Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.Л. САМКОВ

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве конспекта лекций

НОВОСИБИРСК
2010

УДК 519.816(075.8)
С 171

Рецензенты: д-р экон. наук, профессор *А.И. Карпович*;
канд. техн. наук, доцент *А.В. Кравченко*

Работа подготовлена на кафедре СУЭЭ

Самков Т.Л.
С 171 Теория принятия решений: конспект лекций / Т.Л. Самков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 107 с.

ISBN 978-5-7782-1538-2

УДК 519.816(075.8)

ISBN 978-5-7782-1538-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1

ПОНЯТИЕ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ЕГО ЭТАПЫ

ПРОЦЕСС ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В условиях научно-технического прогресса понимание процессов во всех сферах человеческой деятельности становится сложным по мере их развития, в том числе процессов управления организациями.

Кроме того, большинство систем как технических, так и социально-технологических, по управлению которыми необходимо принимать решения, обладают в настоящее время экстремальной сложностью.

Вероятность принятия неправильного управленческого решения достаточно высока, как и потери от этого. Поэтому возникла потребность в подкреплении принятия управленческих решений научно обоснованными приемами и методами, использующими математический аппарат исследований.

Процесс принятия решений (процесс ПР) – это процесс, в результате которого ставится проблема (*проблемная ситуация*), которая снимается за ряд этапов, включая практические действия по устранению проблемной ситуации (*реализация найденного решения*).

Основная часть аналитической стадии процесса разработки управленческих решений относится к математической области «исследование операций», являющейся составной областью.

Для задач исследования операций характерны следующие особенности:

1) объективный характер используемых математических моделей, отражающих объективно существующую реальность, как это имеет место в физике и других естественных науках;

2) иерархический порядок решения задачи, при котором заказы на проведение исследований дает руководитель, построение же модели осуществляют аналитики, которые и ищут решение; главная задача руководителя – внедрить полученное решение;

3) наличие объективного критерия успеха в применении методов исследования операций; если при этом решаемая проблема ясна, то понятно, лучше ли прежнего найденное оптимальное решение.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРОЦЕССА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Процесс управления состоит из повторяющейся во времени последовательности задач, которые получили название *функций управления*. Выполнение функций управления требует принятия решения ЛПР в виде завершенного информационного продукта. Принятие решений прослеживается на всех этапах жизненного цикла управления по производству материального потребительского продукта, к которым относятся прогнозирование, планирование, контроль, анализ, регулирование. Таким образом, управленческое решение представляет собой процесс, который начинается с выявления проблемной ситуации и завершается выбором решения, организацией, контролем и анализом его исполнения.

Процесс разработки управленческих решений с технологической точки зрения можно представить в виде этапов жизненного цикла решения: *целевыявление, формирование целей, выработка решений, выбор решений, оценка решений, принятие решения, реализация решения*.

Эти и другие этапы принятия решений имеют ряд характеристик.

ЭТАПЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ИХ ОПИСАНИЕ

Этап 1. Целевыявление. Процесс формулировки проблем – сложная задача. Причинами этого являются сложность, многомерность и многосвязность проблем организационного управления, неструктуризованный характер многих из них, когда требуется дополнительная информация о них, трудности измерения переменных, отсутствие априорных сведений о связях между ними. *Этап* 1 дает ответы на вопросы: какую проблему и в каких условиях нужно решать; когда ее нужно решать; какими силами и средствами она будет решаться.

Этап 2. Формирование целей. Для определения желаемого состояния по устранению проблемной ситуации необходимо сформулировать множество целей системы. Чем точнее будут сформулированы цели системы, тем легче выбрать средства их достижения. На данном этапе определяется, что нужно сделать для снятия проблемы. Методологической основой этапа формирования целей является системный анализ с использованием экспертных методов.

Этап 3. Выработка решений. На этом этапе вырабатываются альтернативные варианты решений, осуществляется поиск различных путей достижения поставленных целей. Без альтернативных вариантов решений отпадает и задача выбора, более того, множество исходных альтернатив должно быть достаточно полным, характеризоваться большой степенью уверенности в наличии оптимальной альтернативы, для нахождения которой и решается задача выбора. Формами генерирования альтернатив являются мозговой штурм, разработка сценариев и деловые игры.

Этап 4. Выбор решений. Сравнение и выбор альтернативных решений возможен, если ввести измеритель степени достижения намеченной цели. Таким измерителем служит критерий. Таким образом, строится система критериев, однозначно характеризующая соответствующие цели ЛПР. Сформированные критерии в дальнейшем заменяют цели. Критерием полезности альтернативного решения может быть любой ее признак, измеренный на качественном либо количественном уровне. Для описания цели часто вводятся несколько критериев так, чтобы они полно характеризовали цель. Критерии выбора решений определяются методами экспертного анализа и математической статистики.

Этап 5. Оценка решений. При принятии решений ЛПР и эксперты, описывая ситуацию, цели, ограничения, варианты решений, строят модель оценки альтернативных решений через систему предпочтений ЛПР для выбора наилучшего решения. Из-за влияния внешней среды оценка альтернативных решений содержит элементы неопределенности, связанной с наличием во внешней среде нескольких возможных ситуаций, и каждая из них случайно становится действительностью. Эта неопределенность учитывается с помощью теории вероятностей. Частный случай физической неопределенности – это ситуация, когда во внешней среде присутствуют силы, противодействующие ЛПР, т. е. имеет место конфликт, тогда применяют методы *теории игр*. При отсутствии неопределенности (в случае определенности) задачи ПР решают методами *оптимизации*.

Этап 6. Принятие решения. Здесь необходимо выбрать решение для его последующей реализации по определенному алгоритму, выбирающему одно-единственное решение, лучшее по некоторому критерию или принципу оптимальности. При принятии решений по многим критериям (*векторных задач оптимизации*) возникают трудности определения лучшего с точки зрения ЛПР компромиссного решения из множества допустимых по локальным критериям. Если требуется определить единственное наилучшее решение, то множество допустимых решений сводится к множеству Парето и в нем происходит поиск решения на основе некоторой схемы.

Этап 7. Реализация решения. План реализации выбранного решения должен дать ответы на вопросы, кто и что должен делать, какими средствами и в какие сроки. Конкретизация решения по исполнителям может производиться посредством задачи о назначениях исполнителей на выполнение комплекса работ, по срокам и объектам работ – методами сетевого планирования и управления. Конкретизация ресурсного обеспечения выполняется решением задачи распределения ресурсов методами математического программирования.

ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ И ИХ МНОЖЕСТВЕННОСТЬ

Измерение оценок альтернативных решений включает определение отношений объектов и способов их сравнения. Примерами отношений сравниваемых объектов могут быть отношения «больше», «меньше», «равны», «хуже», «лучше». Способы сравнения объектов – это сравнение с эталоном или друг с другом в произвольном или последовательном порядке. Измерения бывают качественные и количественные, а также объективные и субъективные. Субъективные измерения осуществляются в виде ранжирования, парного сравнения, непосредственной оценки, последовательного сравнения.

Имеется ряд шкал измерений: качественные – наименований; порядковые (ранговые); количественные – интервалов, отношений, разностей; абсолютные. Если сложно количественно оценить отдельную альтернативу (решение), используют шкалу бинарных отношений согласно правилам:

1) отдельная альтернатива не оценивается как в целом, так и по отдельным критериям, но для каждой пары альтернатив определяют отношения доминирования, равнозначности или несравнимости;

2) альтернативные решения, между которыми осуществляется выбор, считаются независимыми.

Качественные порядковые измерения, а также шкалы бинарных отношений преобразуют к количественным через *теорию полезности*. В результате альтернативное решение получает количественное выражение своей полезности, т. е. выгоду или **выигрыш** от реализации этого решения.

Назовем набор действий, который приводит к получению выигрыша от реализации отдельного альтернативного решения, **стратегией**, заменив этим термином в дальнейшем понятие «альтернатива».

Определение. Функция, связывающая выбранную стратегию с выигрышем (полезностью) от ее применения, называется *функцией полезности*. Это название имеет ряд синонимов в соответствующей профессиональной литературе – *функция выигрыша*, *мера эффекта* применяемой стратегии и ряд других. Среди этих терминов имеется термин *критерий*, использование которого определяется тем, что он отражает значение функции полезности как ориентира, показывающего, какая характеристика управляемого объекта куда движется.

Лекция 2

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Один из наиболее распространенных видов управленческих решений – это выбор наилучших решений в условиях неполной информации, а также недостаточной ясности обстановки, что составляет содержание этапов 5 и 6 приведенной выше последовательности этапов принятия решений. Этот этап (оценка решений) заключает в себе принятие решений в неопределенной обстановке и связан с определенной вероятностью принятия неправильного решения.

Для выработки наиболее рациональных решений применяются методы формализованного описания составляющих элементов процесса принятия решений: проблемной ситуации, целей, альтернатив, критериев, результатов (последствий альтернатив).

