot(+) < 0$.

Точка $x = 0$ – точка минимума, так как производная меняет знак с минуса на плюс.

Точка $x = 1$ – точка максимума, так как производная меняет знак с плюса на минус.

4. Вычисляем значения данной функции в точках экстремума:

$y(0) = -2x^3 + 3x^2 + 1 = 1$; $y(1) = -2x^3 + 3x^2 + 1 = -2 + 3 + 1 = 2$.

5. Схематично строим график (рис. 2.8).

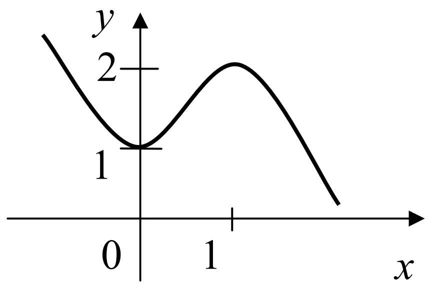


Рис. 2.8

<u>Пример 3.</u> Исследовать на экстремум функцию

$y = (2x+1)\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

1. Находим производную данной функции: $y' = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$.

2. Находим критические точки:

$y' = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = 0$ при $x_1 = 1$.

y' не существует при $x_2 = 2$.

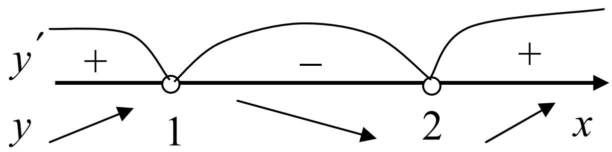
Следовательно, критические точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

3. Критические точки откладываем на числовой оси и определяем знак производной в каждом интервале.

$x = 0$, $y' = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{(-)}{(-)} > 0$;

$x = 1{,}5$, $y' = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{(+)}{(-)} < 0$;

$x = 3$, $y' = \dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}} = \dfrac{(+)}{(+)} > 0$.



Так как y' меняет знак в критических точках, то $x_1 = 1$ – точка максимума (касательная параллельна Ox), $x_2 = 2$ – точка минимума (касательная не существует).

4. Вычисляем значения данной функции в точках экстремума:
$y(1) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2} = 3$; $y(2) = (2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2} = 0$.

5. Схематично строим график (рис. 2.9).

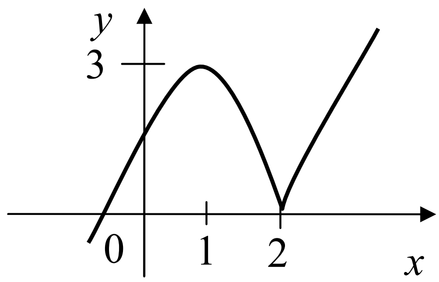


Рис. 2.9

Запишем ***второе достаточное условие*** существования экстремума.

Точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, причем, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) < 0$. На основании определения второй производной имеем:

$$f''(x_0) = [f'(x_0)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0.$$

Исследуем знак первой производной при переходе через точку $x = x_0$. Слева от точки x_0 знаменатель $\Delta x < 0$, следовательно, числитель $f'(x_0 + \Delta x) > 0$. Справа от точки x_0 знаменатель $\Delta x > 0$, следовательно, числитель $f'(x_0 + \Delta x) < 0$. Таким образом, при переходе через точку $x = x_0$ первая производная меняет свой знак с плюса на минус.

Следовательно, на основании первого достаточного признака существования экстремума функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$

максимум. Аналогично показывается, что если $f''(x_0) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума.

Пример 4. Исследовать на экстремум $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$ (см. пример 2).

1. Находим производную данной функции: $y' = -6x^2 + 6x$.

2. Находим критические точки:

$y' = -6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -6x(x-1) = 0$, отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

3. Находим вторую производную: $y'' = \left(-6x^2 + 6x\right)' = -12x + 6$.

4. Определяем знак производной в критических точках:

$y''(0) = 0 + 6 > 0$, следовательно, $x_1 = 0$ – точка минимума;

$y''(1) = -12 + 6 < 0$, следовательно, $x_1 = 1$ – точка максимума.

2.4.3. Наибольшее и наименьшее значение функции, прикладные задачи

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то она достигает на отрезке $[a, b]$ наибольшего и наименьшего значений либо в точках экстремума, принадлежащих этому отрезку, либо на концах отрезка.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции $y = f(x)$, достаточно:

1) найти критические точки, принадлежащие $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках;

2) вычислить значения функции на концах отрезка $[a, b]$, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$;

3) сравнить полученные результаты, выбрать наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x$ на промежутке $x \in [0, 2]$.

Исследуемая функция дифференцируема и непрерывна на отрезке.

1. Найдем производную и критические точки функции:

$$y'(x) = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 4 = 4x^2 - 4;$$

$4x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad 4(x-1)(x+1)=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-1$. При этом $x_1 \in [0, 2]$, $x_2 \notin [0, 2]$.

Найдем значения функции в точке $x_1=1$: $f(1)=\frac{4}{3}-1=-\frac{8}{3}$.

2. Найдем значения функции на концах отрезка:

$f(0)=0, \quad f(2)=\frac{4}{3}\cdot 2^3-4\cdot 2=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3}$.

3. Выберем наибольшее и наименьшее значения:

$f_{\text{наиб}}(x)=f(2)=\frac{8}{3}$, $f_{\text{наим}}(x)=f(1)=-\frac{8}{3}$.

Пример 2. Сумма двух положительных чисел равна 10. Найти возможное наибольшее произведение этих чисел

Обозначим числа: $a\ (a>0)$ и $b\ (b>0)$. Тогда по условию имеем, что $a+b=10$.

Произведение этих чисел: $P=ab$. Выразим *b* из известного условия, тогда $P=ab=a(10-a)=10a-a^2$. Это функция одной переменной *a*, область определения которой $(0; 10)$.

Найдем производную и критические точки функции:

$P'=\left(10a-a^2\right)'=10-2a=0$, откуда $a=5$.

Это единственная критическая точка на интервале $(0; 10)$.

Покажем, что в ней достигается максимум. Найдем вторую производную в этой точке: $P''=(10-2a)'=-2<0$. По второму достаточному признаку экстремума имеем при $a=5$ точку макси-мума.

Найдем последовательно значение $b=10-a=5$, и наибольшее возможное произведение двух чисел $P=a\cdot b=5\cdot 5=25$.

2.4.4. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым***, если он расположен ниже любой своей касательной (рис. 2.10, *а*). График функции $y=f(x)$ называется ***вогнутым***, если он расположен выше любой своей касательной (рис. 2.10, *б*).

Рассмотрим график функции $y=f(x)$ на рис. 2.10, *в*). Мы видим, что левее точки *A* и правее точки *B* график выпуклый, а между

A и B – вогнутый. Точки A и B, отделяющие выпуклую часть от вогнутой, называются ***точками перегиба***, в них график пересекает касательную, то есть касательная лежит с обеих сторон графика.

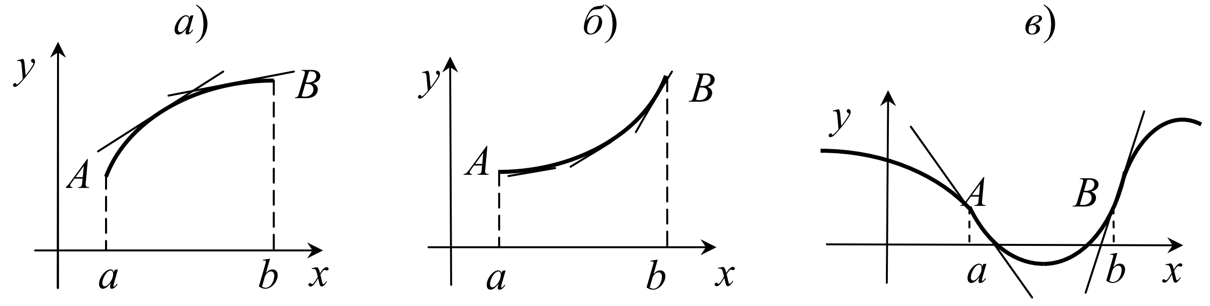


Рис. 2.10

Для нахождения участков выпуклости и вогнутости рассмотрим поведение касательной на участках выпуклости и вогнутости.

На интервале выпуклости с ростом x касательная поворачивается по часовой стрелке, при этом угол наклона касательной α, а также тангенс этого угла уменьшается, убывает (см. рис. 2.10, *а*). Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Эта функция убывает при условии, что ее производная меньше нуля, то есть $(y')' = y'' < 0$.

На интервале вогнутости (см. рис. 2.10, *б*) с ростом x касательная поворачивается против часовой стрелки, при этом угол наклона касательной α, а также тангенс этого угла увеличивается, возрастает. Следовательно, $y'' > 0$. Так как точки перегиба (см. рис. 2.10, *в*) разделяют участки выпуклости от участков вогнутости, то в них y'' меняет знак. В самой же точке перегиба y'' равна нулю или не существует. Таким образом, для исследования графика функции $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость следует произвести следующие действия:

1) найти вторую производную y'';

2) найти критические точки на перегиб, то есть точки, в которых y'' равна нулю или не существует. Для этого следует приравнять к нулю числитель и знаменатель y'';

3) нанести критические точки на ось x и найти знак y'' в каждом интервале;

4) найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба графика функции $y=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{6}+1$.

1. Найдем производные: $y'=\left(\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{6}+1\right)'=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}$;

$$y''=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)'=x^3-x=x\left(x^2-1\right).$$

2. Найдем критические точки: $y''=x\left(x^2-1\right)=0$ при $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Отложим их на числовой оси.

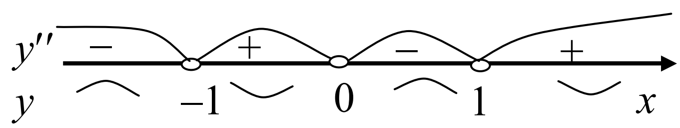
3. Найдем знаки y'' в интервалах:

$$y''(-2)=x\left(x^2-1\right)=(-2)\cdot(4-1)=(-)\cdot(+)<0;$$

$$y''\left(-\frac{1}{2}\right)=x\left(x^2-1\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)=(-)\cdot(-)>0;$$

$$y''\left(\frac{1}{2}\right)=x\left(x^2-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)=(+)\cdot(-)<0;$$

$$y''(2)=x\left(x^2-1\right)=(2)\cdot(4-1)=(+)\cdot(+)>0.$$



4. На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$ $y''<0$ – график выпуклый.

На интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$ $y''>0$ – график вогнутый.

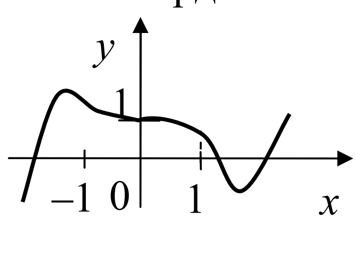
Вторая производная меняет знак в трех точках. Найдем ординаты точек перегиба:

$$y(-1)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+1=-\frac{1}{20}+\frac{1}{6}+1=1\frac{7}{60}\approx 1{,}1;$$

$$y(0)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+1=1;\quad y(1)=\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+1=\frac{1}{20}-\frac{1}{6}+1=\frac{53}{60}\approx 0{,}9.$$

Таким образом, имеем три точки перегиба с координатами: $(-1;\,1{,}1)$, $(0;\,1)$, $(1;\,0{,}9)$.

Изобразим схематично график.



<u>Пример 2.</u> Исследовать на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба графика функции $y = e^{-x^2}$

Данная функция определена на всей числовой прямой.

1. Найдем производные: $y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$;

$$y'' = -2\left(e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x)\right) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right).$$

2. Найдем критические точки: $y'' = 0$, если

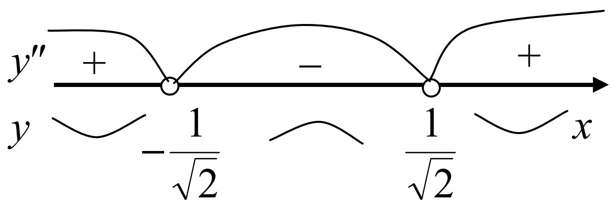
$$2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 0 \;\Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Найдем знаки y'' в интервалах:

$$y''(-1) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0;$$

$$y''(0) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{0}(-1) = -2 < 0;$$

$$y''(1) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0.$$



Следовательно, точки кривой с абсциссами $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ являются точками перегиба.

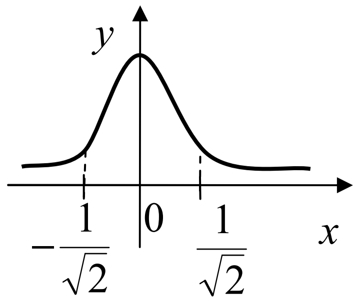
4. Найдем ординаты точек перегиба:

при $\quad x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

при $\quad x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Таким образом, точки $A\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба графика данной функции.

Причем на интервалах $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$ кривая вогнута ($y''>0$), а на интервале $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – выпукла ($y''<0$).



2.4.5. Асимптоты графика функции

Асимптота – это прямая линия, к которой бесконечно близко приближается график функции $y=f(x)$, когда точка графика удаляется от начала координат. Различаются два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

1. ***Вертикальная асимптота*** имеет уравнение $x=a$, причем $x=a$ – точка разрыва второго рода функции $y=f(x)$. То есть должно выполняться хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty.$$

Количество вертикальных асимптот не ограничено.

<u>**Пример 1.**</u> Найти вертикальные асимптоты $y=\dfrac{1}{x-2}$.

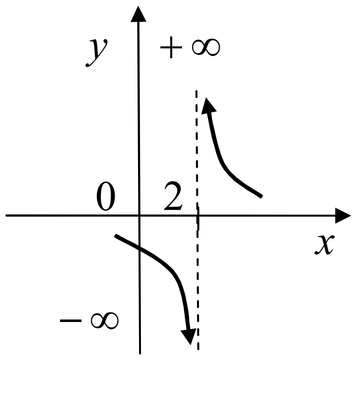
Функция не определена при $x=2$.

Найдем пределы слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{(2-0)-2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{(2+0)-2}=+\infty.$$

Таким образом, $x=2$ – вертикальная асимптота.



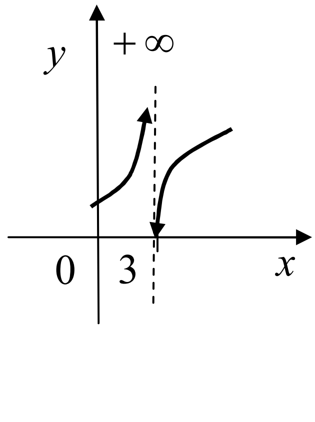
<u>**Пример 2.**</u>

Найти вертикальные асимптоты $y=2^{\frac{1}{3-x}}$.