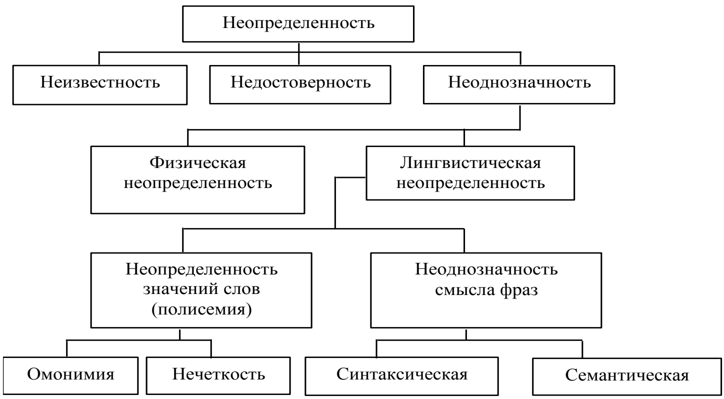


Рис. 1. Неопределенности описания задач ПР

В общем случае описание элементов задачи ПР на формализованном (профессиональном) языке ЛПР подвержено в силу различных причин искажению. Наиболее важные для задач ПР виды неопределенности, отражающие эти искажения, можно представить с помощью дерева (рис. 1).

ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ И ФИЗИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Первый уровень данного дерева характеризует объем отсутствующей информации об элементах задачи ПР. Неизвестность связана с отсутствием любой информации, как правило, на начальной стадии изучения задачи. В процессе сбора информации на определенном этапе может оказаться, что собираемая информация недостоверна: собрана не полностью либо описывает элементы задачи ПР приблизительно, возможна также намеренная фальсификация данных. Наличие недостоверной информации связано либо с недостачей ресурсов, либо с помехами противодействующих сторон в ходе ее сбора. Дальнейшее изучение задачи может привести либо к ситуации определенности, в которой все элементы описаны однозначно (транспортная задача линейного программирования), либо к ситуации неоднозначности. Для этой ситуации предполагается, что вся возможная информация о задаче собрана, но полностью определенное описание не получено и не может быть получено.

Второй уровень дерева отражает источники (причины) возможной неоднозначности описания, которыми являются внешняя среда (физическая неопределенность) и используемый ЛПР профессиональный язык (лингвистическая неопределенность).

Физическая неопределенность может быть связана как с наличием во внешней среде нескольких состояний и возможностей, каждая из которых случайным образом становится действительностью (стохастическая неопределенность), так и с неточностью измерений вполне определенной величины (ситуация неточности).

Лингвистическая неопределенность связана с использованием естественного языка (в частном случае – профессионального языка ЛПР) для описания задачи ПР. Лингвистическая неопределенность порождается, с одной стороны, множественностью значений слов (понятий и отношений) языка, которую условно называют полисемией, а с другой стороны, неоднозначностью смысла фраз.

Если отображаемые одним и тем же словом объекты задачи ПР существенно различны, то соответствующую ситуацию относят к омонимии. Если же эти объекты сходны, то ситуацию относят к нечеткости.

Неоднозначность смысла фраз вызывается синтаксической и семантической неоднозначностью. В первом случае уточнение синтаксиса позволяет понять смысл фразы. Во втором случае при семантической неопределенности смысла фраз отдельные слова понятны, но неясен смысл всей фразы.

В зависимости от условий внешней среды и степени информативности ЛПР производится следующая упрощенная классификация задач принятия решений в условиях *физической неопределенности*:

1) в условиях риска;
2) в условиях неопределенности;
3) в условиях противодействия как частный случай неопределенности.

ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

С точки зрения применяемой информации в задачах принятия решений задают множество альтернатив X, множество результатов Y и три типа зависимости результатов от альтернатив.

1. Каждая альтернатива имеет единственный результат. Это функциональная зависимость результатов от альтернатив, полностью описываемая в теории исследования операций.

2. Каждая альтернатива может привести к одному из нескольких результатов с некоторой известной вероятностью. Здесь решение определяется кроме альтернатив и детерминированных факторов также вероятностями, законы распределения которых известны.

3. Каждая альтернатива может привести к одному из нескольких результатов при неизвестных вероятностях каждого из них. Здесь решение определяется кроме альтернатив и фиксированных факторов также неопределенными факторами, не поддающимися влиянию и, как правило, неизвестными.

Первый тип соответствует принятию решения в условиях определенности, второй – в условиях риска, а третий – в условиях неопределенности.

Связи между альтернативами и результатами можно представить с помощью графа следующего вида.

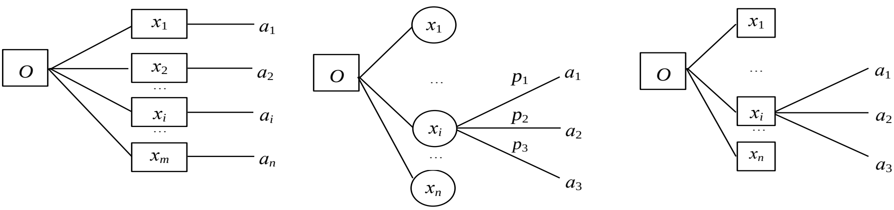
Пусть $X = x_1, x_2, ..., x_n$ – множество альтернатив, $A = a_1, a_2, ..., a_n$ – множество результатов. Изобразив альтернативы точками, расположенными на одном уровне, и результаты – точками на другом уровне, в зависимости от условий принятия решений получим следующие виды данного графа.

При принятии решений в условиях определенности граф строится так, что из некоторой точки *O* идут стрелки ко всем альтернативам. Из альтернативы x_i выходит одна стрелка к результату a_k тогда, когда результат a_k возможен при выборе альтернативы x_i $(i = \overline{1, n};\ k = \overline{1, m})$. Так как при принятии решения в условиях определенности каждой альтернативе соответствует только один результат, то альтернативы и результаты неразличимы (рис. 2, *а*).

При принятии решения в условиях риска каждой альтернативе соответствует множество результатов с указанием на дереве решений вероятности каждого результата, возможного при выборе данной альтернативы (на рис. 2, *б* *i*-я альтернатива имеет 3 результата со своими вероятностями).

При принятии решения в условиях неопределенности каждой альтернативе соответствует ряд результатов и выбором альтернативы x_i можно получить любой из них; при этом нет дополнительной информации (вероятности) о возможности появления конкретного результата (на рис. 2, *в* *i*-я альтернатива имеет 3 результата без указания их вероятностей).

Построенный таким образом граф называют **деревом решений**.



а *б* *в*

Рис. 2

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Риск в задачах ПР означает неопределенность, связанную с вероятностным проявлением факторов, влияющих на процесс принятия решений.

В задачах такого типа нельзя получить единое решение. При этом результат одного решения часто приводит к необходимости принять следующее решение и т. д. Эту последовательность принятия решений представляют с помощью дерева решений для удобства описания многоэтапного процесса принятия управленческого решения в целом.

Составляя дерево решений, его располагают слева направо, рисуя ветви, отражающие структуру проблемы. Ветви обозначают возможные альтернативы и результаты, которые часто называют *выигрышами*.

Выигрыш – это количественная мера эффективности применения стратегии, представленной альтернативой (например, доход, доля рынка, объем капитализации и т. д.). Выигрыши могут быть как положительными, так и отрицательными (например, убыток).

Дерево имеет два типа вершин: решающие вершины, обозначенные квадратными узлами, и случайные вершины, обозначенные круглыми узлами. Квадратные узлы обозначают места, в которых принимаются решения, круглые – места получения выигрышей. В круглых узлах вычисляют вероятности их появления. Все расходы, вызванные решениями, проставляются на соответствующих ветвях. Когда все альтернативы и их выигрыши указаны на дереве, оценивается каждый из вариантов и проставляются денежные доходы.

Пусть имеется n стратегий, а решение приводит к m результатам в следствии наличия такого же числа сценариев развития событий на каждом этапе решения. Обозначим p_{ij} как вероятность получения промежуточного выигрыша (получаемого на этапе) a_{ij} при использовании стратегии i применительно к сценарию j, $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$. Каждой альтернативе x_i приписывается итоговый выигрыш a_i^r, характеризующий последствия этого решения.

Критерий Байеса. Это основное правило выбора альтернатив для задач ПР в условиях риска.

Обозна`чим $a_i^r = \sum_j p_{ij} \times a_{ij}$ математическое ожидание итогового выигрыша при выборе стратегии x_i. По этому критерию находят максимум ожидаемого выигрыша как сумму матожиданий промежуточного выигрыша на соответствующем этапе:

$$\max_i a_i^r = \max_i \sum_j p_{ij} \times a_{ij}.$$

Данные величины вычисляют для одной или нескольких решающих вершин на наиболее позднем этапе – самом правом на дереве решений и, заменяя каждую такую вершину со всеми ее альтернативными результатами на ветвь с итоговым выигрышем, переходят к решающим вершинам предыдущего этапа, находящимся левее на дереве решений.

Здесь обеспечивается максимальный средний выигрыш. При однократной реализации решения выигрыш может сильно отличаться от математического ожидания.

Лекция 3

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

ЗАДАЧА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ПРИМЕРЕ СТРОИТЕЛЬСТВА ЛЭП

Пусть ЛПР противостоит неразумный противник. Часто это бывает в решении экономических задач, когда неопределенность внешней среды выступает как противник без конкретных целей, не руководствующийся рациональными критериями в своем поведении, но влияющий на процесс ПР.

Данные для принятия решения в условии неопределенности, как правило, задаются не деревом решений, а матрицей, чьи строки соответствуют возможным альтернативам или стратегиям, а столбцы – возможным состояниям среды. При этом нет распределения вероятностей выигрыша для сочетаний каждой стратегии с каждым состоянием среды, в качестве которой часто выступает природа.

Пусть требуется построить ЛЭП, долговечность которой при допустимых затратах сложно определить. Нагрузки (порывы ветра, обледенение и т. д.) считаются известными. Требуется решить, какую прочность должны иметь элементы (опоры, провода и т. д.) ЛЭП. Варианты стратегий: E_1 – выбор прочности из соображений максимальной долговечности; E_n – выбор прочности из соображений минимальной долговечности; E_i – промежуточные решения.

Условия, требующие рассмотрения: F_1 – условия, обеспечивающие максимальную долговечность; F_m – условия, обеспечивающие минимальную долговечность; F_j – промежуточные условия.

Результат решения $a_{ij} = (E_i; F_j)$ – это оценка стратегии E_i в условиях F_j, отражающая прибыль, полезность или надежность. Этот результат называют выигрышем. Матрица выигрышей a_{ij} имеет вид

	F_1	F_2	...	F_m
E_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
E_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	...
E_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

Чтобы прийти к однозначному и по возможности лучшему варианту решения, используют критерии выбора решений. При этом матрица выигрышей a_{ij} сводится к одному столбцу. В этом столбце каждой стратегии E_i приписывается результат a_i^r, характеризующий ее последствия. Далее в соответствии с одним из этих критериев в этом столбце выбирается наилучшее решение.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Минимаксный критерий (ММ-*критерий*). Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) имеет вид: матрица выигрышей дополняется новым столбцом из наименьших результатов каждой строки. Необходимо выбрать ту стратегию, в строке которой стоит наибольшее значение этого столбца.

Здесь ЛПР не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется:

$$\max_i a_i^r = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Критерий Байеса–Лапласа (*BL-критерий*). Пусть p_j – вероятность появления внешнего состояния F_i . Правило выбора имеет вид: матрица выигрышей дополняется еще одним столбцом математических ожиданий значений каждой из строк. Выбирается та стратегия, в строке которой стоит наибольшее значение этого столбца.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключен:

$$\max_i a_i^r = \max_i \min_j a_{ij} \times p_j \,.$$

Критерий произведений. Критерий произведений действует в случае, когда все $a_{ij} > 0$. Если это условие нарушено, то выполняют некоторый сдвиг $a_{ij} + b$ с некоторой константой $b > \left|\min_{ij} a_{ij}\right|$. На практике чаще всего

$$b = \left[\min_{ij} a_{ij}\right] + 1 \,.$$

Правило выбора в этом случае формулируется так: матрица выигрышей дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбирается та стратегия, в строке которой находится наибольшее значение этого столбца:

$$\max_i a_i^r = \max_i \prod_j a_{ij} \,.$$

СОСТАВНЫЕ КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, привело к построению так называемых составных критериев.

Критерий Гермейера. Этот критерий ориентирован на величину потерь, т. е. на отрицательные значения всех a_{ij}. Так как в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $a_{ij} < 0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин a_{ij} встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $a_{ij} - b$ при подходящим образом подобранном $b > 0$. При этом оптимальный вариант решения зависит от b.

Правило выбора согласно критерию Гермейера формулируется следующим образом: матрица выигрышей дополняется новым столбцом, содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния F_j. Выбирается та стратегия, в строке которой находится наибольшее значение этого столбца.

В каком-то смысле критерий Гермейера обобщает ММ-критерий: в случае равномерного распределения $p_j = \frac{1}{m}$, $j = \overline{1, m}$, они становятся идентичными – поэтому он и называется составным, объединяя в себе свойство двух критериев.

Если функция распределения известна не очень надежно, а число реализаций достаточно мало, то, следуя критерию Гермейера, получают неоправданно большой риск. Решающая формула имеет вид

$$\max_i a_i^r = \max_i \min_j a_{ij} \cdot p_j \, .$$

Критерий Ходжа–Лемана. Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий Байеса–Лапласа. С помощью параметра w выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Байеса–Лапласа, в противном случае – ММ-критерий. Поэтому критерий, построенный из двух критериев, называется сложным.

Правило выбора, соответствующее критерию Ходжа–Лемана, формируется следующим образом: матрица выигрышей дополняется столбцом, составленным из средних взвешенных (с весом w = const) матожиданий и минимумов каждой строки. Отбирается та стратегия, в строке которой стоит набольшее значение этого столбца.

При w = 1 критерий Ходжа–Лемана переходит в критерий Байеса–Лапласа, при w становится минимаксным:

$$\max_i a_i^r = \max_i \; w \sum a_{ij} \times p_j + (1 - w) \min_j a_i^r \;\; , \;\; 0 \le w \le 1 \, .$$

УСЛОВНЫЕ КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Условный критерий – это вариант составного критерия, где оптимальная стратегия выбирается по одному критерию, но принимается ЛПР только после проверки с помощью другого критерия. Примером условного критерия является критерий, полученный путем объединения критериев Байеса–Лапласа и минимакса.

BL (MM)-*критерий.* Правило выбора этого критерия: матрица выигрышей дополняется несколькими столбцами.

1. В первом записываются матожидания каждой из строк:

$$\sum_j a_{ij} \cdot p_j \ .$$

2. Во втором – минимумы значений a_{ij} по строкам:

$$\min_j a_{ij} \ .$$

3. В третьем – **опорное значение**:

$$a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} \ .$$

4. В четвертом – разности опорного значения и минимумов a_{ij} по строкам:

$$a_{i_0 j_0} - \min_j a_{ij} \ .$$

5. В пятом – максимум a_{ij} строки, в которой находится значение $a_{i_0 j_0}$:

$$a_{i_0 j^*} = \max_j a_{i_0 j} \ .$$

6. В шестом – максимумы значений a_{ij} по строкам:

$$\max_j a_{ij} \ .$$

7. В седьмом – разности максимумов каждой строки и $a_{i_0 j^*}$:

$$\max_j a_{ij} - a_{i_0 j^*} \ .$$

Выбирается та стратегия, в строке которой i^* находится наибольшее матожидание:

$$\max_i a_i^r = \max_i \sum_j a_{ij} p_j \ .$$

При этом для четвертого и седьмого столбцов имеются следующие условия:

$$a_{i_0 j_0} - \min_j a_{ij} \le \varepsilon_1, \;\; i = i^*,$$

$$a_{i_0 j_0} - \min_j a_{ij} \le \varepsilon_1, \;\; i = i^*,$$

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon_2,$$

где ε_1 и ε_2 – некоторые уровни риска соответственно для четвертого и седьмого столбцов.

BL(ММ)-критерий хорошо приспособлен для выбора решений в области техники и достаточно надежен. Однако заданные границы риска ε_1 и ε_2 не учитывают ни число реализаций решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора не исключено полностью. Условие

$$\max_j a_{ij} - \max_j a_{i_0 j} \ge \varepsilon_1$$

существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. При большом числе реализаций это условие перестает быть важным.

Лекция 4

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ (ТЕОРИЯ ИГР)

КОНФЛИКТНЫЕ СИТУАЦИИ И ИГРЫ

Частным, но наиболее сложным случаем принятия решений в случае неопределенности является принятие решений в условиях противодействия или конфликта, для которого используется теория игр.

Конфликт – ситуация, в которой сталкиваются две или более враждующие стороны с разными целями, и результат любой стратегии любой стороны зависит также от стратегии любой из сторон.

Игра – упрощенная модель конфликтной ситуации, подчиненная специальным правилам.

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций.

Задача теории игр состоит в выработке рекомендаций по рациональному поведению игроков.

Игрок – один участник или группа участников игры, имеющих общие для них интересы.

Правила игры – возможные поведения, выборы, ходы и выигрыши игроков на любом этапе игры.

Выбор игрока – выбор одной из возможностей его поведения, осуществляемый с помощью ходов.

Сделать ход – значит на определенном этапе игры осуществить сразу весь выбор или его часть в зависимости от возможностей, предусмотренных правилами игры.

Каждый игрок на определенном этапе игры делает ход согласно сделанному выбору. Другой игрок, зная или не зная о сделанном выборе первого игрока, также делает ход. Каждый из игроков старается учесть информацию о прошлом развитии игры, если это разрешается правилами игры.

Стратегия игрока – набор рекомендаций, однозначно указывающих, какой выбор игрок должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры.

Выигрыш – это мера эффекта стратегии для игрока.

В спортивных играх выигрыши измеряются очками. В играх, отображающих экономические ситуации, выигрыш обычно имеет стоимостное выражение: прибыль, себестоимость, капитализация и т. д.