Функция не определена при $x=3$.

Найдем пределы слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{3-x}}=2^{\frac{1}{3-(3-0)}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty;$$



$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{3-x}} = 2^{\frac{1}{3-(3+0)}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$$

$x = 3$ – это вертикальная асимптота.

Пример 3. Найти вертикальные асимптоты $y = \operatorname{tg} x$.

Точки разрыва и вертикальные асимптоты: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где n – целое число. Количество вертикальных асимптот – бесчисленное множество (см. рис. 1.12, *в*) .

2. ***Наклонная асимптота*** имеет уравнение $y = kx + b$. По определению асимптоты, расстояние по вертикали между графиком $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ стремится к 0 при $x \to +\infty$ (рис. 2.11). То есть должно выполняться условие: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx - b \right) = 0$.

Отсюда:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Если один из пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx \right)$ не существует или не равен конечному числу, то асимптоты при $x \to +\infty$ нет.

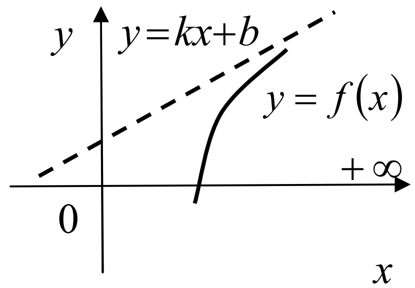


Рис. 2.11

Аналогично определяется и находится асимптота графика при $x \to -\infty$. В этом случае $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx \right)$.

Наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут совпадать.

Таким образом, максимальное количество наклонных асимптот графика функции равно двум.

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной, в этом случае $k=0$, и ее уравнение имеет вид: $y=b$.

<u>Пример 4.</u> Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Проверим существование вертикальных асимптот. Функция не определена при $x=2$, это точка разрыва.

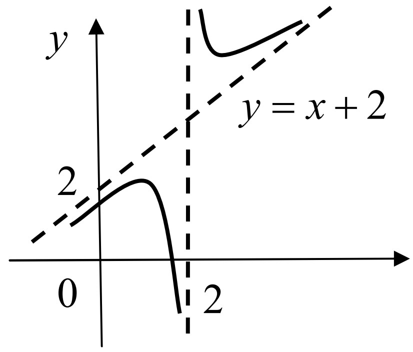
Так как $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2+1}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2+1}{x-2}=-\infty$, то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-2}=2.$$



Итак, $y=x+2$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

Таким образом, данная функция имеет вертикальную асимптоту $x=2$ и наклонную $y=x+2$.

2.4.6. Общая схема исследования функции и построение ее графика

Схема исследования функции $y=f(x)$ устанавливает следующий порядок:

1) область определения функции;

2) точки разрыва функции и поведение функции в их окрестности, вертикальные асимптоты;

3) поведение функции на бесконечности, наклонные асимптоты;

4) четность и нечетность, периодичность;

5) точки пересечения с осями координат, интервалы положительности и отрицательности функции (если возможно);

6) интервалы возрастания и убывания функции, точки экстре-

мума и экстремальные значения;

7) интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба.

Найденные асимптоты строятся на координатной плоскости, затем наносятся характерные точки (экстремумы, точки перегиба), после чего строится сам график. Если поведение графика недостаточно ясно, то надо построить еще несколько точек графика, вычислив значения y для отдельных значений x.

<u>**Пример 1.**</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Точки разрыва функции и вертикальных асимптот нет.

3. Исследуем поведение функции на бесконечности, найдем пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) \cong \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) \cong \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty.$$

Отложим найденные точки с координатами $(+\infty; +\infty)$ и $(-\infty; +\infty)$ на графике (рис. 2.12).

Наклонных асимптот $y = kx + b$ нет, так как

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x} = \infty.$$

4. Исследуем на четность и нечетность:

$y(x) = x^4 - 2x + 1$, $y(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$.

Так как $y(-x) = y(x)$, то функция четная, ее график симметричен относительно оси Oy.

Функция не является тригонометрической, поэтому периодичности нет.

5. Найдем точки пересечения с осью Oy:

$y(0) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1$.

6. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$$y' = \left(x^4 - 2x^2 + 1\right)' = 4x^3 - 4x = 4x\cdot\left(x^2 - 1\right).$$

$y' = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm 1$.

y' не существует – точек нет.

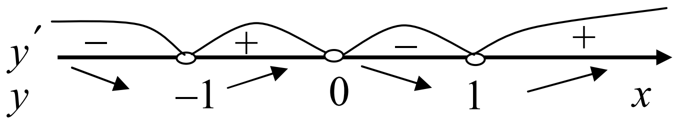
Отложим найденные критические точки на числовой оси и найдем знак y' в каждом интервале:

$y'(-2) = 4x \cdot (x^2 - 1) = 4 \cdot (-2) \cdot (4-1) = (-) \cdot (+) < 0$;

$y'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4x \cdot (x^2 - 1) = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{4} - 1\right) = (-) \cdot (-) > 0$;

$y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4x \cdot (x^2 - 1) = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{4} - 1\right) = (+) \cdot (-) < 0$;

$y'(2) = 4x \cdot (x^2 - 1) = 4 \cdot (2) \cdot (4-1) = (+) \cdot (+) > 0$.



Отмечаем на числовой оси интервалы возрастания и убывания. Функция убывает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$. Функция возрастает на промежутках $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

В критических точках производная меняет знак, поэтому имеем:

$x = -1$ – точка минимума, $x = 0$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем экстремальные значения:

$y_{\min}(-1) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$;

$y_{\max}(0) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1$;

$y_{\min}(1) = x^4 - 2x^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

Отложим найденные точки экстремума на графике.

7. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба:

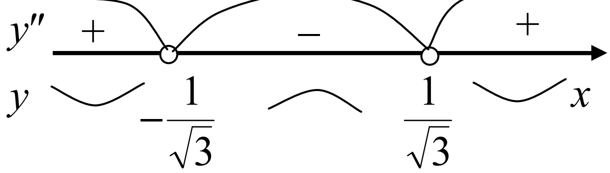
$$y'' = \left(4x^3 - 4x\right)' = 12x^2 - 4.$$

$y'' = 0$, когда $12x^2 - 4 = 0$, откуда $x^2 = \dfrac{1}{3}$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$.

Отложим критические точки на перегиб на числовой оси и найдем знак y'' в интервалах:

$y''(-1) = 12x^2 - 4 = 12 - 4 > 0$;

$y''(0) = 12x^2 - 4 = 0 - 4 < 0$;



$y''(1) = 12x^2 - 4 = 12 - 4 > 0$.

График вогнутый на промежутках $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, выпуклый – на $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

В точках $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$ вторая производная меняет знак, в них имеются точки перегиба. Найдем их ординаты:

$$y\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 \approx 0{,}11 - 0{,}56 + 1 = 0{,}55;$$

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = x^4 - 2x^2 + 1 \approx 0{,}11 - 0{,}56 + 1 = 0{,}55.$$

Отложим точки перегиба с координатами $(-0{,}58; 0{,}55)$ и $(0{,}58; 0{,}55)$ на графике.

Соединим все точки с учетом выпуклости и вогнутости.

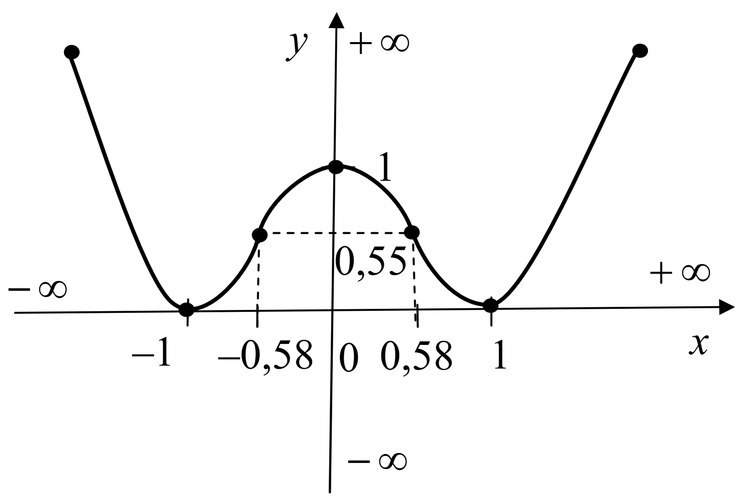


Рис. 2.12

Пример 2. Провести полное исследование функции $y = \frac{(x+3)^2}{x-4}$ и построить ее график.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty)$.

2. Точка разрыва функции: $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=\frac{7^2}{4-0-4}=\frac{49}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=\frac{7^2}{4+0-4}=\frac{49}{+0}=+\infty.$$

Так как пределы бесконечны, то $x=4$ – вертикальная асимптота.

3. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{x(x-4)}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9-x(x-4)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4}=10.$$

$y=x+10$ – уравнение наклонной асимптоты.

Изобразим асимптоты на графике (рис. 2.13).

4. Функция непериодичная, исследуем на четность и нечетность:

$y(x)=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$, $y(-x)=\dfrac{(-x+3)^2}{-x-4}$, так как условия четности и нечетности не выполняются, то функция – общего вида.

5. Найдем точки пересечения с осью Oy: $y(0)=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}=-\dfrac{9}{4}$,

и осью Ox: $\dfrac{(x+3)^2}{x-4}=0$, откуда $x=-3$.

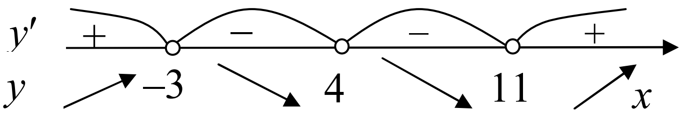
Имеем точки $\left(0;-\dfrac{9}{4}\right)$ и $(-3;0)$.

6. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$$y'=\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}\right)'=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}.$$

$y'=0$, если $x^2-8x-33=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=11$.

y' не существует при $x=4$.



Определяем знаки y' в интервалах:

$$y'(-10)=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}=\frac{+}{+}>0;\quad y'(0)=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}=\frac{(-)}{(+)}<0;$$

$$y'(10)=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}=\frac{(-)}{(+)}<0;\quad y'(20)=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}=\frac{(+)}{(+)}>0.$$

В интервале $(-\infty;-3)$ $y'>0$, функция возрастает.

В интервалах $(-3;4)$ и $(4;11)$ $y'<0$, функция убывает.

В интервале $(11;\infty)$ $y'>0$, функция возрастает.

$x=-3$ – точка максимума, $y(-3)=0$,

$x=11$ – точка минимума $y(11)=28$ (см. рис. 2.13).

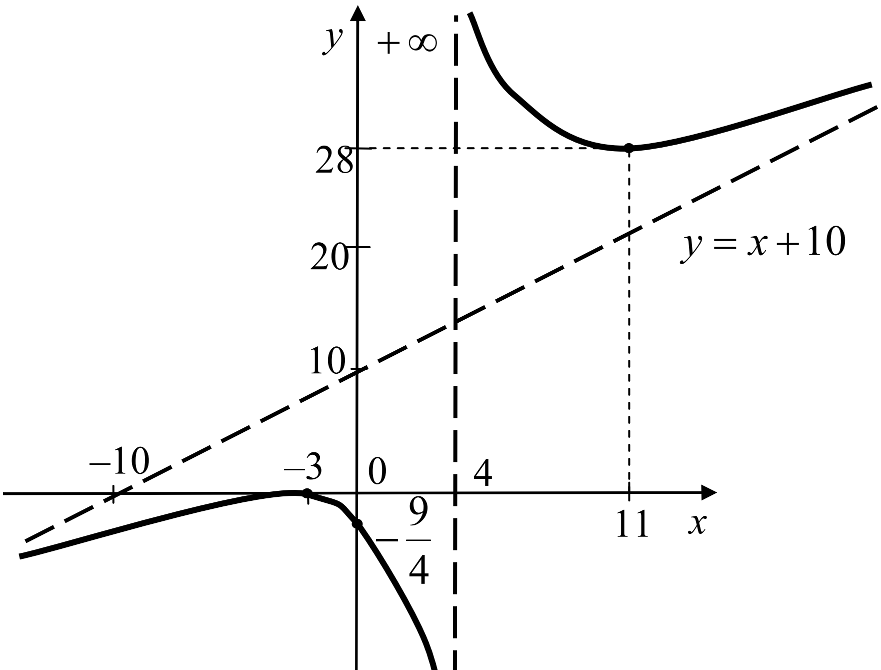


Рис. 2.13

7. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}\right)'=\frac{98}{(x-4)^3}.$$

$y''=0$ – нет точек, y'' не существует при $x=4$.

В интервале $x\in(-\infty;4)$ $y''<0$, кривая выпукла; в интервале $x\in(4;\infty)$ $y''>0$, кривая вогнута. Так как при $x=4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

Пример 3. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$.

1. Область определения функции: $(-\infty;\infty)$.

2. Точек разрыва нет, следовательно, вертикальных асимптот нет.

3. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\cong\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-2x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{x^6-4x^5+4x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^5}+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\cong$$

$$\cong\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{\sqrt[3]{x^6}+\sqrt[3]{x^6}+x^2}=-\frac{2}{3}.$$

При нахождении коэффициента b воспользовались формулой: $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$, при этом домножили числитель и знаменатель на вторую скобку.

Уравнение наклонной асимптоты $y=x-\dfrac{2}{3}$.

4. Исследуем четность функции:

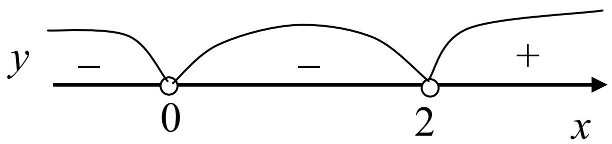
$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-2(-x)^2}=\sqrt[3]{-x^3-2x^2}.$$

Так как $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$, то функция – общего вида. График функции не обладает симметрией. Функция не является периодической, так как она алгебраическая.

5. Найдем нули функции:

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = 0,\ x^3 - 2x^2 = 0,\ x^2(x-2) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Функция имеет три интервала знакопостоянства $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$.



Возьмем точку из каждого интервала, и определим знак y: $y(-1) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = -\sqrt[3]{3} < 0$; $y(1) = -1 < 0$; $y(3) = \sqrt[3]{9} > 0$.

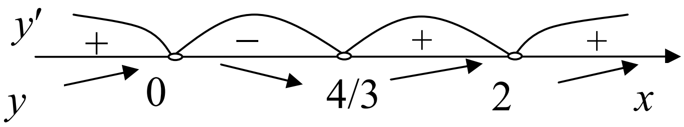
Таким образом, на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ функция отрицательная, а на $(2; \infty)$ – положительная.

6. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремальные значения.

$$y' = \frac{1}{3}\left(x^3 - 2x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(3x^2 - 4x\right) = \frac{x(3x-4)}{3x \cdot \sqrt[3]{x(x-2)^2}} = \frac{(3x-4)}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

Решим уравнение $y' = 0$; $\dfrac{3x-4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}} = 0$; $3x - 4 = 0$; $x_1 = \dfrac{4}{3}$.

Кроме того, первая производная не существует при $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$. Имеем три критические точки.



Возьмем точку из каждого интервала и найдем знак производной в нем:

$$y'(-1) = \frac{(3x-4)}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}} = \frac{(-)}{(-)} > 0;\ y'(1) < 0;\ y'\left(\frac{5}{3}\right) > 0;\ y'(3) > 0.$$

Интервалом убывания является $\left(0; \dfrac{4}{3}\right)$, в остальных интервалах функция возрастает. Точка $x = 0$ является точкой максимума со значением $y(0) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = 0$. Причем эта точка угловая, так как в ней y' не существует. Точка $x=\frac{4}{3}$ – точка минимума, значение функции в ней $y\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt[3]{x^3-2x^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{3}\right)^2}\approx -1{,}06$.

7. Интервалы выпуклости, вогнутости кривой, точки перегиба. Находим y''. Будем использовать логарифмическое дифференцирование, найдем логарифмы левой и правой части равенства.

$$y'=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2x}} \quad \Rightarrow \ln(y')=\ln(3x-4)-\ln 3-\frac{2}{3}\ln(x-2)-\frac{1}{3}\ln x.$$

Найдем производную левой и правой части:

$$\frac{1}{y'}\cdot y''=\frac{3}{3x-4}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3x}, \text{ откуда}$$

$$y''=\left(\frac{3}{3x-4}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3x}\right)\cdot y'=\left(\frac{3}{3x-4}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3x}\right)\cdot\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2x}}=$$

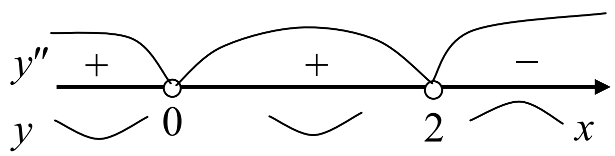
$$=\frac{9x^2-18x-6x^2+8x-3x^2+6x+4x-8}{3(3x-4)(x-2)x}\cdot\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-2)^2x}}=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}.$$

Вторая производная y'' не существует при $x=0$ и $x=2$. Отложим эти точки на числовой оси и проверим знаки y'' в интервалах.

$$y''(-1)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}=\frac{(-)}{(-)}>0;$$

$$y''(1)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}=\frac{(-)}{(-)}>0;$$

$$y''(3)=\frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-2)^5x^4}}=\frac{(-)}{(+)}<0.$$



При $x=2$ вторая производная меняет знак, это – абсцисса точки перегиба, ее ордината $y(2)=\sqrt[3]{2^3-2\cdot 2^2}=0$. Таким образом, $A(2;\,0)$ – точка перегиба. На интервалах $(-\infty;0)$ и $(0;\,2)$ кривая вогнута, а на интервале $(2;\,\infty)$ – выпукла.

Построим график (рис. 2.14).

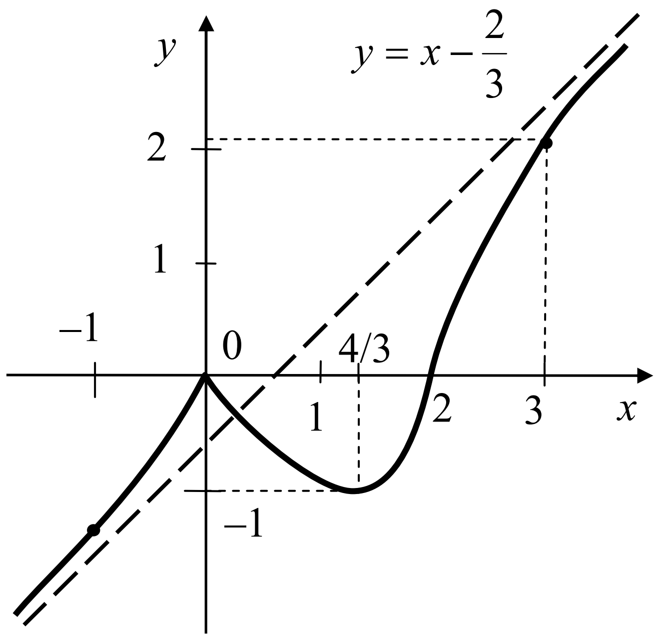


Рис. 2.14

Для более точного построения графика функции вычислим $y(-1) \approx -1{,}44$ и $y(3) \approx 2{,}08$.

ГЛАВА 3. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Понятие функции двух переменных, область определения

Пусть заданы два множества: M – некоторое множество пар (x, y) действительных чисел и L – некоторое множество действительных чисел.

Функцией двух переменных называют правило, по которому каждой паре чисел $(x, y) \in M$ соответствует единственное число $z \in L$ при условии, что каждое число $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x, y) \in M$.

При этом x и y – независимые переменные (аргументы), z – зависимая переменная (функция), M – область определения функции, L – множество значений функции.

Функция двух переменных обозначается $z = f(x, y)$ и может быть задана с помощью таблицы, аналитически или графически.

Когда функция двух переменных задана только аналитическим выражением, то под областью определения понимают совокупность всех точек плоскости xOy, в которых аналитическое выражение определено и принимает действительные значения. Например, имеют место следующие ограничения:

1) $z = \dfrac{a}{\varphi(x, y)}$, область определения D: $\varphi(x, y) \neq 0$;

2) $z = \sqrt[2n]{\varphi(x, y)}$, область определения D: $\varphi(x, y) \geq 0, n > 0$ – целое;

3) $z = \ln \varphi(x, y)$, область определения D: $\varphi(x, y) > 0$;

4) $z = \arcsin \varphi(x, y)$, область определения D: $|\varphi(x, y)| \leq 1$.

Пример. Найти область определения функции

$$z = \arcsin \frac{x}{2} + \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

Первое слагаемое определено при $\left|\dfrac{x}{2}\right| \leq 1$ или $-1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$. Отсюда имеем: $-2 \leq x \leq 2$.

Областью определения первого слагаемого является часть плоскости, выделенная штриховкой на рис. 3.1, *а*.

Второе слагаемое определено при $x^2 + y^2 - 1 > 0$ или при $x^2 + y^2 > 1$. Построим линию $x^2 + y^2 = 1$. Это окружность, которая имеет центр в начале координат и радиус, равный единице. Эта линия разбила плоскость на две части: внутри окружности и снаружи. Чтобы найти искомую область, выберем любую точку, не лежащую на этой линии, и подставим ее координаты в неравенство. Для точки $(0, 0)$, которая лежит внутри окружности, имеем: $0^2 + 0^2 > 1$ – неверно. Значит, область внутри окружности не является искомой. Искомая область – снаружи окружности. Изобразим штриховкой область определения второго слагаемого на чертеже (рис. 3.1, *б*).

Область определения нашей функции есть пересечение областей определения слагаемых функции (рис. 3.1, *в*).

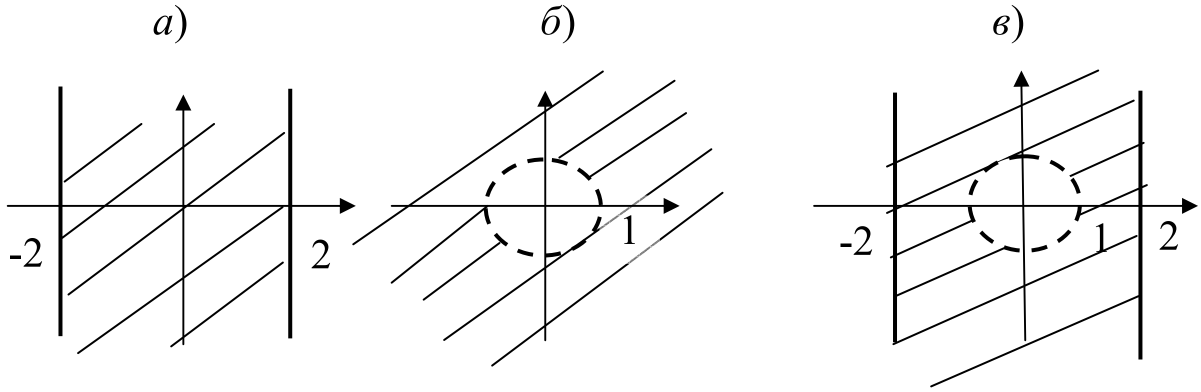


Рис. 3.1

Точки линий $x = -2$, $x = 2$ принадлежат области определения, а точки окружности $x^2 + y^2 = 1$ не принадлежат области определения.

3.2. Дифференциальное исчисление функции двух переменных

3.2.1. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зададим точку на плоскости xOy с координатами (x_0, y_0), в пространстве ей соответствует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которая лежит на поверхности $z = f(x, y)$ (рис. 3.2).

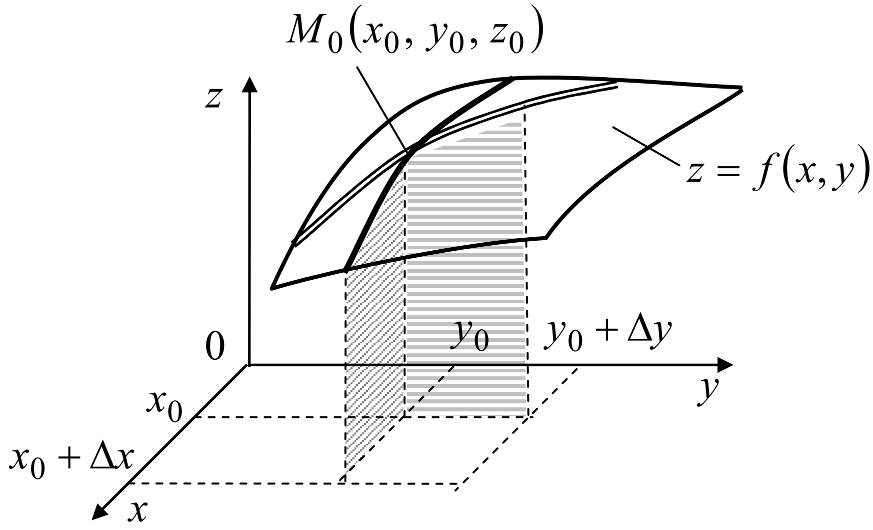


Рис. 3.2

1. Зафиксируем значение y при $y = y_0$. На рис. 3.2 проведем плоскость $y = y_0$, параллельную плоскости xOz. Получим сечение поверхности в этой плоскости, проекция которого на xOz показана на рис. 3.3, *а*. Зададим переменной x приращение Δx. Функция получит частное приращение Δz_x.

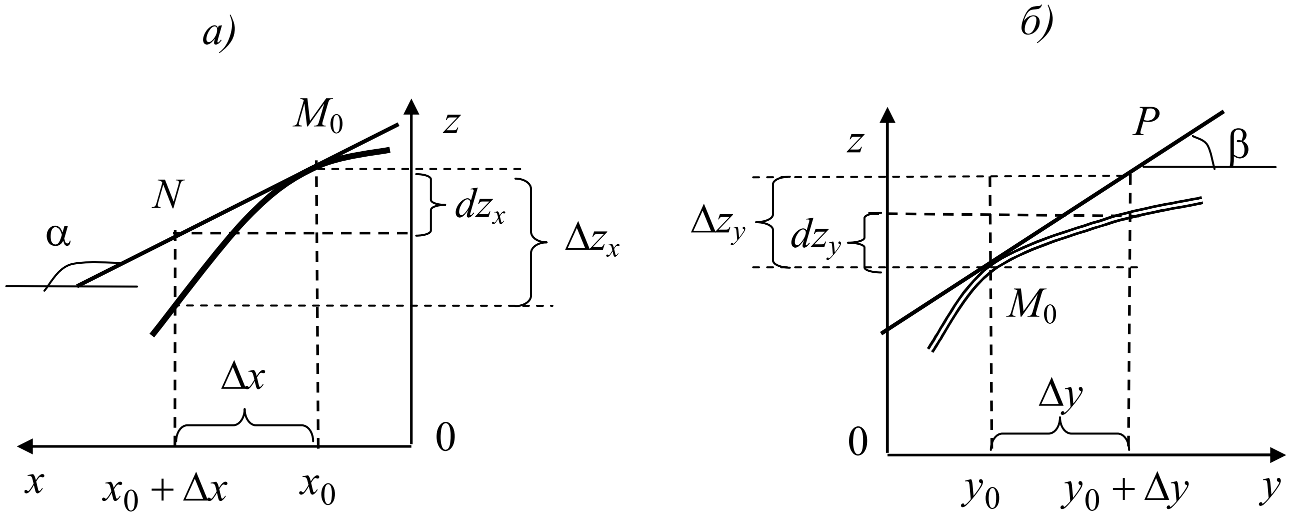


Рис. 3.3

Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется функция переменных x и y, получающаяся при дифференцировании z, когда y считается постоянной. Обозначается: $f_x{}'(x, y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл частной производной по x в заданной точке (x_0, y_0) состоит в следующем: $z'_x(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент касательной M_0N в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно оси Ox к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$, то есть $z'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

2. Зафиксируем значение x при $x = x_0$. На рис. 3.2 проведем плоскость $x = x_0$, параллельную плоскости yOz. Получим сечение поверхности в этой плоскости, проекция которого на yOz показана на рис. 3.3, *б*. Зададим переменной y приращение Δy. Функция получит частное приращение Δz_y.

Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется функция переменных x и y, получающаяся при дифференцировании z, когда x считается постоянной. Обозначается: $f_x{}'(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, z'_y.

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.$$

Геометрический смысл частной производной по y в заданной точке (x_0, y_0) состоит в следующем: $z'_y(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент касательной M_0P в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно оси Oy к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$, то есть $z'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$.

Таким образом, абсолютная величина частной производной показывает величину скорости, с которой происходит изменение функции $z = f(x, y)$ при изменении только x или только y, а ее знак указывает на возрастание или убывание функции вдоль оси Ox или оси Oy.

<u>Пример.</u> Найти частные производные функции $z = f(x, y) = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Частную производную z'_x находим как производную функции $z = f(x, y)$ по переменной x, полагая $y = \text{const}$:

$$z'_x = \left(x^2 y - 3y^2 + 5x\right)'_x = 2xy + 5.$$

Частную производную z'_y находим как производную функции $z = f(x, y)$ по переменной y, полагая $x = \text{const}$.

$$z'_y = \left(x^2 y - 3y^2 + 5x\right)'_y = x^2 + 6y.$$

Следует добавить, что аналогично с функцией одной переменной рассматриваются частные дифференциалы функции двух переменных.