Проигрыш – отрицательный выигрыш, поэтому далее будут рассматриваться только выигрыши.

ОБЩИЕ НАПРАВЛЕНИЯ КЛАССИФИКАЦИИ ИГР

Имеются следующие направления, по которым осуществляется классификация игр.

Важнейший показатель типа игры, влияющий на сложность ее решения, – это **количество игроков**:

- одного игрока;
- двух игроков;
- n игроков.

Не менее важно **количество стратегий** – подсчет их числа влияет на качество принятого решения:

- конечные;
- бесконечные.

Характер взаимоотношений определяет для игр n игроков виды их взаимодействия:

- бескоалиционные;
- коалиционные;
- кооперативные.

Характер выигрышей указывает на распределение выигрышей среди игроков, а также за счет чего или кого это происходит:

- с нулевой суммой;
- с ненулевой суммой.

Вид функции выигрышей дает информацию об условиях игры и способе поиска решения игры:

- матричные;
- биматричные;

• непрерывные;
• выпуклые;
• сепарабельные;
• типа дуэлей.

Количество ходов формирует вид стратегии, зависящей от того, сколько длится игра:

• одношаговые;
• многошаговые.

Состояние информации облегчает игрокам выбор стратегии поведения на каждом этапе игры:

• с полной информацией;
• с неполной информацией.

ИГРЫ ПО КОЛИЧЕСТВУ, ВЗАИМООТНОШЕНИЯМ И ВЫИГРЫШУ ИГРОКОВ

В зависимости от количества игроков определяют игры: одного игрока, двух игроков, n игроков. Игры **одного игрока** (типа пасьянсов) не представляют интереса и не рассматриваются в теории игр. Игры **двух игроков** – наиболее распространенные, и в них достигнуты наибольшие успехи как в теории, так и в практических приложениях. Игры ***n* игроков** менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

По количеству стратегий игры подразделяются на конечные и бесконечные. Если в игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то она называется **конечной**. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, то такая игра называется **бесконечной**. Понятие бесконечной игры связывается не с продолжительностью проведения игры, а с неограниченным количеством стратегий. Трудности решения игр зависят от количества стратегий.

По характеру взаимоотношений игры разделяются на бескоалиционные, кооперативные и коалиционные.

Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, бескоалиционной будет военная ситуация, в которой сражение ведется без компромиссов и до победы.

Коалиционной игрой называется игра, в которой игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, коалиционной будет военная игра, в которой противники могут вступать в переговоры.

Кооперативная игра – это коалиционная игра, в которой все коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей они разделяются на игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой.

Игра **с нулевой суммой** будет тогда, когда сумма всех выигрышей всех ее игроков в каждой партии равна нулю, т. е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Многие экономические и военные ситуации можно рассматривать как игры с нулевой суммой.

В частности, игра двух игроков с нулевой суммой называется **антагонистической**, так как цели игроков в ней прямо противоположные: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого.

Примером игры **с ненулевой суммой** могут быть торговые взаимоотношения между странами и вообще любая игра, в которой некоторому лицу нужно заплатить взнос за право принять участие в этой игре (например, лотерея).

ИГРЫ ПО ВИДУ ВЫИГРЫШЕЙ, ЧИСЛУ ШАГОВ И ИНФОРМАЦИИ

По виду функций выигрышей игры подразделяются на матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы. При этом строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока. На пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям. Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока.

Непрерывной считается такая игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется **выпуклой** игрой.

Если функция выигрышей может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента, то такая игра называется **сепарабельной** (разделимой).

Игры типа **дуэлей** характеризуются моментом выбора хода и вероятностями получения выигрышей в зависимости от времени, прошедшего от начала игры до момента выбора, т. е. в экономических ситуациях это может означать игру, в которой, например, каждая фирма должна сделать вклад своего капитала в определенный момент времени с целью овладения рынком сбыта. Чем раньше она сделает свой вклад, тем меньшая вероятность овладеть рынком, но, делая свой вклад слишком поздно, она теряет рынок сбыта.

По количеству ходов игры разделяются на одношаговые и многошаговые.

Одношаговые игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Например, матричная игра является одношаговой, так как при этом каждый игрок делает только один ход и потом происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей.

В **позиционных** играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от текущих исходов игры.

Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, то такая игра является **стохастической**.

Если в многошаговой игре ходы делаются непрерывно, а поведение игроков моделируется дифференциальными уравнениями, то такие игры являются **дифференциальными** играми. Например, в играх типа погони один объект должен достигнуть некоторой области, а другой – не допустить этого. Движения объектов описываются дифференциальными уравнениями.

В зависимости от состояния информации об игре, доступной игрокам, различают игры с полной и неполной информацией.

Если на каждом ходе игры каждому игроку известно, какие выборы были сделаны игроками раньше, то это игра **с полной информацией**. Примерами игр с полной информацией служат шахматы.

Если на каждом ходу игры хотя бы один игрок не знает о выборе, своем или других игроков, то это игра **с неполной информацией**. Пример таких игр – это карточные игры, где не известны карты, сброшенные в прикуп, и ряд других.

Лекция 5

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ ДВУХ ИГРОКОВ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ВЫИГРЫШЕЙ И ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЙ

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой представляет собой игру двух игроков следующего вида.

Первый игрок имеет n стратегий, второй игрок имеет m стратегий. Каждый из игроков делает один ход: первый игрок выбирает свою i-ю стратегию, $j = \overline{1, m}$, второй – свою j-ю стратегию, $j = \overline{1, m}$, после чего первый игрок за счет второго игрока получает выигрыш a_{ij}, который ставится в соответствие каждой паре стратегий (i, j). Если $a_{ij} < 0$, тогда первый игрок платит второму сумму $|a_{ij}|$. Здесь игра завершается. Каждая стратегия игрока $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$ называется *чистой стратегией*.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой также называется матричной игрой. Матричная игра – это антагонистическая игра, поэтому для ее задания определяют матрицу $A = \ a_{ij} \ _{n \times m}$ выигрышей первого игрока: $A = \ a_{ij} \ _{n \times m}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Партия матричной игры сводится к выбору первым игроком i-й строки, а вторым игроком j-го столбца и получения первым игроком выигрыша a_{ij}, находящегося на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Для формализации реальной конфликтной ситуации в виде матричной игры надо выделить и пронумеровать чистые стратегии каждого игрока и составить матрицу выигрышей.

Следующий этап – это определение оптимальных стратегий и выигрышей игроков.

Определение. Стратегия игрока является *оптимальной*, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока.

МАКСИМАЛЬНЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ ГАРАНТИРОВАННЫЕ ВЫИГРЫШИ ИГРОКОВ

Для поиска оптимальной стратегии первый игрок исследует матрицу А своих выигрышей: для каждого значения $i(i=\overline{1,n})$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий второго игрока $\min\limits_{j} a_{ij} (j=\overline{1,m})$, т. е. определяется минимальный выигрыш первого игрока при условии, что он применит свою i-ю чистую стратегию. После из этих минимумов находится такая стратегия (i_1), при которой этот минимальный выигрыш (при $j = j_1$) будет максимальным, т. е. находится выражение

$$\max_{i}\min_{j} a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \alpha . \qquad (1)$$

Число α в формуле (1) – это **нижняя чистая цена игры**, показывающая минимальный выигрыш, обеспеченный первому игроку, применяющему свои чистые стратегии при любых действиях второго игрока.

Второй игрок для каждого значения $j(j=\overline{1,m})$ ищет $\max_i a_{ij} (i=\overline{1,n})$, т. е. определяет максимальный выигрыш первого игрока при применении вторым игроком своей j-й чистой стратегии. После из этих максимумов второй игрок ищет такую свою стратегию

(j_2), при которой первый игрок получит минимальный выигрыш (при $i = i_2$), т. е. находится выражение

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_2 j_2} = \beta . \quad (2)$$

Число β, определенное по формуле (2), – это **чистая верхняя цена игры**, показывающая максимальный выигрыш за счет своих стратегий, который может себе гарантировать первый игрок.

Если в игре с матрицей A нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т. е. $\alpha = \beta$, то говорят, что эта игра имеет **седловую точку** в чистых стратегиях и **чистую цену** игры: $v = \alpha = \beta$.

Это означает, что первый и второй игроки, пытаясь предсказать поведение друг друга и исходя из осторожных ожиданий исхода игры пришли к одному и тому же устраивающему их решению.

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА КАК СИТУАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ДВУХ ИГРОКОВ

Седловая точка – это чистые стратегии $(i_0; j_0)$ первого и второго игроков, при которых имеет место равенство

$$\alpha = \beta . \quad (3)$$

Элемент $a_{i_0 j_0}$ называется **седловым элементом**, при этом $i_0 = i_1$ и $j_0 = j_1$ из выражений (1) и (2).

Седловая точка означает, что если один игрок придерживается стратегии, соответствующей этой точке, то лучшее для другого игрока – это придерживаться стратегии, также соответствующей этой точке.

Лучшее поведение игрока не уменьшает его выигрыш, а худшее приводит к уменьшению его выигрыша, эти условия можно записать математически в виде следующих соотношений:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j} , \quad (4)$$

где i, j – любые чистые стратегии первого и второго игроков; (i_0, j_0) – стратегии, образующие седловую точку.

Определение седловой точки эквивалентно условиям, выраженным (3) и (4).

Пара чистых стратегий (i_0, j_0) первого и второго игроков, образующая седловую точку и седловой элемент $a_{i_0 j_0}$, называется **решением игры**. При этом чистой ценой игры является седловой элемент $a_{i_0 j_0}$.

Чистые стратегии i_0 и j_0, образующие седловую точку, называются **оптимальными чистыми стратегиями** соответственно первого и второго игроков.

Чистые стратегии и седловая точка также определяются через функцию выигрыша двух стратегий.

Теорема 1. Пусть $f(x,y)$ – функция $x \in X$ и $y \in Y$ и существует $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} f(x,y) = \alpha$ и $\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} f(x,y) = \beta$.

Тогда $\alpha = \beta$, а значения x_0 и y_0, при которых это имеет место, образуют **седловую точку** (x_0, y_0).

Теорема 2. Пусть $f(x,y)$ – функция $x \in X$ и $y \in Y$ и существует $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y} f(x,y)$ и $\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} f(x,y)$. Тогда необходимое и достаточное условие равенства этих величин – это наличие седловой точки функции $f(x,y)$

Если существует седловая точка (x_0, y_0) функции $f(x,y)$, то $s = f(x_0, y_0)$ называется ценой игры и имеет вид:

$$s = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} f(x,y).$$

Пусть $f(x,y)$ – действительная функция двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$; точка (x_0, y_0) называется седловой точкой, если выполняются следующие неравенства: $f(x,y_0) \le f(x_0,y_0) \le f(x_0,y) \forall x \in X, \forall y \in Y$.

Если положить $x = i,\ y = j$, $f(x,y) = a_{ij}$, то из теоремы 2 следует эквивалентность соотношений (3) и (4), т. е. для матричной игры седловая точка из соотношений (3) и (4) совпадает.

Не всегда можно выразить совокупность выигрышей первого игрока в матрице выигрышей. В этом случае используют функцию выигрышей, а решение такой игры находят с помощью теорем 1 и 2.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ И ИХ СВОЙСТВА

Анализ матричной игры начинается с поиска ее седловой точки в чистых стратегиях. Если она существует, то нахождение этой точки и есть решение. Но седловая точка в чистых стратегиях не всегда существует. Тогда находят верхнюю и нижнюю чистые цены этой игры. Первый игрок не может получить выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и меньший, чем нижняя цены игры.

Для поиска более определенного решения игры при отсутствии седловой точки применяют метод случайного использования чистых стратегий с определенной вероятностью. Игроки изменяют вероятности применения своих чистых стратегий так, чтобы максимально увеличить свой средний выигрыш в результате проведения нескольких партий одной и той же игры и таким образом получить оптимальные стратегии. В этом состоит смысл смешанных стратегий.

Смешанная стратегия – это полный набор вероятностей применения игроком чистых стратегий.

Смешанная стратегия x первого игрока с n чистыми стратегиями – это вектор $x = \quad x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющий соотношениям:

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, n}), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Смешанная стратегия y первого игрока с m чистыми стратегиями – это вектор $y = (y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_m)$, удовлетворяющий соотношениям:

$$y_j \geq 0 (j = \overline{1, m}), \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1.$$

Чистые стратегии – это несовместные события: применение одной стратегии в ходе проведения одной партии игры исключает применение любой другой стратегии.

Средний выигрыш первого игрока в матричной игре с матрицей A есть математическое ожидание его выигрышей:

$$E(A, x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j .$$

Для решения игры в смешанных стратегиях находят такие x и y, которые дают верхнюю цену игры: $\beta = \min_y \max_x E(A, x, y)$.

Нижняя цена игры для первого игрока должна быть $\alpha = \max_x \min_y E(A, x, y)$.

Оптимальными смешанными стратегиями первого и второго игроков называются такие векторы x^0 и y^0 соответственно для первого и второго игроков, которые удовлетворяют равенству:

$$\min_y \max_x E(A, x, y) = \max_x \min_y E(A, x, y) = E(A, x^0, y^0). \qquad (5)$$

Величина $E(A, x^0, y^0)$, получаемая по формуле (5), называется **ценой игры**.

Векторы x^0, y^0 называются **оптимальными смешанными стратегиями** первого и второго игроков, если они образуют седловую точку для функции $E(A, x, y)$, т. е. удовлетворяют неравенствам:

$$E(A, x, y^0) \le E(A, x^0, y) \le E(A, x^0, y^0).$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются **решением матричной игры в смешанных стратегиях**.

Лекция 6

СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ В ИГРОВЫХ СИТУАЦИЯХ

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

При решении матричных игр в смешанных стратегиях возникают две проблемы: какие матричные игры имеют решения и как их решать. Первая решается основной теоремой матричных игр.

Для второй проблемы имеется совокупность методов решения матричных игр.

Основная теорема матричных игр. Для матричной игры с любой матрицей A величины $\alpha = \max\limits_{x} \min\limits_{y} E(A, x, y)$, $\beta = \min\limits_{y} \max\limits_{x} E(A, x, y)$ $\alpha = \max\limits_{x} \min\limits_{y} E(A, x, y)$, $\beta = \min\limits_{y} \max\limits_{x} E(A, x, y)$ существуют и равны между собой.

Из этого вытекает следующее **свойство**: для того чтобы в матричной игре с ценой игры v смешанная стратегия x^0 первого игрока была оптимальной, необходимо и достаточно для любой смешанной стратегии y второго игрока выполнение неравенства $v \le E(A, x^0, y)$. Аналогично для второго игрока: чтобы смешанная стратегия y^0 была оптимальной, необходимо и достаточно для любой смешанной стратегии x первого игрока выполнение неравенства $E(A, x, y^0) \le v$.

Следствие. Для того чтобы $x^0 = x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0$ был оптимальной смешанной стратегией матричной игры с матрицей A и ценой игры v, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 \ge v \quad j = 1, \overline{m} \quad .$$

Левая часть этого выражения есть вариант критерия Байеса, где x_i^0 – вероятность выигрыша a_{ij}; a_{ij} – выигрыш от i-й стратегии первого игрока при применении вторым игроком j-й стратегии.

Данное соотношение – это матожидание выигрыша первого игрока по всем его чистым стратегиям при j-й чистой стратегии второго игрока. И оптимальность набора вероятностей чистых стратегий первого игрока заключается в том, что это матожидание должно быть не меньше определенного гарантированного выигрыша. Этот выигрыш (цена игры) достигается за счет этих вероятностей – смешанных стратегий.

Аналогично для второго игрока: чтобы вектор $y^0 = y_1^0, ..., y_j^0, ..., y_m^0$ был оптимальной смешанной стратегией второго игрока, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0 \geq v \quad i = \overline{1, n} \; .$$

Выражение также отражает матожидание выигрыша первого игрока, но оно зависит от вероятностей y_j^0 применения чистых стратегий уже второго игрока, который, таким образом, играет роль «среды» для каждой j-й стратегии первого игрока. Поэтому второй игрок придает оптимальность вероятностям применения своих стратегий (своим смешанным стратегиям), не допуская за счет них превышения матожидания выигрыша первого игрока порога, равного цене игры.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР И ИХ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА

Из свойств смешанных стратегий вытекает: чтобы установить, является ли пара векторов (x, y) и цена игры v решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли они неравенствам:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 \geq v \quad j = \overline{1, m}\;; \quad \sum_{j=1}^{n} x_i = 1; \\ &\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^0 \geq v \quad j = 1, n\;; \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом, найдя неотрицательные решения данных неравенств, можно получить решение матричной игры.

Определение. Квадратная матрица $A = a_{ij}$ называется **кососимметрической**, если $a_{ij} = -a_{ij} \forall i, j$.

Матричная игра называется **симметричной**, если ее матрица кососимметрическая.

Свойство. Цена симметричной игры равна нулю. Если x – оптимальная смешанная стратегия первого игрока, то x есть также оптимальная смешанная стратегия для второго игрока.

Симметричная игра возникает тогда, когда оба противника обладают одинаковым количеством стратегий и равным объемом ресурсов для их реализации, что отражается на матрице выигрышей. Получающаяся в итоге ее кососимметричность приводит к тому, что одна половина матрицы «компенсирует» другую, за счет чего и получается нулевая цена игры.

Особенно применима такая игровая модель в ситуациях, когда происходит борьба за рынок между двумя сопоставимыми по масштабу корпорациями – из года в год их доли рынка изменяются за счет друг друга, но за несколько лет ни один из участников этого процесса не сможет одержать решающего перевеса в этом конфликте интересов.

Определение. Если для i-й и k-й стратегий первого игрока выполняются соотношения

$$a_{ij} \ge a_{kj} \quad (j = \overline{1, m}), \tag{2}$$

причем хотя бы одно из неравенств (2) является строгим, то говорят, что стратегия i **превосходит** стратегию k или **доминирует** над ней.