Частный дифференциал функции z по x обозначается dz_x, по y – dz_y. Они являются главными частями соответственно частных приращений Δz_x и Δz_y и находятся по формулам

$$dz_x = z'_x \cdot \Delta x = z'_x \cdot dx,$$

$$dz_y = z'_y \cdot \Delta y = z'_y \cdot dy.$$

Геометрический смысл частного дифференциала dz_x состоит в том, что он равен приращению аппликаты точки касательной M_0N при изменении аргумента на величину Δx при $y = y_0$ (см. рис. 3.3, *а*).

Аналогично, геометрический смысл частного дифференциала dz_y состоит в том, что он равен приращению аппликаты точки касательной M_0P при изменении аргумента на величину Δy при $x = x_0$ (см. рис. 3.3, *б*).

3.2.2. Частные производные высших порядков

Частные производные функции двух переменных являются функциями тех же самых переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются вторыми частными производными (частными производными второго порядка) исходной функции.

Функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x, y) = z''_{xx};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{xy}{}''(x,y)=z''_{xy};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f_{yx}{}''(x,y)=z''_{yx};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}{}''(x,y)=z''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции двух переменных.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной. Смешанные частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны. То есть, $z''_{xy}=z''_{yx}$, $z'''_{xxy}=z'''_{xyx}$ и т. п.

<u>Пример.</u> Показать, что функция $z=x^2\cdot\sin\frac{y}{x}$ удовлетворяет равенству $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Решение. Найдем частные производные функции $z=x^2\cdot\sin\frac{y}{x}$ первого порядка. Рассматривая y как постоянную величину, получим частную производную функции z по x:

$$z'_x=2x\sin\frac{y}{x}+x^2\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=2x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим частную производную функции z по y:

$$z'_y=x^2\cos\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)=x\cos\frac{y}{x}.$$

Найдем вторые частные производные:

$$z''_{xy}=2x\cos\frac{y}{x}\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{y}{x}-y\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=2\cos\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}=\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x};$$

$$z''_{yx} = \cos\frac{y}{x} + x\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}.$$

Получили, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

3.2.3. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x; y)$. Зададим точку на плоскости xOy с координатами $(x_0; y_0)$, в пространстве ей соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, которая лежит на поверхности $z = f(x; y)$ (рис. 3.4). Зададим приращения Δx и Δy. Тогда функция $z = f(x; y)$ получит полное приращение $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, а точка M_0 переместится в точку M, которая также лежит на поверхности $z = f(x; y)$.

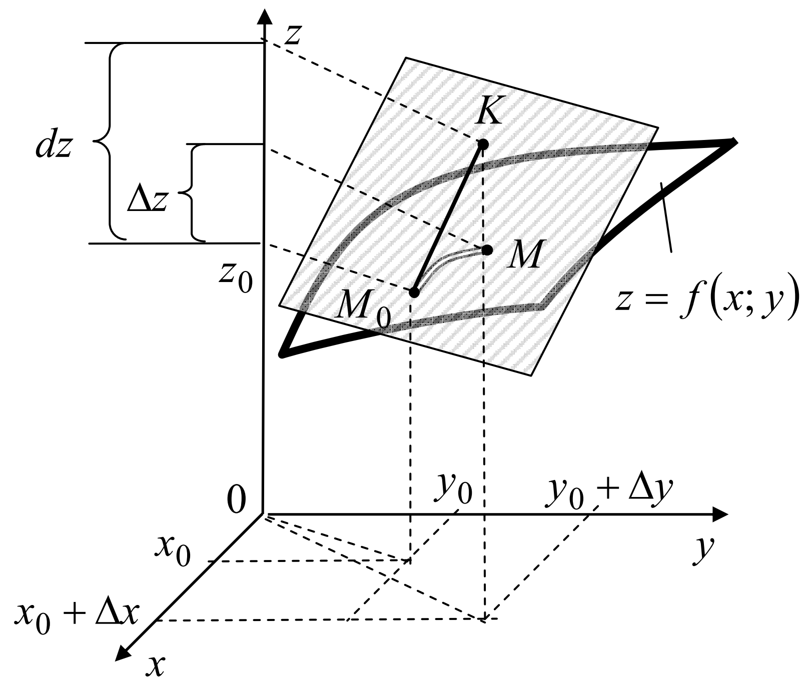


Рис. 3.4

Проведем через точку M_0 касательную плоскость и спроецируем на нее точку $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$. Получим точку K, лежащую на плоскости.

Дифференциал (полный дифференциал) dz функции $z = f(x; y)$ изображается как приращение аппликаты точки касательной плоскости, проведенной к поверхности $z = f(x;\ y)$ в ее точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ при изменении аргументов на Δx и Δy.

Дифференциал dz является главной частью полного приращения функции Δz, линейной относительно приращений независимых переменных, и равен сумме частных дифференциалов:

$$dz = dz_x + dz_y = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y\,.$$

Все понятия рассматриваются для случая, когда частные производные существуют и непрерывны. Функция двух независимых переменных, имеющая в некоторой точке дифференциал, называется дифференцируемой в этой точке.

Если значения приращений Δx и Δy малы, то $\Delta z \approx dz$, и получим формулу для приближенных вычислений значений функции двух переменных с помощью дифференциала:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0;\ y_0) + \Delta z \approx f(x_0;\ y_0) + dz \text{ или}$$

$$z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx z(x_0; y_0) + z'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + z'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y.$$

<u>**Пример.**</u> Дана функция $z = x^2 + xy - y$ и две точки $A(1;\ 2)$ и $B(1{,}03; 1{,}98)$. Вычислить приближенное значение $\bar{z}_1$ функции в точке B, исходя из значения z_0 функции в точке A и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом.

Решение. Используем формулу:

$$z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx z(x_0; y_0) + z'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + z'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y.$$

Положим $x_0 = 1,\ x_0 + \Delta x = 1{,}03,\ y_0 = 2,\ y_0 + \Delta y = 1{,}98$.

Тогда $\Delta x = 0{,}03;\ \ \Delta y = -0{,}02$.

Для заданной функции находим частные производные и вычисляем их значение в точке $A(1;\ 2)$:

$$z'_x = 2x + y \quad \Rightarrow \quad z'_x(1;\ 2) = 2 + 2 = 4\,;$$

$$z'_y = x - 1 \quad \Rightarrow \quad z'_y(1;\ 2) = 1 - 1 = 0\,;$$

$$z(x_0;\ y_0) = z(1;\ 2) = z_0 = 1 + 2 - 2 = 1\,.$$

Следовательно:

$$\bar{z}_1 = 1 + 4 \cdot 0{,}03 + 0 \cdot (-0{,}02) = 1{,}12.$$

3.2.4. Экстремум функции двух переменных

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x;\ y)$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ является ***точкой максимума*** функции $z = f(x; y)$, если для всех точек $M(x; y)$ из окрестности точки M_0 значения функции меньше, чем в M_0, то есть $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ (рис. 3.5, *а*).

Точка $M_0(x_0; y_0)$ является ***точкой минимума*** функции $z = f(x; y)$, если для всех точек $M(x; y)$ из окрестности точки M_0 значения функции больше, чем в M_0, то есть $f(x; y) > f(x_0; y_0)$ (рис. 3.5, *б*).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

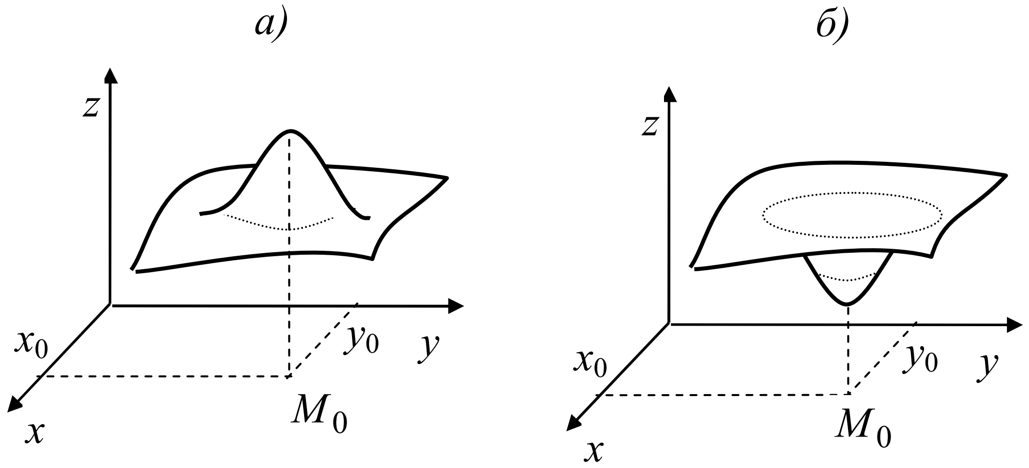


Рис. 3.5

Необходимый признак существования экстремума

Если точка $P(x_0; y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x; y)$, то первые частные производные в ней равны нулю:

$$f'_x(x_0; y_0) = 0, \quad f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Точки, в которых обе частные производные равны нулю, называются стационарными.

Замечание. Функция $z = f(x; y)$ может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются критическими.

Достаточный признак существования экстремума

Пусть точка $P(x_0; y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x; y)$, и существуют вторые производные функции в этой точке: $A = z''_{xx}$, $B = z''_{xy}$, $C = z''_{yy}$.

Если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то экстремум существует, причем это максимум при $A < 0$ ($C < 0$) и минимум при $A > 0$ ($C > 0$).

Если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то точка P не является точкой экстремума.

Если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то сделать вывод о характере стационарной точки нельзя, требуются дополнительные исследования.

Пример 1. Исследовать заданную функцию на экстремумы.

$z = x^2 + 3y^2 - 3xy + 4x - 9y$.

Решение. Найдем первые частные производные:

$z'_x = 2x - 3y + 4, \quad z'_y = 6y - 3x - 9$.

Приравняем их к нулю и решим полученную систему уравнений:

$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0, \\ 6y - 3x - 9 = 0. \end{cases}$ Отсюда $x = 1,\ y = 2$.

Точка (1; 2) является критической на экстремум. Проверим, существует ли он.

Найдем вторые производные:

$A = z''_{xx} = (2x - 3y + 4)'_x = 2$, $B = z''_{xy} = (2x - 3y + 4)'_y = -3$,

$C = z''_{yy} = (6y - 3x - 9)'_y = 6$.

Полученные значения не зависят от координат критической точки. Вычислим $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 6 - (-3)^2 = 3$. Так $\Delta > 0$, то экстремум существует. Так как $A > 0$, то точка (1; 2) – точка минимума.

Пример 2. Исследовать заданную функцию на экстремумы.

$z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Решение. Найдем первые частные производные:

$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad z'_y = 6xy - 18$.

Приравнивая эти производные к нулю, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0, \\ 6xy - 18 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим четыре критические точки:

$M_1(3; 1), M_2(1; 3), M_3(-1; -3), M_1(-3; -1)$.

Найдем вторые частные производные $A = z''_{xx} = 6x$, $B = z''_{xy} = 6y$, $C = z''_{yy} = 6x$.

Составим выражение

$\Delta = AC - B^2 = 6x6x - (6y)^2 = 36 \cdot \left(x^2 - y^2\right)$.

Вычислим значения $\Delta(x; y)$ в каждой стационарной точке:

1) $\Delta(3; 1) = 288 > 0$, $z''_{xx}(3; 1) = 18 > 0$, тогда $M_1(3; 1)$ – точка минимума, $z(M_1) = 3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 1^2 - 30 \cdot 3 - 18 \cdot 1 = -72$;

2) $\Delta(1; 3) = -288 < 0$, тогда $M_2(1; 3)$ не является точкой экстремума;

3) $\Delta(-1; -3) = -288 < 0$, тогда $M_3(-1; -3)$ не является точкой экстремума;

4) $\Delta(-3; -1) = 288 > 0$, $z''_{xx}(3; 1) = -18 < 0$, тогда $M_1(-3; -1)$ – точка максимума,

$z(M_2) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1)^2 - 30 \cdot (-3) - 18 \cdot (-1) = 72$.

3.2.5. Производная по направлению, градиент

Часть плоскости (или вся плоскость), каждой точке которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины, называется скалярным полем. Тем самым функция двух переменных $z = f(x; y)$ задает скалярное поле.

Градиентом в точке $(x; y)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $z = f(x; y)$, называется вектор, равный

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z = z'_x \cdot \vec{i} + z'_y \cdot \vec{j}\,. \tag{3.1}$$

Вектор $\overrightarrow{\text{grad}}\, z$ указывает направление наибольшего возрастания поля (функции) в данной точке и имеет модуль, равный скорости этого возрастания.

На рис. 3.6, *а* показана поверхность, являющаяся графиком функции двух переменных $z = f(x; y)$. К ее каждой точке можно построить вектор, показывающий направление, в котором происходит наибольшее возрастание функции. Векторы градиентов на плоскости xOy показаны на рис. 3.6, *б*. Очевидно, что чем круче подъем, тем длиннее векторы.

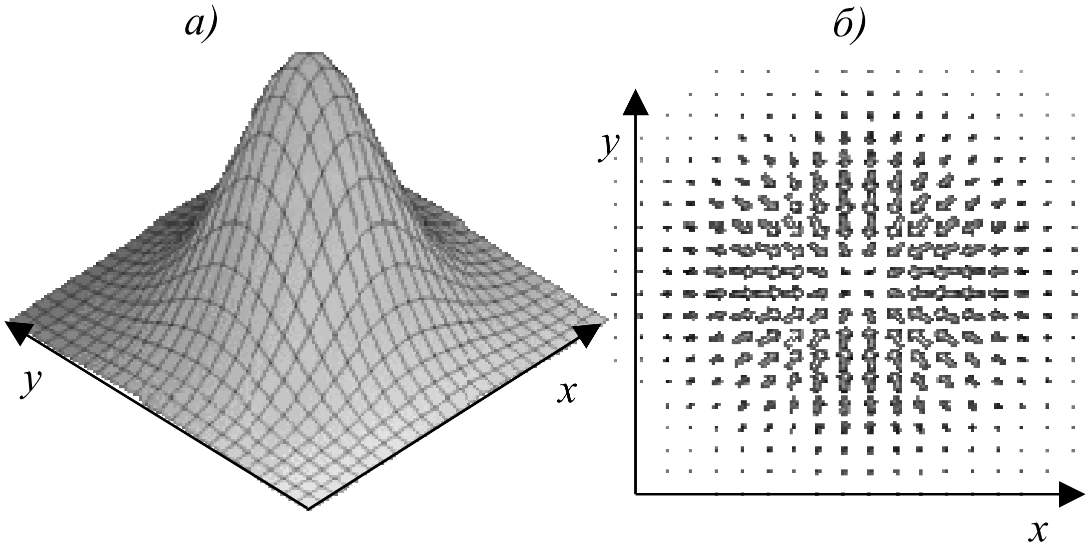


Рис. 3.6

Скорость изменения поля в точке $A(x; y)$ в произвольном направлении, заданном вектором $\overrightarrow{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \vec{j}$ находится по формуле

$$z'_{\overrightarrow{a}}(A) = z'_x(A) \cdot \cos\alpha + z'_y(A) \cdot \cos\beta, \qquad (3.2)$$

где $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$ – направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{a}$.