Определение. Стратегия второго игрока j доминирует над его стратегией r, если верны неравенства:

$$a_{ij} \ge a_{ir} \quad (i = \overline{1, n}), \tag{3}$$

причем хотя бы одно из неравенств (3) является строгим.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДОМИНИРОВАНИЯ СТРАТЕГИЙ КАК СПОСОБА ОТСЕВА НЕОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Использование соотношения доминирования позволяет сократить размерность матрицы выигрышей в матричной игре. Применение этого свойства отражено следующими двумя свойствами.

Свойство 1. Пусть Γ – матричная игра с матрицей A порядка $n \times m$, и i-я стратегия первого игрока доминирует над k-й стратегией. Пусть A^1 – матрица, получаемая из A путем исключения из нее k-й строки, и пусть Γ^1 – матричная игра с матрицей A^1. Тогда цена игры Γ^1 совпадает с ценой игры Γ, всякая оптимальная смешанная стратегия в Γ^1 второго игрока есть также его оптимальная смешанная стратегия в игре Γ, если вектор $x = (u_1, u_2, ..., u_{k-1}, 0, u_{k+1}, ..., u_n)$ есть оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре Γ^1, то его смешанная стратегия $x = (u_1, u_2, ..., u_{k-1}, 0, u_{k+1}, ..., u_n)$ является оптимальной в игре Γ.

Из этого свойства следует, что если i-я стратегия первого игрока доминирует над k-й стратегией, то i-я стратегия для первого игрока лучше, чем k-я, т. е. первому игроку невыгодно использовать свою k-ю стратегию и она не должна входить в его оптимальную стратегию. Следовательно, вероятность применения k-й чистой стратегии в оптимальной смешанной стратегии первого игрока должна равняться нулю. Вычеркивая из A эту k-ю строку, получаем матрицу A^1, в которой количество строк на единицу меньше. При этом полагаем $x_k = 0$, где x_k – это k-я компонента x. Игру с матрицей A^1 решать легче, так как в ней меньше строк. Если в матрице A^1 наблюдается доминирование стратегий первого игрока, то далее можно поступать аналогично и таким образом уменьшить размерность матрицы A^1.

Доминирование стратегий второго игрока дает также дополнительные возможности для сокращения матрицы выигрышей. Для этого можно использовать следующее свойство.

Свойство 2. Пусть Γ – матричная игра с матрицей A. Пусть q-я чистая стратегия второго игрока доминирует над r-й стратегией; матрица A^1 получена из A исключением q-го столбца; Γ^1 – матричная игра с матрицей A^1. Тогда цена игры Γ^1 такая же, как цена игры Γ; всякая оптимальная смешанная стратегия первого игрока в игре Γ^1 есть также его оптимальная смешанная стратегия в игре Γ; если вектор $w = (w_1, w_2, ..., w_{q-1}, w_{q+1}, ..., w_m)$ есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока в игре Γ^1, то $w = (w_1, w_2, ..., w_{q-1}, w_{q+1}, ..., w_m)$ есть оптимальная смешанная стратегия второго игрока в игре Γ.

Таким образом, из этого свойства следует, что, если q-я чистая стратегия второго игрока доминирует над какой-либо его чистой стратегией, то q-й столбец в A можно вычеркнуть, положив $y_q = 0$, где y_q – это q-я компонента оптимальной смешанной стратегии второго игрока. В результате получаем матрицу A^1 меньшей размерности, чем матрица A. Если в матрице A^1 есть доминирование стратегий, то можно поступать с ней аналогично и уменьшить ее размерность.

Свойство 3. Пусть дана матричная игра Γ с матрицей $A = a_{ij}$ и с ценой игры v. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков матричной игры Γ_B с матрицей $B = b_{ij} = (ka_{ij} + c)$, где $k > 0$, c – это некоторая константа, совпадают с оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков в матричной игре Γ, а цена игры Γ_B равна $v_B = kv + c$.

Пользуясь этим свойством, можно несколько упрощать элементы матрицы A с тем, чтобы легче было ими оперировать при нахождении решения игры.

МАТРИЧНАЯ ИГРА С ДВУМЯ СТРАТЕГИЯМИ: РЕШЕНИЕ, ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Матричная игра порядка 2×2 задается следующей матрицей выигрышей первого игрока:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Решение этой игры начинают с поиска седловой точки в чистых стратегиях. Если она есть, то процесс поиска решения данной игры завершается, а результатом являются цена игры – седловой элемент и седловая точка, т. е. пара чистых стратегий первого и второго игрока, составляющих оптимальные чистые стратегии. Если седловой точки в чистых стратегиях нет, то надо найти седловую точку в смешанных стратегиях, которая непременно существует по основной теореме матричных игр.

Обозначим через $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$ смешанные стратегии соответственно первого и второго игроков. Компонента x_1 означает вероятность применения первым игроком своей первой стратегии, а $x_2 = 1 - x_1$ – это вероятность применения им своей второй стратегии. Для второго игрока y_1 – это вероятность применения им первой стратегии, $y_2 = 1 - y_1$ – это вероятность применения им второй стратегии.

Тогда решение этой игры, если она не имеет седловой точки, определяется из следующих выражений:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{22}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}},$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Л е к ц и я 7

ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАГОТОВКИ УГЛЯ ДЛЯ КОТЕЛЬНОЙ

В большинстве моделей теории игр в качестве оппонента выступал противник, принимающий решения и выбирающий стратегии по определенным правилам. В экономической практике часто принимают решения, не имея информации о возможном сопернике в условиях неопределенности. Для описания таких ситуаций применяется математический аппарат «игр с природой».

«Природа» в теории игр – это объективная действительность, некая незаинтересованная сторона, поведение которой неизвестно, но не содержит элемента сознательного противодействия планам первого игрока. Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый первым игроком. Второй игрок (природа) сознательно против первого игрока не действует, а выступает как партнер по игре без конкретной цели, случайно выбирающий очередные ходы. Поэтому термин «природа» характеризует некоторую объективную реальность, которую не следует понимать буквально, хотя есть ситуации, в которых вторым игроком действительно выступает природа (погодные условия или стихийные бедствия).

Рассмотрим проблему заготовки угля для работы котельной зимой как игру с природой.

Количество хранимого угля ограничено и в течение холодного периода должно быть полностью израсходовано. Предполагается, что неизрасходованный зимой уголь летом пропадает вследствие спонтанных возгораний и последующего тления угля изнутри. Покупать уголь можно в любое время, но летом он дешевле, чем зимой. Неопределенность состоит в том, что неизвестно, какой будет зима: суровой (тогда придется докупать уголь) или мягкой (тогда часть угля может быть не использована). При этом у природы нет злого умысла и она ничего против руководства котельной не имеет. С другой стороны, долгосрочные прогнозы на погоду неточны и поэтому могут использоваться в практической деятельности человека только как ориентировочные при принятии решений.

Задачу ПР в виде игры с природой решают при помощи **критериального** или **игрового** подходов. Для поиска оптимальной стратегии первого игрока критериальный подход использует критерии выбора лучшей стратегии, а игровой – решение матричной игры с природой как со вторым игроком.

ПРИНЦИПЫ КРИТЕРИАЛЬНОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ИГР С ПРИРОДОЙ

В силу неточности прогнозов, т. е. из-за отсутствия возможности опираться на вероятностное распределение состояний природы, критерии выбора лучшей стратегии в этом подходе имеют более «игровой» характер и учитывают несознательное противодействие природы. В этом и состоит отличие данных критериев от типичных критериев выбора альтернатив при принятии решений в условиях неопределенности, где известны вероятности состояний природы, а если они не известны, то полагаются равновероятными.

Матрица игры с природой аналогична матрице в матричной игре $A = a_{ij}$, где a_{ij} – выигрыш первого игрока при реализации его чистой стратегии i и чистой стратегии j второго игрока.

Пусть первый игрок имеет n возможных стратегий, а у природы имеется m возможных состояний (стратегий). Тогда условия игры с природой задаются матрицей A – матрицей выигрышей первого игрока, при этом платит не природа, а некоторая третья сторона (или совокупность сторон, влияющих на принятие решений первым игроком и объединенных понятием «природа»).

Возможен и второй способ задания игры с природой: не в виде матрицы выигрышей, а в виде так называемой матрицы рисков, или матрицы упущенных возможностей $R = r_{ij}$.

Величина риска – это размер платы за отсутствие информации о состоянии среды.

Матрица рисков может быть построена непосредственно исходя из условий задачи или может быть построена на основе матрицы выигрышей игрока.

Риск игрока – это разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал состояние природы, и выигрышем, который он получит в тех же условиях, применяя ту или иную стратегию.

Матрица рисков – это матрица, в которой заданы стратегии игрока, состояния природы и риска при всех возможных сочетаниях стратегий игрока и состояний природы:

$$r_{ij} = b_j - a_{ij}, \quad b_j = \max_i a_{ij}.$$

Независимо от вида матриц надо выбрать такую стратегию (чистую или смешанную) игрока, которая была бы наиболее выгодной по сравнению с другими. Для этого в случае обычной неопределенности, зная состояние природы, игрок выбирает такую свою стратегию, при которой его выигрыш максимальный. Но в играх с природой эти вероятности, как правило, неизвестны.