Пример. Даны функция $z = 5x^2y - 7xy^2 + 5xy$, точка $A(1; 2)$ и вектор $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$. Найти градиент функции z в точке $A(1; 2)$ и производную функции z в точке $A(1; 2)$ в направлении вектора $\overrightarrow{a}$.

Решение. Найдем значения частных производных $z = 5x^2y - 7xy^2 + 5xy$ в точке $A(1; 2)$:

$$z'_x = 10xy - 7y^2 + 5y, \quad z'_x(A) = 10 \cdot 1 \cdot 2 - 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 2;$$

$$z'_y = 5x^2 - 14xy + 5x, \quad z'_y(A) = 5 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = -18.$$

Тогда градиент функции в заданной точке будет равен:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z = z'_x \cdot \vec{i} + z'_y \cdot \vec{j} = 2\vec{i} - 18\vec{j}.$$

Для нахождения производной в точке A в направлении вектора $\vec{a} = -2 \cdot \vec{i} + \vec{j}$ найдем его направляющие косинусы:

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$, $\quad \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Производная вдоль заданного вектора (3.2)

$z'_{\vec{a}}(A) = 2\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) - 18 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{22}{\sqrt{5}} < 0$, то есть скалярное поле функции убывает в этом направлении.

3.2.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана функцией двух переменных $z = f(x; y)$, которая дифференцируема в некоторой точке $(x_0; y_0)$ области (то есть имеет непрерывные частные производные).

В точке $(x_0; y_0; z_0)$ данной поверхности можно провести ***касательную плоскость***, уравнение которой имеет вид:

$$z'_x(x_0; y_0)\cdot(x - x_0) + z'_y(x_0; y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (3.3)$$

Прямая, проходящая через точку $(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно к касательной плоскости, называется ***нормалью*** к поверхности $z = f(x, y)$. Канонические уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (3.4)$$

<u>Пример.</u> Дана функция $z = x^2 + xy - y$ и точка $A(1; 2)$. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + xy - y$ в точке $C(1;\ 2;\ z_0)$.

Решение. Найдем частные производные и вычислим их значения в заданной точке:

$$z'_x = 2x + y \quad \Rightarrow \quad z'_x(1; 2) = 2\cdot 1 + 2 = 4;$$
$$z'_y = x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'_y(1; 2) = 1 - 1 = 0.$$

Значение $z_0 = f(x_0; y_0) = f(1; 2) = 1^2 + 1\cdot 2 - 2 = 1$.

Запишем уравнение касательной плоскости, для чего подставим необходимые данные в (3.3), получим

$$4(x-1) + 0(y-2) - (z-1) = 0 \text{ или } 4x - z - 3 = 0.$$

Для получения уравнения нормали подставим все данные в уравнение (3.4). Получим: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Неопределенный интеграл

4.1.1. Таблица и свойства неопределенных интегралов

Пусть функция $f(x)$ является производной от функции $F(x)$, то есть

$$F'(x) = f(x).$$

Тогда функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для данной функции $f(x)$.

Например, задана функция $f(x) = 3x^2$ и следует найти функцию, производная которой равна $3x^2$. Это могут быть функции: x^3, $x^3 + 10$, $x^3 - 100$ и т. д. Таким образом, первообразной для $f(x) = 3x^2$ является любая функция вида $F(x) = x^3 + C$, где C – произвольное постоянное число.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность первообразных:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C,$$

где $\int$ – знак неопределенного интеграла; $f(x)$ – *подынтегральная функция*; $f(x) \cdot dx$ – *подынтегральное выражение*.

Имеем: $\int 3x^2 \cdot dx = x^3 + C$.

На основании определения запишем таблицу основных интегралов (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$

Рассмотрим применение формулы № 2 (табл. 4.1).

Пример 1. $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$.

Пример 2. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

Пример 3. $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3x^{4/3}}{4} + C$.

Пример 4.

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx = \int x^{-2/5} dx = \frac{x^{-2/5+1}}{-2/5+1} + C = \frac{x^{3/5}}{3/5} + C = \frac{5x^{3/5}}{3} + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

По определению $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Так как дифференциал функции $dU = U' \cdot dx$, то

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(f(x)dx\right)' \cdot dx = \left(F(x) + C\right)' \cdot dx = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

Так как подынтегральное выражение $f(x)\cdot dx = F'(x)\cdot dx = dF(x)$.

Таким образом, знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожают друг друга, интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными функциями.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Рассмотрим применение основных свойств интегралов.

Пример 5.

$$\int 2xdx = 2\int x^1 dx = 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = 2\frac{x^2}{2} + C = x^2 + C.$$

Пример 6.

$$\int \left(5x^4 - 3x^2 + 1\right)\cdot dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$$

Пример 7.

$$\int \left(6x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\right)dx =$$

$$= 6\int x^3 dx - 3\int x^{-1/2} dx + 2\int dx = 6\frac{x^4}{4} - 3\cdot 2x^{1/2} + 2x + C.$$

Пример 8.

$$\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2}dx = \int \left(x^4 - x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 9.

$$\int \left(\frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{x^2 - 4}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

4.1.2. Основные методы интегрирования

Интегрирование функции $f(kx+b)$

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C.$$

Так как, по определению, производная от правой части должна быть равна подынтегральной функции, то:

$$\left(\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C\right)' = \frac{1}{k}\cdot k\cdot f(kx+b) = f(kx+b),$$

что доказывает приведенную выше формулу.

Пример 1. $\int \sin(5x)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x)+C$.

Пример 2. $\int \frac{1}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Пример 3. $\int (3x+2)^4\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^5}{5}+C$.

Замена переменной

Формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо x любой дифференцируемой функции от x. То есть, если $\int f(x)\cdot dx = F(x)+C$, то и $\int f(t)\cdot dt = F(t)+C$, где $t=\varphi(x)$.

Пример 4.

$$\int \sin^5 x\cdot\cos x\cdot dx = \left\langle \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\cdot dx \end{array}\right\rangle =$$

$$=\int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

Пример 5.

$$\int x\cdot\sin\left(x^2+1\right)\cdot dx = \left\langle \begin{array}{c} t=x^2+1 \\ dt=2xdx \end{array}\right\rangle = \frac{1}{2}\int \sin t\cdot dt = -\frac{1}{2}\cos t =$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left\langle \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2,\, dx = 2tdt \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Производная произведения равна: $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

Домножим обе части на dx: $(u\cdot v)'\cdot dx = u'\cdot v\cdot dx + u\cdot v'\cdot dx$. Получим $d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$. Проинтегрируем обе части:

$$\int d(u\cdot v) = \int v\cdot du + \int u\cdot dv.$$

Окончательно получим $\int udv = uv - \int vdu$.

Формула интегрирования по частям используется в случае, если требуется найти интеграл вида: $\int P(x)\cdot u(x)\cdot dx$, где $P(x)$ – многочлен от x; $u(x) = \sin x$ $\left(\text{или } \cos x, \arcsin x, e^x, \operatorname{arctg} x, \ln x\right)$.

Пример 7. Найти $\int xe^x dx$.

Выделим в подынтегральном выражении u и dv.

Пусть $u = x$, тогда $du = dx,\ dv = e^x dx \quad \Rightarrow v = \int dv = \int e^x dx = e^x$.

Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 8.

$$\int \ln x\cdot dx = \left\langle \begin{matrix} u = \ln x; \quad du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx; \quad v = \int dv = \int dx = x \end{matrix} \right\rangle = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln x - x + C.$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональная функция имеет вид:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно:

$$P_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0;$$
$$Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Если $m \geq n$ – дробь называется неправильной, в противном случае – правильной.

Простейшие рациональные дроби подразделяются на 4 вида:

I вида: $\dfrac{A}{x-c}$ или $\dfrac{A}{x}$;

II вида: $\dfrac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ или $\dfrac{A}{x^{\alpha}}$;

III вида: $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ или $\dfrac{Mx+N}{x^2+q}$, где знаменатель не имеет корней;

IV вида: $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}}$ или $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+q\right)^{\beta}}$.

Если дробь правильная, то интегрирование производится следующим образом:

1) выписывается знаменатель и находятся все его корни, после чего он представляется как произведение линейных и квадратичных множителей:

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_2};$$

2) правильная рациональная дробь раскладывается на сумму простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_1-1}} \ldots + \frac{C}{x-a_1} + \ldots \frac{D}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \ldots$$
$$+ \frac{Mx+N}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}} + \frac{Rx+S}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1-1}} + \ldots + \frac{Tx+Y}{(x^2+p_s x+q_s)};$$

3) находится интеграл от суммы простейших дробей.

Пример 9. Разложить на сумму простейших дробей следующие дроби:

а) $\dfrac{3x+5x^2}{x^3(x+2)(x^2+4)}$; б) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$.

Решение.

а) $\dfrac{3x+5x^2}{x^3(x+2)(x^2+4)}=\dfrac{A}{x^3}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x}+\dfrac{D}{x+2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+4}$;

б) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}=\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x+1}$.

Пример 10. Найти $\int\dfrac{4x+6}{x^2+3x-10}dx$.

Решение.

Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x+6}{x^2+3x-10}=\frac{4x+6}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}=\frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}.$$

Приравняем числители дробей, получим

$$4x+6=A(x+5)+B(x-2).$$

Зададим два значения x, подставим их в это уравнение и найдем коэффициенты A и B.

$$x=2\ \Rightarrow\ 14=A\cdot 7\ \Rightarrow\ A=2.$$

$$x=-5\ \Rightarrow -14=B(-7)\ \Rightarrow\ B=2.$$

Найденные значения A и B подставим в разложение дроби. Исходный интеграл найдем как сумму интегралов.

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{2dx}{x-2}+\int\frac{2dx}{x+5}=2\ln|x-2|+2\ln|x+5|+C.$$

Пример 11. Найти $\int\dfrac{2x-5}{x^3+9x}dx$.

Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{2x-5}{x^3+9x}=\frac{2x-5}{x\left(x^2+9\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A\left(x^2+9\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+9\right)}=$$

$$=\frac{Ax^2+9A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+9\right)}.$$

Приравняем числители дробей, получим

$2x-5=Ax^2+9A+Bx^2+Cx$.

Сгруппируем слагаемые в правой части:

$2x-5=x^2(A+B)+Cx+9A$.

Уравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B \\ x^1 & 2 = C \\ x^0 & -5 = 9A \end{array} \quad \text{Решаем систему, получаем:} \begin{cases} C = 2 \\ A = -\dfrac{5}{9} \\ B = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

Подставляем найденные коэффициенты в разложение, получаем, что

$$\frac{2x-5}{x^3+9x} = \frac{-5/9}{x} + \frac{5/9\,x+2}{x^2+9}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x-5}{x^3+9x}dx = \int \frac{-5/9}{x}dx + \int \frac{5/9\,x+2}{x^2+9}dx =$$

$$= -\frac{5}{9}\ln x + \int \frac{5/9\,x}{x^2+9}dx + \int \frac{2}{x^2+9}dx =$$

$$= -\frac{5}{9}\ln x + \frac{5}{9\cdot 2}\int \frac{2x}{x^2+9}dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}dx =$$

$$= -\frac{5}{9}\ln x + \frac{5}{9\cdot 2}\ln\left(x^2+9\right) + 2\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Пример 12. Найти $\int \frac{4x+5}{x^2+4x+8}dx$.

Знаменатель не имеет корней, разложить на более простые дроби эту дробь невозможно, данная дробь является простейшей 3 вида. Выделим в числителе производную знаменателя и распишем на два интеграла:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{(2x+4)+3}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx + \int \frac{3}{x^2+4x+8}dx =$$

$$= \ln\left(x^2+4x+8\right) + 3\int \frac{1}{\left(x^2+4x+4\right)+4}dx = \ln\left(x^2+4x+8\right) +$$

$$+ 3\int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \ln\left(x^2+4x+8\right) + 3\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Если дробь неправильная, то сначала выделяется целая часть, затем остаток расписывается на сумму простейших дробей, после чего все слагаемые интегрируются.

Пример 13. Найти $\int \frac{2x^3+5}{x-2}dx$.

Дробь – неправильная, степень числителя больше степени знаменателя.

Выделим целую часть путем деления многочлена на многочлен.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+5 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\;2x^3-4x & 2x+4 \\ \cline{1-1}
4x+5 & \\
-\;4x-8 & \\ \cline{1-1}
13 &
\end{array}
$$

$2x+4$ – целая часть

13 – остаток

Тогда

$$\int \frac{2x^3+5}{x-2}dx = \int\left(2x+4+\frac{13}{x-2}\right)dx =$$

$$= x^2+4x+13\ln|x-2|+C.$$

4.2. Определенный интеграл

4.2.1. Определение, геометрический смысл и свойства определенного интеграла

Рассмотрим задачу, приводящую к понятию определенного интеграла. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$ и нужно найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью *Ox*, линией $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, причем $f(x) > 0$ (рис. 4.1).

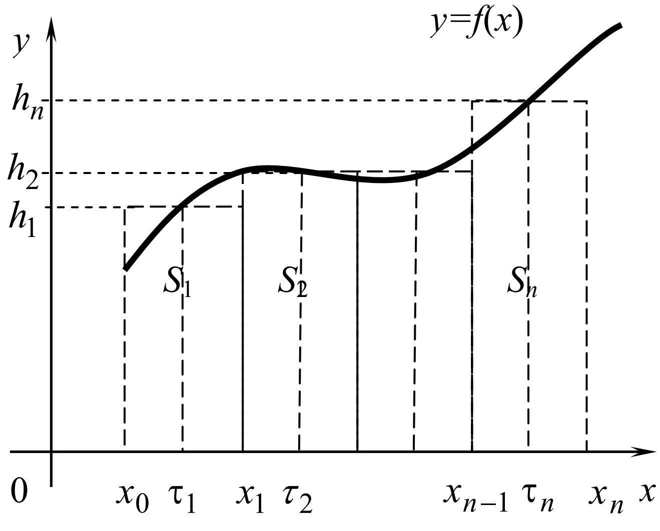


Рис. 4.1

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n малых отрезков произвольной длины точками $x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ разбиения выберем некоторую произвольную точку τ_i и положим $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Будем считать высоту на каждом промежутке Δx_i постоянной, равной значению функции в точке τ_i. То есть $h_i = f(\tau_i)$.

Тогда площадь столбчатой фигуры

$$S_{\text{ст}} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \Delta x_1 \cdot h_1 + \Delta x_2 \cdot h_2 + \ldots. = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) \cdot \Delta x_i .$$

Эта сумма, где значение функции на частичном интервале умножается на длину интервала, называется *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на $[a,\ b]$.

Чтобы найти площадь криволинейной трапеции $S_{\text{кр.тр}}$, будем бесконечно измельчать все малые отрезки. То есть, $n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$. Тогда $S_{\text{ст}} \to S_{\text{кр.тр}}$.

Таким образом, $S_{\text{кр.тр}} = \lim S_{\text{ст}} = \lim \sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i) \cdot \Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма, когда разбиение интервала $[a,\ b]$ бесконечно измельчается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) \cdot \Delta x_i .$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a,\ b]$. При этом $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а числа a и b – *пределами интегрирования* (a – нижний предел, b – верхний предел), а сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\tau_i) \cdot \Delta x_i$ – *интегральной суммой.*

Геометрический смысл: определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$ на интервале $[a,\ b]$, если функция $f(x) > 0$.

Свойства определенного интеграла

1. Если верхний и нижний пределы совпадают, то определенный интеграл равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) определенных интегралов от этих функций.

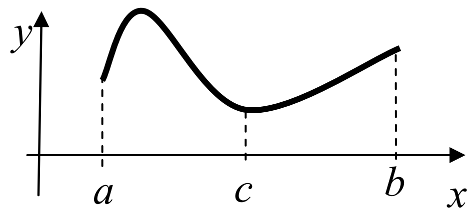
$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

5. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям.

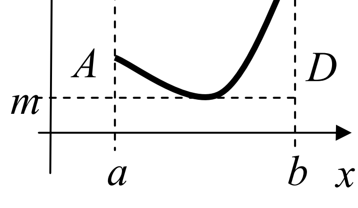
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



6. Оценка интеграла на интервале.

Если $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a, b]$, тогда значения интеграла от этой функции не менее произведения m на длину отрезка и не более произведения M на длину отрезка:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$



На рисунке выделим криволинейную трапецию под линией AC и два прямоугольника: $aADb$ и $aBCb$.

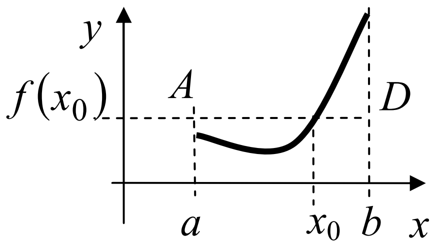
Очевидно, что их площади находятся в соотношении:

$$S_{aADb} \le S_{\text{кр.тр}} \le S_{aBCb}.$$

7. Среднее значение функции на интервале.

Внутри интервала интегрирования $[a,\ b]$ существует, по меньшей мере, одно значение $x = x_0$, $a \le x_0 \le b$, для которого выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)\cdot(b-a).$$



То есть, найдется такой прямоугольник *aADb*, площадь которого равна площади криволинейной трапеции на интервале $[a,\ b]$.

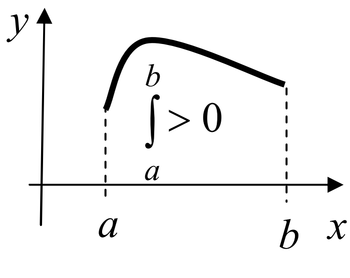
Тогда $f(x_0) = f_{\text{ср}}$ – среднее значение *f* на отрезке, $f_{\text{ср}} = \dfrac{\int_a^b f dx}{b-a}$.

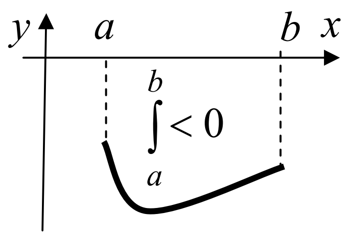
8. О знаке интеграла.

Если подынтегральная функция в интервале интегрирования сохраняет постоянный знак, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция.

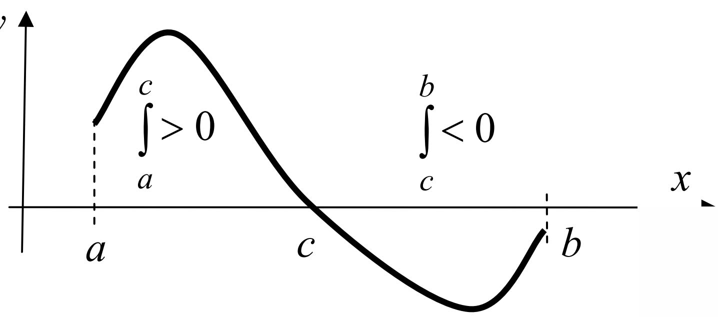
При $f(x) > 0$ на $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\cdot \Delta x_i . > 0$.

При $f(x) < 0$ на $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\cdot \Delta x_i < 0$.

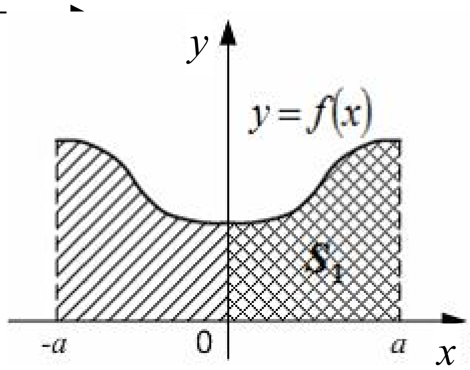




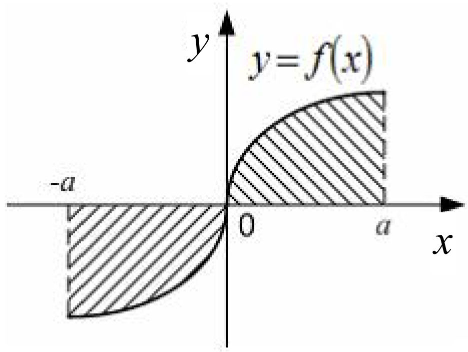
Замечание. Если функция меняет знак на $[a,\ b]$, то определенный интеграл может быть или больше нуля, или меньше нуля, или равен нулю.



9. Если функция $y = f(x)$ – четная и $f(x) \geq 0$ на $[-a, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.



10. Если функция $y = f(x)$ – нечетная и $f(x) \geq 0$ на $[0, a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.



4.2.2. Вычисление определенного интеграла

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

Пример 1.

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Пример 2.

$$\int\limits_{-1}^{2} (9x^2 - 4x + 5)dx = \left(9\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = (3\cdot 2^3 - 2\cdot 2^2 + 5\cdot 2) -$$

$$-(3\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1)) = (24 - 8 + 10) - (-3 - 2 - 5) = 36.$$

Пример 3.

$$\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}x dx = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\langle \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \cdot dx \end{matrix} \right\rangle = \int\limits_{x=0}^{x=\pi/4} \frac{1}{t} dt =$$

$$= -\ln|t|\Big|_0^{x=\pi/4} = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \left(-\ln|\cos 0|\right) - \left(-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right) =$$

$$= -\ln 1 + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}35.$$

Пример 4.

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left\langle \begin{matrix} t = \ln x & x_в = e & t_в = \ln e = 1 \\ dt = \frac{1}{x} dx & x_н = 1 & t_н = \ln 1 = 0 \end{matrix} \right\rangle = \int\limits_0^1 t^3 dt =$$

$$= \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

При решении заменили пределы интегрирования.

Пример 5. Найти $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x dx$.

Интеграл вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$.

$$\int\limits_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = \left\langle \begin{matrix} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \cos x dx & \Rightarrow & v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$$

Пример 6.

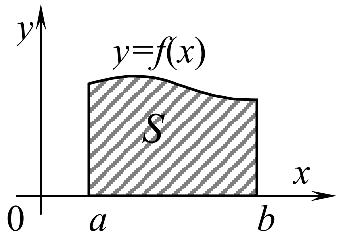
$$\int\limits_0^1 x e^x dx = \left\langle \begin{matrix} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \Rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\rangle = x e^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx =$$

$$= \left(1 \cdot e^1 - 0\right) - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) = e - e + 1 = 1.$$

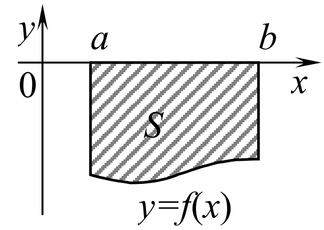
4.2.3. Приложения определенного интеграла

4.2.3.1. Вычисление площадей плоских фигур

1) Площадь криволинейной трапеции на отрезке $[a, b]$, ограниченной линиями: осью Ox, $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$.

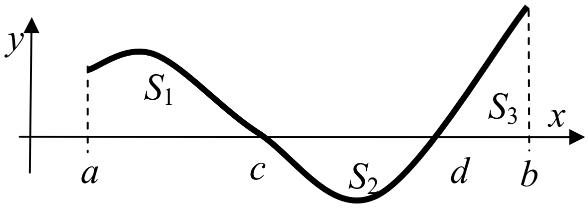


Если при этом $f(x) \ge 0$ на этом отрезке, то площадь $S = \int_a^b f(x)dx$.



Если $f(x) \le 0$ на этом отрезке, то площадь $S = -\int_a^b f(x)dx$, или $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Наконец, если линия $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a, b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знак, и к каждой части применить ту формулу, которая ей соответствует.



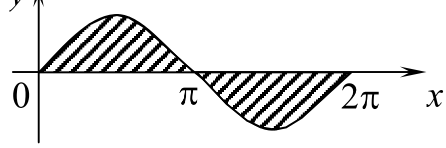
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \int_d^b f(x)dx.$$

Пример 1.

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \le x \le 2\pi$.

Решение.

Построим график функции $y = \sin x$.

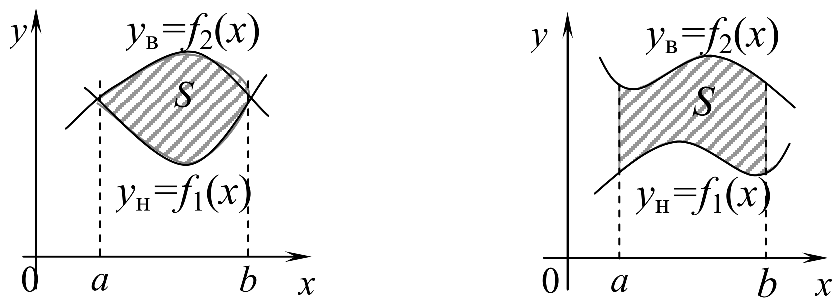


Так как функция меняет знак, то разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на два отрезка: $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$.

На первом из них $\sin x \ge 0$, на втором $\sin x \le 0$. Тогда, используя формулы, находим искомую площадь:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right|=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}+\left|-\cos x\right|_{\pi}^{2\pi}=$$
$$=(-(-1)+1)+|-1-1|=2+|-2|=4 \text{ ед. кв.}$$

2) Площадь криволинейной фигуры, ограниченной снизу графиком функции $y_{\text{н}}=f_1(x)$, сверху – графиком функции $y_{\text{в}}=f_2(x)$. Слева и справа может быть ограничена прямыми $x=a$, $x=b$.



В обоих случаях вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (y_{\text{в}}-y_{\text{н}})dx,$$

где $y_{\text{в}}$ и $y_{\text{н}}$ – уравнения соответственно верхней и нижней линий, ограничивающих фигуру; a и b – точки пересечения линий (уравнения вертикальных прямых).

Пример 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=2x,\ y=3-x^2.$$

Найдем точки пересечения этих линий, для чего приравняем правые части уравнений:

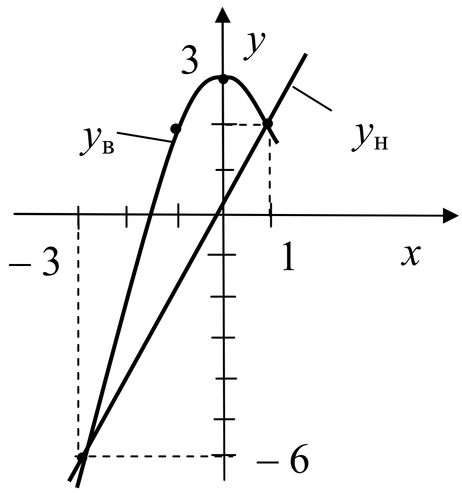
$$2x=3-x^2 \ \Rightarrow\ x^2+2x-3=0.$$

Найдем дискриминант и корни: $D=2^2-4(-3)=16$, $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$, $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$.

Построим линии между точками пересечения, для чего зададим несколько значений x и найдем соответствующие y.

1) $y = 2x$, это прямая, построим ее по двум точкам.

x	–3	1
y	–6	2



2) $y = 3 - x^2$, это парабола, возьмем несколько точек (между точками пересечения).

x	–3	–1	0	1
y	–6	2	3	2

Из рисунка видим, что $y_в = 3 - x^2$, $y_н = 2x$. Найдем площадь:

$$S = \int_a^b (y_в - y_н)dx = \int_{-3}^{1}\left(3 - x^2 - 2x\right)\cdot dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(3\cdot 1 - \frac{1^3}{3} - 1^2\right) - \left(3\cdot(-3) - \frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2\right) =$$

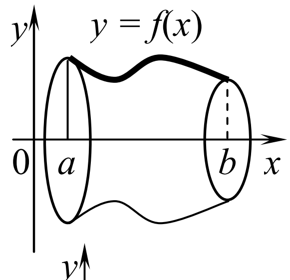
$$= 1\frac{2}{3} - (-9 + 9 - 9) = 1\frac{2}{3} + 9 \approx 10{,}7 \text{ ед. кв.}$$

4.2.3.2. Вычисление объема тела вращения

На промежутке $x \in [a; b]$ построена непрерывная линия $y = f(x)$, ($f(x) \geq 0$).

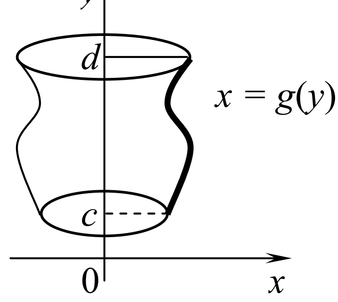
1. Линия вращается вокруг оси Ox. Объем полученного тела находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$



2. Линия вращается вокруг оси Oy. Объем полученного тела находится по формуле

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy.$$



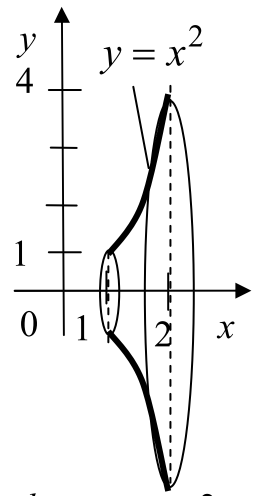
Пример 3.