КРИТЕРИИ ВЫБОРА ЛУЧШЕЙ СТРАТЕГИИ В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состояний природы, называют «безнадежной». В этих случаях для определения лучших стратегий применяют ряд критериев.

Критерий максимакса. С его помощью определяется стратегия, максимизирующая максимальные выигрыши для каждого состояния природы следующим образом:

$$M = \max_j \max_i a_{ij}.$$

При этом ситуации в экономике, требующие применения такого критерия, встречаются часто, и им пользуются не только исходя из оптимистических принципов, но и в безнадежных ситуациях.

Критерий максимина. Здесь природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник. Выбирается такое решение, при котором выполняется следующее соотношение:

$$W = \max_j \max_i a_{ij}.$$

В соответствии с этим критерием среди всех самых неудачных стратегий выбирается самая лучшая.

Критерий максимина – это оптимальная стратегия, при которой минимальный выигрыш максимален, т. е. стратегия, гарантирующая при любых условиях определенный минимальный выигрыш. Этот критерий представляет собой подстраховочную позицию крайнего пессимизма, рассчитанную на худший из возможных случай. Такая стратегия применима, когда игрок не очень заинтересован в крупной удаче, т. е. в выигрыше, но хочет застраховать себя от неожиданных проигрышей. Выбор такой стратегии определяется отношением игрока к риску.

Критерий риск-минимакса. Выбор стратегий аналогичен выбору стратегии по критерию максимина с тем различием, что игрок руководствуется не матрицей выигрыша, а матрицей риска:

$$s = \min_j \max_i r_{ij} .$$

Критерий риск-минимакса рекомендует выбрать такую стратегию, при которой достигается наименьшее значение риска в самой неблагоприятной из возможных ситуации.

Критерий пессимизма-оптимизма. Это следующая рекомендация: при выборе стратегий в условиях неопределенности не придерживаться ни крайнего оптимизма, ни крайнего пессимизма.

Эти крайние оценки учитываются коэффициентом, принимающим значения между 0 и 1. Критерий пессимизма-оптимизма рекомендует руководствоваться некоторым средним значением между крайним оптимизмом и крайним пессимизмом. Согласно этому критерию применительно к матрице A выбирается стратегия со следующим значением (p – критерий пессимизма, $p \in [0,1]$):

$$H_A = \max_i \left(p \min_j a_{ij} + (1-p) \max_j a_{ij} \right) .$$

При $p = 0$ критерий пессимизма-оптимизма совпадает с критерием максимакса, при $p = 1$ этот критерий совпадает с критерием максимина.

Применительно к матрице рисков R критерий пессимизма-оптимизма имеет следующий вид:

$$H_R = \min_i \left(p \max_j r_{ij} + (1-p) \min_j r_{ij} \right) .$$

При $p = 0$ выбор стратегии игрока осуществляется по условию наименьшего из всех рисков, а при $p = 1$ совпадает с критерием риск-минимакса.

ОДНОЗНАЧНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ЛУЧШЕЙ СТРАТЕГИИ В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ

В случае, когда по принятому критерию рекомендуется использовать несколько стратегий, выбор между ними может делаться по дополнительному критерию, например, в расчет могут приниматься средние квадратичные отклонения от средних выигрышей при каждой из возможных стратегий. При этом стандартного подхода здесь нет. Выбор может зависеть от склонности к риску игрока, осуществляющего принятие решения на основе выбираемого критерия.

Таким образом, при отсутствии информации о вероятностях состояний среды теория игр не дает однозначных рекомендаций по выбору лучших стратегий. Это объясняется в основном неопределенностью подобных ситуаций. Чаще всего в таких случаях попытаются получить дополнительную информацию с помощью исследования или экспериментов, направления которых задают результаты ранее примененных критериев.

Хотя применение математических методов в играх с природой не дает абсолютно достоверного результата и они в определенной степени являются субъективными (вследствие произвольности выбора критерия принятия решения), эти методы создает некоторое упорядочение имеющихся в распоряжении игрока данных: задается множество состояний природы, альтернативные решения, выигрыши и потери при различных сочетаниях состояния «среда – решение».

Л е к ц и я 8

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ В ЭКОНОМИКЕ КАК ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

ИГРОВОЙ ПОДХОД В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Любая экономическая ситуация складывается в результате взаимодействия (поведения) совокупности элементов, составляющих ту или иную экономическую систему и представляющих собой различные организации и их объединения, а также отдельные индивидуумы. Поведение элементов экономической системы зависит от многих факторов, хаотическое изменение которых (флуктуации) заранее предвидеть не всегда возможно. Чаще всего такими факторами являются: погодные условия, конъюнктура на рынке, покупательский спрос, поставки смежных отраслей экономики и ряд других. В результате экономические конфликты протекают в условиях спонтанности поведения и неопределенности действий элементов экономической системы, влияющих на эффективность принятых решений, что и обусловливает целесообразность применения игровых моделей.

Существует ряд типичных схем игрового анализа, и задачи принятия решений, построенные на его основе, соответствуют требованиям к экономическому анализу, являясь инструментом его проведения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ НА ПЛАНИРОВАНИЕ ДОБЫЧИ НЕФТИ

Пусть топливно-энергетическая корпорация планирует разведать для последующей эксплуатации на определенной территории в несколько тысяч квадратных километров месторождения нефти. На этой значительной площади можно обнаружить несколько сортов нефти, но при этом весь этот экономический район работает на добычу нефти как единое целое, с точки зрения инфраструктуры, транспортных путей, размещения обслуживающих и перерабатывающих мощностей и т. д. На территории геологоразведкой предварительно обнаружено наличие трех сортов нефти: легкой нефти, тяжелой нефти (с примесями) и нефти, получаемой из битумных песков. Обозначим эти сорта нефти соответственно как A_1, A_2, A_3. Необходимо определить, месторождения каких сортов надо разрабатывать, если при прочих равных условиях добыча этих сортов нефти зависит главным образом от погодных условий, а план производства нефти должен обеспечить наибольший доход. Если корпорация располагает достоверными статистическими данными о погодных условиях на данной территории или имеет надежный способ прогноза погоды, то оптимальный план разведки и эксплуатации этого ресурса достаточно просто получить, основываясь на максимизации матожидания дохода. В противном случае планирование добычи должно выполняться с учетом наиболее неблагоприятного состояния погоды.

В этом случае данную ситуацию можно представить как конфликт, с одной стороны, топливно-энергетической корпорации, которую можно назвать первым игроком, заинтересованным в том, чтобы разрабатывать месторождение, дающее максимальную добычу; с другой стороны – природы, которую можно назвать вторым игроком. От него зависят погодные условия, и он может тем самым максимально повредить корпорации, преследуя прямо противоположные цели.

Принятие природы за противника равносильно планированию разработки месторождений с учетом наиболее неблагоприятных условий погоды, а если они благоприятны, то полученный план даст возможность увеличить доход. Таким образом, имеет место антагонистический конфликт.

В задаче планирования эксплуатации месторождений число стратегий (состояний) природы теоретически бесконечно, но обычно в первом приближении считается, что год может быть холодным, нормальным и теплым, т. е. второй игрок (природа) имеет только три стратегии.

У корпорации топливно-энергетического сектора имеется также три стратегии: разрабатывать сорт нефти A_1, разрабатывать сорт нефти A_2 и разрабатывать сорт нефти A_3.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ И ЕГО ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Чтобы представить задачу по добыче нефти в виде матричной игры, необходимо задать функции полезности добывающего предприятия. В этом качестве берут функцию его доходов от реализации своей продукции. На основании опыта вводится h_{ij} – это объем баррелей i-го сорта нефти (A_1, A_2, A_3), добываемый на территории при j-м состоянии погоды, $i, j = \overline{1,3}$ (холодный, нормальный, теплый год).

Тогда, если пренебречь стоимостью добычи и затратами на заработную плату, матрица

$$\begin{vmatrix} a_2 h_{11}, & a_1 h_{12}, & a_1 h_{13} \\ a_2 h_{21}, & a_2 h_{22}, & a_2 h_{23} \\ a_3 h_{31}, & a_3 h_{32}, & a_2 h_{33} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где a_i – это цена одного барреля сорта A_i и будет матрицей доходов предприятия от реализации нефти с этой территории при всех ситуациях. При необходимости в этой матрице можно учесть стоимость добычи и затраты на заработную плату. Таким образом, игра, описываемая матрицей (1), является моделью, где корпорация и природа выступают участниками антагонистического конфликта.

По основной теореме матричных игр первый игрок имеет хотя бы одну оптимальную стратегию $x^0 = x_1^0, x_2^0, x_3^0$. На основании свойств оптимальных смешанных стратегий для нее верны следующие неравенства:

$$a_1 h_{1j} x_1^0 + a_2 h_{2j} x_2^0 + a_3 h_{3j} x_3^0 \geq v (i = \overline{1,3}), \tag{2}$$

где v – цена игры, а $a_i h_{ij}$ – элементы матрицы игровой модели данного конфликта.