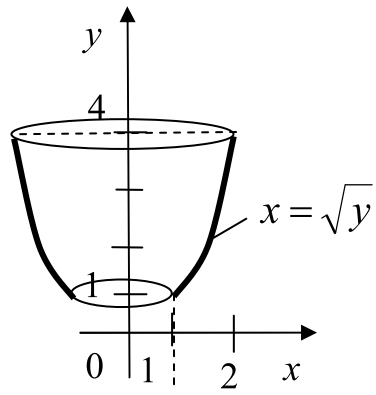
Линия $y = x^2$ задана при $x \in [1;\ 2]$. Найти объем тела, полученного вращением этой линии:

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение. Построим линию и тело, найдем объемы.

а) *б*)





$$\text{а) } V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx = \pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{32\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{31\pi}{5} \approx 19{,}5 \text{ ед.куб.};$$

$$\text{б) } V = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_1^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^4 = \frac{16\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2} \approx 23{,}6 \text{ ед.куб.}$$

4.3. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла мы предполагали, что подынтегральная функция является ограниченной, а пределы интегрирования – конечными. Такой интеграл называется ***собственным*** (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется ***несобственным.***

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$. Тогда интеграл на этом промежутке находится следующим образом:

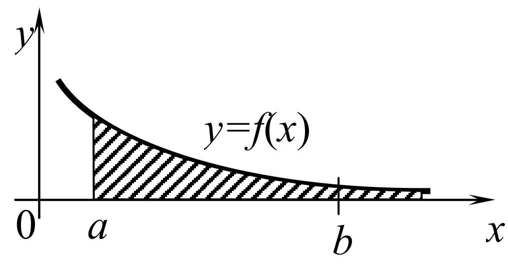
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходится, а если предел не существует, то интеграл ***расходится***.

Геометрически этот несобственный интеграл, по аналогии с собственным интегралом, представляет собой площадь криволинейной трапеции, длина которой не ограничена.



<u>Пример 1.</u> Исследовать на сходимость интегралы.

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1-e^{-\infty} = 1$. Интеграл сходится;

б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^b\right) = \ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty$,

интеграл расходится;

в) установим, при каких значениях α интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится. Случай $\alpha = 1$ был рассмотрен в примере б). Если $\alpha \neq 1$, то имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, \text{ при } \alpha \le 1, \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Значит, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

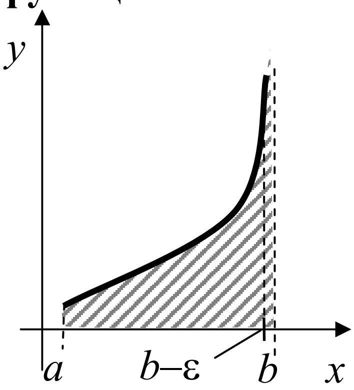
Аналогично определяются следующие несобственные интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{b} f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \quad c \in (-\infty, \infty).$$

Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < b$ и стремится к бесконечности, когда $x \to b$ (то есть на отрезке $[a,\ b]$ функция $f(x)$ не ограничена).



Тогда интеграл на этом промежутке будем находить следующим образом:

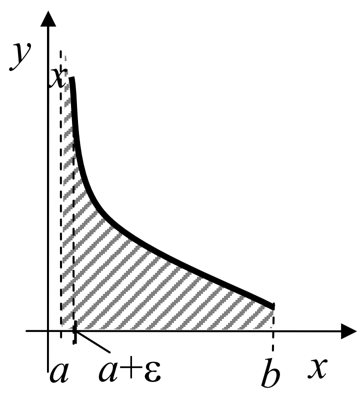
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ***сходится***, а если предел не существует, то интеграл ***расходится.***

Аналогично, если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

В обоих случаях (при $f(x) > 0$) находим площадь бесконечной криволинейной трапеции, высота которой не ограничена.



<u>Пример 2.</u>

Установить, сходятся ли несобственные интегралы.

а) $$\int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^{3} (x-1)^{-2}dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x-1} \right) \Bigg|_{1+\varepsilon}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{3-1} + \frac{1}{1+\varepsilon-1} \right) = -\frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty,$$

интеграл расходится;

б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-1)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln(x-1))\Big|_{1+\varepsilon}^3 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 2 - \ln\varepsilon) = \ln 2 + \infty = \infty,$

интеграл расходится;

в) $\int\limits_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^5 = 4 - 0 = 4$, интеграл сходится.

В этом примере при $x = 1$ первообразная функция непрерывна, поэтому интеграл вычисляется обычным способом.

В общем случае имеем: $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } \alpha < 1; \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1. \end{cases}$

Наконец, если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при приближении аргумента к обоим концам промежутка (a, b), то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \ a < c < b.$$

Если при этом сходятся оба интеграла в правой части последнего равенства, то сходится и интеграл слева.

4.4. Приближенное интегрирование

Интегрирование функций является составной частью многих научных и технических задач. При решении практических задач часто бывает, что интеграл неудобно или невозможно взять аналитически: он может не выражаться в элементарных функциях, подынтегральная функция может быть задана в виде таблицы. В таких случаях применяют методы численного интегрирования.

Известно, что определенный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции на промежутке $[a; b]$. Общий подход к вычислению интеграла численными методами сводится к нахождению этой площади. Интервал $[a; b]$ разбивают на n

равных частей. Обозначим $a = x_0$ и отложим точки: x_1, x_2, $\dots x_i \dots x_n = b$. Получим отрезки шириной $h = \dfrac{b-a}{n}$. Проведя вертикальные линии, получим n полосок (криволинейных трапеций).

Затем находят площади каждой полоски и сумму их площадей. Чем мельче разбиение, тем точнее найденное значение определенного интеграла.

4.4.1. Метод прямоугольников

В методе прямоугольников криволинейную трапецию, ограниченную функцией $f(x)$ на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, заменяют прямоугольником шириной h. Отложим на оси Oy соответствующие значения: y_0, y_1, y_2 и т. д.

В **методе прямоугольников слева** (рис. 4.2, *а*) высота прямоугольника выбирается равной значению функции в крайней левой точке отрезка $[x_i; x_{i+1}]$. Площадь ступенчатой фигуры

$$S_{\text{лев}} = h \cdot y_0 + h \cdot y_1 + \dots + h \cdot y_{n-1}$$

приближенно равна площади криволинейной трапеции.

Тогда определенный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i$.

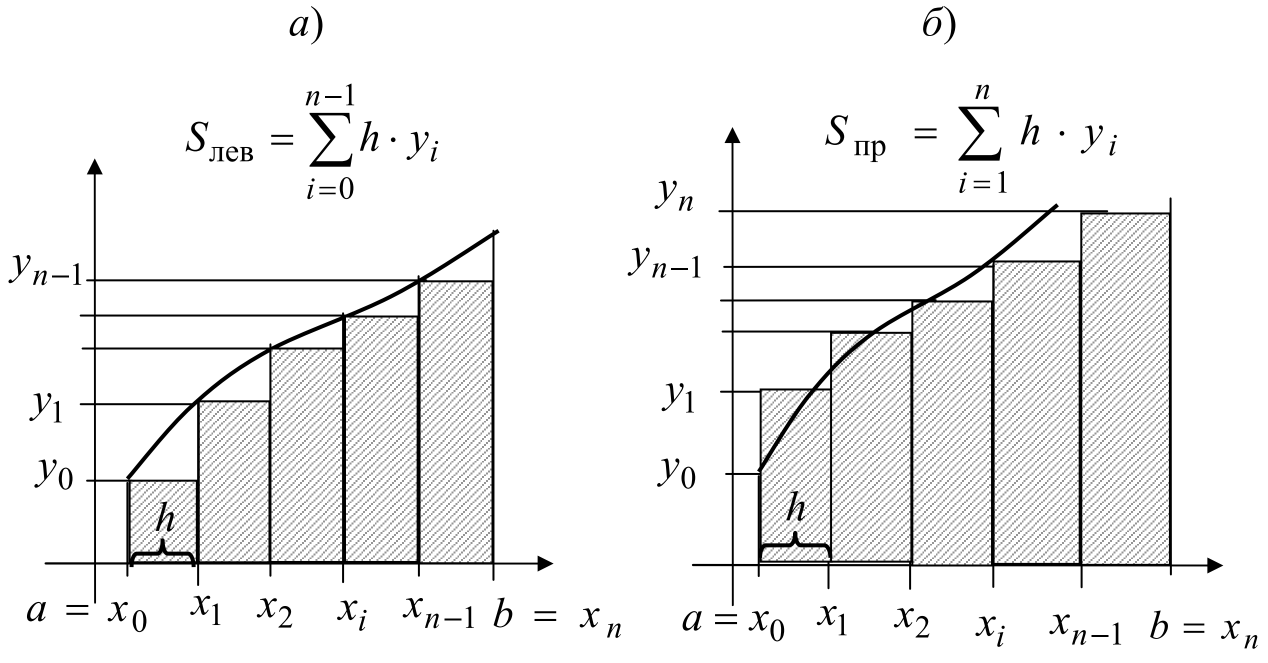


Рис. 4.2

В **методе прямоугольников справа** (рис. 4.2, *б*) высота прямоугольника выбирается равной значению функции в крайней правой точке отрезка $[x_i; x_{i+1}]$. Площадь ступенчатой фигуры

$$S_{\text{пр}} = h \cdot y_1 + h \cdot y_2 + \ldots + h \cdot y_n.$$

Тогда $I = \int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$.

4.4.2. Метод трапеций

В методе трапеций криволинейную трапецию, ограниченную функцией $f(x)$ на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, заменяют трапецией с высотой *h* (рис. 4.3).

Площадь трапеций:

$$\Delta S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h;$$

$$\Delta S_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h;$$

…

$$\Delta S_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} \cdot h;$$

$$\Delta S_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h.$$

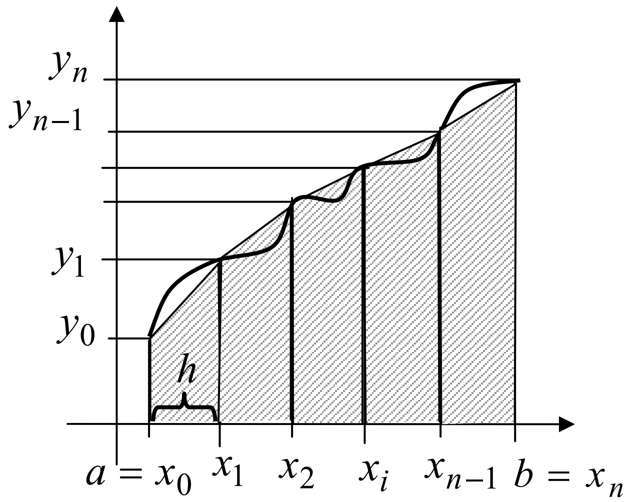


Рис. 4.3

Тогда суммарная площадь:

$$S = h \cdot \left(\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2} \right) + \frac{y_1}{2} + \ldots. + \left(\frac{x_{n-2}}{2} + \frac{x_{n-1}}{2} \right) + \left(\frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_n}{2} \right) \right) =$$

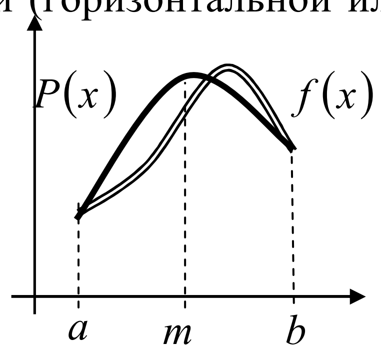
$$= h \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

Тогда $I = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n} \cdot \left(\dfrac{y_0 + y_n}{2} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i \right)$.

4.4.3. Формула Симпсона (парабол)

В выше рассмотренных способах площадь каждой малой криволинейной трапеции S_i приближенно рассчитывалась как площадь фигуры, ограниченной сверху прямой линией (горизонтальной или наклонной).

В рассматриваемом случае график функции $f(x)$ заменяется кривой, состоящей из частей квадратичных парабол $P(x)$.



Поэтому формула Симпсона при одинаковом значении h значительно точнее, чем формулы прямоугольников и трапеций.

Интервал интегрирования $[a;\ b]$ разбивают на четное число равных промежутков, тогда

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} \cdot \left((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots) + 2(y_2 + y_4 + \ldots)\right).$$

<u>Пример.</u> Вычислить приближенно $\int_1^5 x^2 dx$ для $n = 4$:

а) по формулам прямоугольников; б) по формуле трапеций; в) по формуле Симпсона.

Имеем: $h = \frac{5-1}{4} = 1$.

Запишем: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 1 = 2$, $x_2 = 2 + 1 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

Найдем значения функции $y = x^2$ для x_i.

$y_0 = y(1) = 1^2 = 1$, $y_1 = y(2) = 2^2 = 4$, $y_2 = y(3) = 9$,
$y_3 = y(4) = 16$, $y_4 = y(5) = 25$.

а) По формулам прямоугольников

слева: $\int_1^5 x^2 dx \approx 1 \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

справа: $\int_1^5 x^2 dx \approx 1 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$.

б) По формуле трапеций

$$\int_1^5 x^2dx \approx 1\cdot\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right)=\frac{1+25}{2}+4+9+16=42.$$

в) По формуле Симпсона

$$\int_1^5 x^2dx \approx \frac{5-1}{3\cdot 4}\cdot\left(\left(y_0+y_4\right)+4\left(y_1+y_3\right)+2y_2\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+25+4\left(4+16\right)+2\cdot 9\right)=\frac{124}{3}.$$

Точное значение: $\int_1^5 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^5=\frac{125}{3}-\frac{1}{3}=\frac{124}{3}\approx 41{,}3$.

Таким образом, по точности в порядке убывания следуют: формула Симпсона, затем формула трапеций и формулы прямоугольников.

4.5. Двойной интеграл

4.5.1. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть требуется вычислить объем цилиндрического тела, ограниченного областью D в плоскости xOy, поверхностью $z=f(x;\,y)$ над ней и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz (рис. 4.4).

Разобьем тело вертикальными плоскостями, параллельными плоскостям xOz и yOz. Получим столбики, высоту которых можно считать постоянной величиной, так как их число очень велико.

Объем каждого столбика равен $\Delta V_i=z_i\cdot\Delta S_i$, где $\Delta S_i=\Delta x_i\cdot\Delta y_i$ – элемент площади; $z_i=f(x;\,y)$ – высота столбика, равна значению функции z в произвольной точке, лежащей внутри прямоугольника площадью ΔS_i.

Объем столбчатой фигуры равен сумме элементарных объемов: $V_{\text{ст}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i=\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\cdot\Delta S_i$.

Тогда при $n\to\infty$ и $\Delta S_i\to 0$ объем цилиндрического тела равен пределу: $V=\lim\sum\Delta V_i=\lim\sum z_i\cdot\Delta S_i$.

Двойным интегралом от функции $z = f(x;\, y)$ по области D называется предел интегральной суммы, в которой значение функции умножается на элемент площади, причем максимальный элемент площади стремится к нулю:

$$\iint\limits_D z(x;\, y)dS = \lim_{\max \Delta S \to 0} \sum z_i \cdot \Delta S_i\,.$$

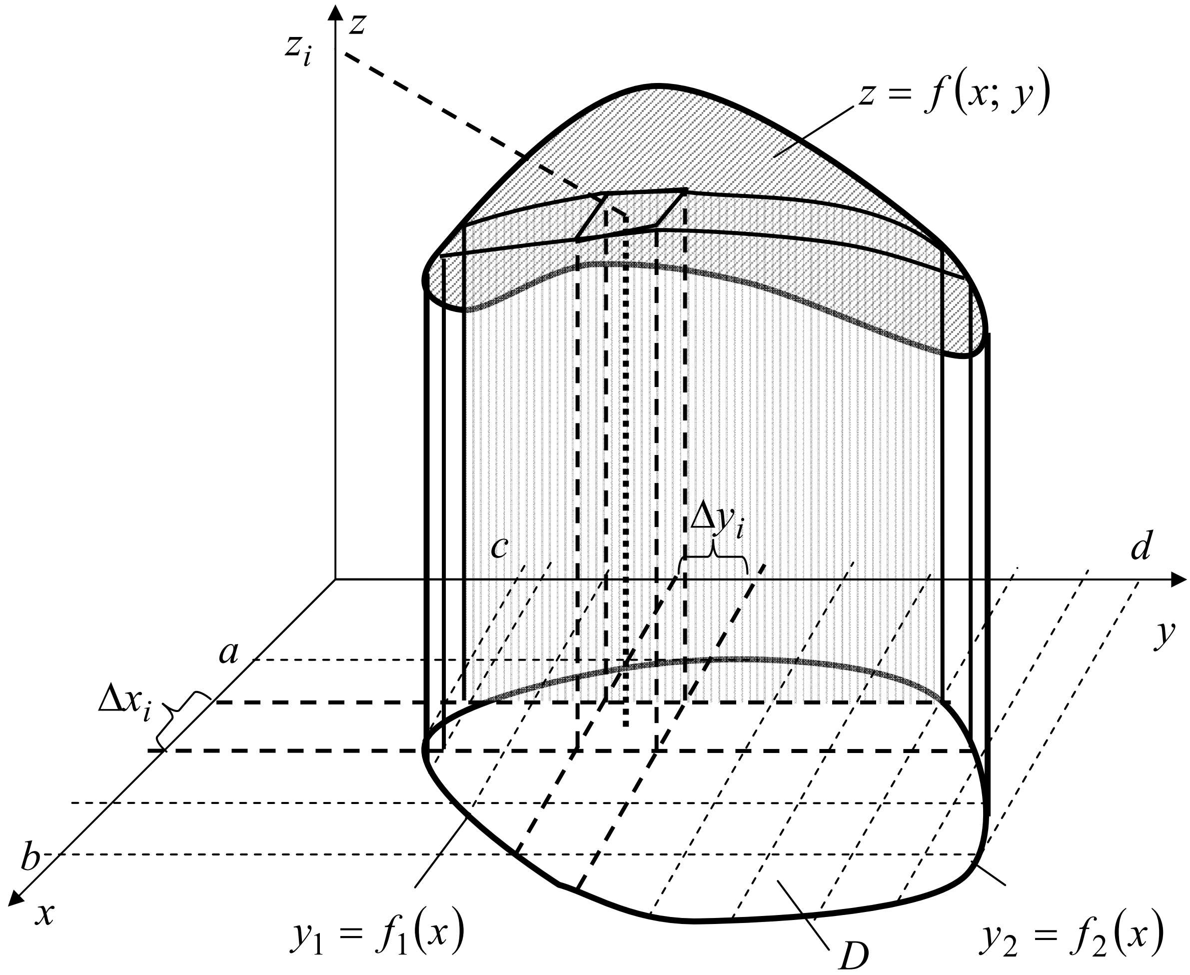


Рис. 4.4

Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла.

4.5.2. Вычисление двойного интеграла

Разобьем тело на вертикальные пластины толщиной Δx_i и рассмотрим одну из них. Так если $\Delta x_i \to 0$, то объем этой пластины равен произведению площади криволинейной трапеции на Δx_i:

$$\Delta V_i = \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x;\, y)dy\right] \cdot \Delta x_i .$$

Здесь $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ – переменные величины.

Весь объем цилиндрического тела равен пределу суммы и двойному интегралу:

$$V = \lim \sum \Delta V_i = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x;\, y)dy\right] \cdot \Delta x_i = \int_a^b \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x;\, y)dy\right] \cdot dx$$

То есть, можно записать:

$$\iint_D z(x;\, y)dS = \int_a^b dx \cdot \int_{y_1}^{y_2} f(x;\, y)dy .$$

В данном случае имеем внутренний интеграл $\int_{y_1}^{y_2} f(x;\, y)dy$ – по y, а внешний – по x.

Рассуждая аналогично, разбивая цилиндрическое тело на пластины, параллельные плоскости xOz, получим, что

$$\iint_D z(x;\, y)dS = \int_c^d dy \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x;\, y)dx .$$

Здесь внутренний интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x;\, y)dx$ берется по x, а внешний – по y. Границы внутреннего интеграла $x_1 = \varphi_1(y)$ и $x_2 = \varphi_2(y)$ – переменные величины.

Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного.

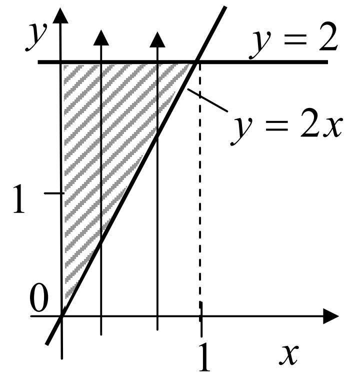
<u>Пример 1.</u> Вычислить $\iint_D (2xy + 3)dS$, если $D: \begin{cases} y = 2x, \\ y = 2, \\ x = 0. \end{cases}$

1. Взять внешний интеграл по x.
2. Взять внешний интеграл по y.

Решение.

1. Взять внешний интеграл по x.

Построим область D.



Запишем двойной интеграл в виде повторного и расставим границы:

$$\iint\limits_D (2xy+3)dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{y=2x}^{y=2} (2xy+3)dy$$

Сначала расставим границы у внутреннего интеграла, для чего через область проведем стрелки в направлении оси Oy. Уравнение нижней линии запишем как нижнюю границу, уравнение верхней линии – как верхней границы.

У внешнего интеграла границами являются числа, ограничивающие область D по оси Ox.

Выпишем и найдем внутренний интеграл по y, считая $x = \text{const}$:

$$\int\limits_{y=2x}^{y=2} (2xy+3)dy = \int\limits_{y=2x}^{y=2} 2xydy + \int\limits_{y=2x}^{y=2} 3dy = 2x \cdot \int\limits_{y=2x}^{y=2} ydy + 3 \cdot \int\limits_{y=2x}^{y=2} dy =$$

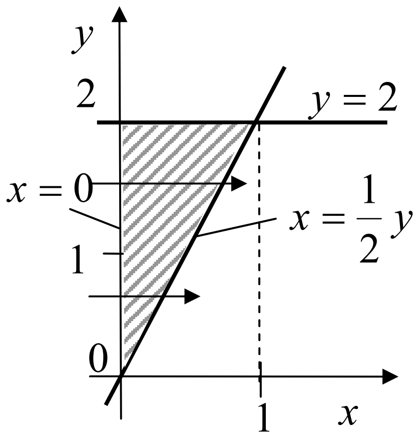
$$= \left(xy^2 + 3y\right)\Big|_{y=2x}^{y=2} = \left(x \cdot 2^2 + 3 \cdot 2\right) - \left(x \cdot (2x)^2 + 3 \cdot 2x\right) = -4x^3 - 2x + 6.$$

Найденное значение внутреннего интеграла подставим в повторный интеграл:

$$\iint\limits_D (2xy+3)dS = \int\limits_0^1 \left(-4x^3 - 2x + 6\right)dx = \left(-x^4 - x^2 + 6x\right)\Big|_0^1 = 4.$$

2. Взять внешний интеграл по y.

Построим область D.



Запишем двойной интеграл в виде повторного и расставим границы. Сначала расставим границы у внутреннего интеграла, для чего через область проведем стрелки в направлении оси Ox.

$$\iint\limits_D (2xy+3)dS = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{x=0}^{x=\frac{1}{2}y} (2xy+3)dx .$$

Уравнение первой встреченной линии запишем как нижнюю границу, уравнение второй линии – как верхней.

У внешнего интеграла границами являются числа, ограничивающие область D по оси Oy.

Выпишем и найдем внутренний интеграл по x, считая $y = \text{const}$.

$$\int\limits_{x=0}^{x=\frac{1}{2}y} (2xy+3)dx = \int\limits_{x=0}^{x=\frac{1}{2}y} 2xydx + \int\limits_{x=0}^{x=\frac{1}{2}y} 3dx = \left(x^2 y + 3x\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}y} =$$

$$= \left(\left(\frac{1}{2}y\right)^2 \cdot y + 3\cdot\frac{1}{2}y\right) - 0 = \frac{1}{4}y^3 + \frac{3}{2}y .$$

Найденное значение внутреннего интеграла подставим в повторный интеграл:

$$\iint\limits_D (2xy+3)dS = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{4}y^3 + \frac{3}{2}y\right)dy = \left(\frac{y^4}{16} + \frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^2 = 1 + 3 = 4 .$$

4.5.3. Геометрические приложения двойного интеграла

1. Площадь плоской фигуры D:

$$S = \iint\limits_D dS .$$

2. Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z_{\text{в}} = z_1(x;\, y)$, а снизу $z_{\text{н}} = z_2(x;\, y)$:

$$V = \iint\limits_D (z_в - z_н)dS .$$

3. Координаты центра масс плоской пластины однородной плотности:

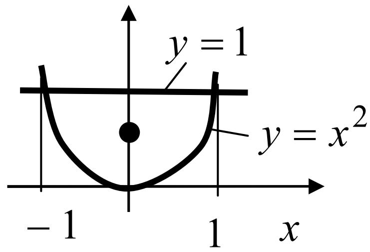
$$x_{цм} = \frac{\iint\limits_D x dS}{\iint\limits_D dS}, \quad y_{цм} = \frac{\iint\limits_D y dS}{\iint\limits_D dS}.$$

4. Координаты центра масс плоской пластины с неоднородной плотностью $\mu = \mu(x; y)$:

$$x_{цм} = \frac{\iint\limits_D \mu(x; y) x dS}{\iint\limits_D \mu(x; y) dS}, \ y_{цм} = \frac{\iint\limits_D \mu(x; y) y dS}{\iint\limits_D \mu(x; y) dS}.$$

Пример. Найти центр масс однородной пластины, ограниченной линиями: $y = 1$, $y = x^2$.

Решение. Построим область.



Найдем последовательно три интеграла:

$$\iint\limits_D dS = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{y=x^2}^{y=1} dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

$$\iint\limits_D x dS = \int\limits_{-1}^{1} x dx \int\limits_{y=x^2}^{y=1} dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x - x^3\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

$$\iint\limits_D y dS = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{y=x^2}^{y=1} y dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

Найдем координаты центра масс и отложим его на рисунке:

$$x_{цм} = \frac{\iint\limits_D x dS}{\iint\limits_D dS} = 0; \ y_{цм} = \frac{\iint\limits_D y dS}{\iint\limits_D dS} = \frac{4/5}{4/3} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Определители второго и третьего порядка, их свойства. Вычисление определителей разложением по строке (столбцу).
2. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений.
3. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица. Матричное решение системы уравнений.
4. Исследование систем линейных алгебраических уравнений, метод Гаусса.
5. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по базису. Деление отрезка в заданном отношении. Длина вектора и отрезка, направляющие косинусы.
6. Скалярное произведение векторов, его свойства и физический смысл. Угол между векторами, условие ортогональности векторов.
7. Векторное произведение векторов, его свойства и смысл. Условие коллинеарности двух векторов.
8. Смешанное произведение трех векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.
9. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности. Расстояние от точки до прямой.
10. Кривые второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола. Приведение уравнений кривых к каноническому виду.
11. Полярные координаты. Связь между полярными и декартовыми координатами.
12. Общее уравнение плоскости. Построение плоскости. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
13. Уравнения прямой в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности.
14. Поверхности второго порядка в пространстве. Цилиндрические поверхности. Сфера. Эллипсоид. Однополостной гиперболоид. Двуполостной гиперболоид. Параболоид. Конус. Гиперболический параболоид.

15. Функция одной переменной, способы задания, область определения, характеристики поведения. Сложная и обратная функции. Основные элементарные функции и их графики.

16. Преобразование графиков основных элементарных функций.

17. Предел функции: на бесконечности, в конечной точке, односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их взаимосвязь и свойства. Основные теоремы о пределах.

18. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел. Эквивалентные функции.

19. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций непрерывных на отрезке.

20. Производная функции, ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к графику.

21. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Таблица производных.

22. Дифференциал функции, его механический и геометрический смысл. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

23. Правило Лопиталя.

24. Условия и интервалы монотонности функций. Точки экстремума функции, необходимое и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции.

25. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции.

26. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

27. Функция двух переменных: область определения, частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал, его приложение к приближенным вычислениям.

28. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных.

29. Производная по направлению, градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

30. Неопределенный интеграл. Таблица и свойства. Основные методы интегрирования.

31. Интегрирование по частям.

32. Интегрирование рациональных функций.

33. Определенный интеграл, его свойства и вычисление.

34. Геометрический смысл определенного интеграла. Вычисление площади плоской фигуры.

35. Приложения определенного интеграла.

36. Несобственные интегралы.

37. Приближенные методы интегрирования.

38. Двойной интеграл. Определение и свойства, вычисление. Геометрические приложения.

Гоголин Вячеслав Анатольевич
Ермакова Инна Алексеевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Редактор З. М. Савина

Подписано в печать 12.12.2016. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 7,00
Тираж 150 экз. Заказ

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28

Издательский центр УИП КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А