При этом сумма, стоящая в левой части неравенства (2), равна ожидаемому доходу с эксплуатируемого района при j-м состоянии природы, если корпорация будет добывать на x_1^0-й части территории сорт нефти A_1, x_2^0-й части территории сорт нефти A_2, x_3^0-й части территории сорт нефти A_3. Таким образом, корпорация, разработав месторождения сортов нефти A_1, A_2, A_3 в пропорциях $x_1^0 : x_2^0 : x_3^0$, получит при всех погодных условиях ожидаемый доход не менее чем v. Так как v – это значение цены игры, то она является наибольшим ожидаемым доходом, который корпорация гарантирует себе, при этом ожидаемый доход с эксплуатируемой территории при j-м состоянии природы принципиально отличен от фактического, который является случайной величиной, принимающей значения a_1h_{1j} с вероятностью x_1^0, a_2h_{2j} с вероятностью x_2^0 и a_3h_{3j} с вероятностью x_3^0.

Следовательно, при j-м состоянии природы корпорация, реализуя оптимальную стратегию x^0, получит с вероятностью x_1^0 доход, равный a_1h_{1j}, с вероятностью x_2^0 – доход a_2h_{2j} и с вероятностью x_3^0 – доход a_3h_{3j}. Но в силу закона больших чисел средний фактический доход за ряд лет с большой вероятностью будет равен ожидаемому доходу, выраженному ценой игры v.

Здесь возникла ситуация, когда смешанная стратегия допускает физическую реализацию, которая состоит в том, что вместо максимизации матожидания своего дохода корпорация максимизирует свой гарантированный доход, используя вероятности x_i^0 как части экономического района, где разрабатывается i-й сорт нефти. При этом физическая реализация не всегда допустима.

Рассмотренный конфликт обобщается на случай, когда состояния природы более тонко дифференцируемы, т. е. их может быть большое количество.

ПРОФИЛАКТИКИ НА ЭНЕРГОПРЕДПРИЯТИЯХ КАК ИГРА С ПРИРОДОЙ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ

В электроэнергетике профилактические мероприятия являются основой для поддержания надежного электроснабжения, от которого, в свою очередь, зависит экономическое состояние других участников рынка. Ограниченность ресурсов не позволяет обеспечить профилактику всех видов энергооборудования одновременно, поэтому возникает задача выбора состава профилактических мероприятий с учетом его стоимости и величины ущерба от возможной аварии.

Ущерб будет причиняться тогда, когда набор профилактических мероприятий окажется недостаточным для предотвращения возможной аварии. Поскольку заранее условия эксплуатации данного энергооборудования неизвестны, состав профилактических мероприятий x рассматривается как чистая стратегия первого игрока (например, главного инженера) в игре со вторым игроком (природа), стратегии которой обозначим y. Выигрыши первого игрока формируются затратами на профилактические мероприятия и ущерб от аварии, они могут быть записать в таблице следующего типа:

Состав профилактических мероприятий	Условия эксплуатации		
	облегченные	нормальные	тяжелые
x_1 (упрощенный набор мероприятий)	40	10	30
x_2 (обычный набор мероприятий)	30	50	20
x_3 (специальный набор мероприятий)	0	60	80

Тогда матрица выигрышей A первого игрока не содержит седловой точки и будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 40, & 10, & 30 \\ 30, & 50, & 20 \\ 0, & 60, & 80 \end{bmatrix}.$$

Оптимальная стратегия первого игрока оказывается смешанной, а решение игры в этом случае будет

$$x^0 = \left[\frac{22}{45}; \ \frac{18}{45}; \ \frac{5}{45}\right] \quad y = \left[\frac{25}{45}; \ \frac{18}{45}; \ \frac{5}{45}\right] \quad v = 31{,}5 .$$

Смешанная стратегия x^0 задает вероятность, с которой первый игрок выбирает свои чистые стратегии. Эта смешанная стратегия имеет вероятностную и физическую реализации. Для первой из них используются датчик случайных чисел и интервалы их попадания в рамках единичного отрезка: $\left[0;\ \frac{22}{45}\right]$ – для мероприятия x_1, $\left[\frac{22}{45};\ \frac{22+18}{45}\right]$ – для мероприятия x_2, $\left[\frac{22+18}{45};\ 1\right]$ – для мероприятия x_3. Если генерируемое случайное число при преобразовании этих интервалов в десятичный формат окажется в пределах [0; 0,48], то выбирают мероприятие 1, если оно попадает в диапазон [0,49; 0,88], то выбирается мероприятие 2, и если это число колеблется в пределах [0,89; 1], то выбирается мероприятие 3.

Длины этих интервалов равны компонентам x^0, при этом для использования датчика случайных чисел интервалы с такими длинами можно расположить в другом порядке внутри единичного отрезка.

Реализация решения построенной игры с помощью физической реализации состоит в том, чтобы включить в состав профилактических мероприятий все 3 вида данных мероприятий в соотношении $22:18:5$, что гарантирует получение выигрыша в 31,5 тыс. руб., равного найденной цене игры.

Л е к ц и я 9

ИГРЫ ПОРЯДКА $2 \times m$ И $n \times 2$

ОПИСАНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ ПОРЯДКА $2 \times m$ ЧЕРЕЗ ВЫИГРЫШИ ИГРОКОВ

В играх порядка $2 \times m$ первый игрок имеет только 2 чистые стратегии, т. е. матрица выигрышей первого игрока имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1j}, ..., a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2j}, ..., a_{2m} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Если такая игра имеет седловую точку, то ее легко найти и получить решение.

Пусть в игре нет седловой точки. Тогда находят смешанные оптимальные стратегии $x = (x_1, x_2)$, $y = \ y_1, ..., y_m \ $ соответственно первого и второго игроков и цену игры v, удовлетворяющие соотношениям:

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 \geq v \ (j = \overline{1, m}), \qquad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + ... + a_{1m} y_m \leq v, \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{2m} y_m \leq v, \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} & x_2 = 1 - x_1; \quad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1, \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad y_j \geq 0; \quad j = \overline{1, m} \ . \end{aligned} \right\} \qquad (4)$$

Поскольку данная игра не имеет седловой точки, то неравенство (3) заменяется равенствами:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m = v. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Для решения систем (3) – (5) используют графический способ, вводя обозначения для неравенств (2):

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Подставив x_2 из (4) и проведя элементарные преобразования, получают

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \quad (j = \overline{1, m}),$$

где $M_j(x_1)$ – это средний выигрыш первого игрока при условии, что он применит свою смешанную стратегию, а второй игрок применит свою чистую стратегию.

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ ПОРЯДКА $\mathbf{2 \times m}$

Каждому значению $j = \overline{1, m}$ соответствует прямая линия (рис. 1), выражающая график $M_j(x_1)$.

Цель второго игрока – это минимизация выигрыша первого игрока за счет выбора своих стратегий. Поэтому вычисляется $\min\limits_{j} M_j(x_1) = M(x_1)$, где $M(x_1)$ – это нижняя граница множества ограничений. Функция $M(x_1)$ изображается жирной линией, огибающей самые нижние участки всех прямых.

Цель первого игрока – это максимизация своего выигрыша за счет выбора x_1, дающего

$$\max_{x_1} M(x_1) = M \quad x_1^0 \quad .$$

Точка M^0 – это максимум M^0 при $x_1 = x_1^0$, а цена игры $v = M \quad x_1^0$, так как $v = \max\limits_{x_1} \min\limits_{j} M_j(x_1)$.

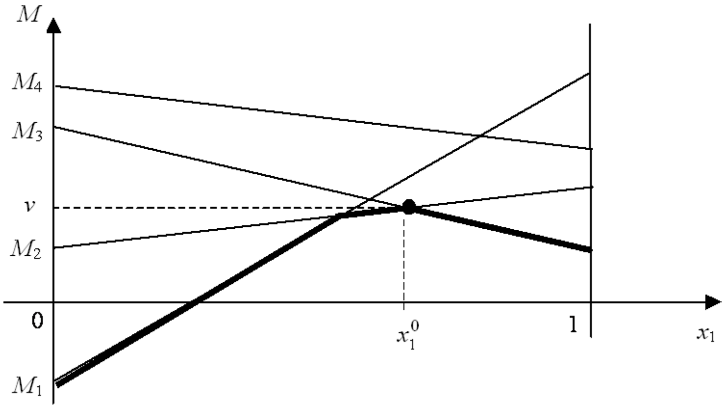


Рис. 1

Так графически определяется максимальная смешанная стратегия $x = x_1^0, x_2^0$ первого игрока и пара чистых стратегий второго игрока j_0, j_1, образующие при пересечении точку M^0. Здесь неравенство (2) превращается в равенство.

Тогда можно решать систему уравнений

$$M_j(x_1) = v_j = j_0, j_1$$

и точно определить значения x_1^0 и v (графически они определяются приближенно).

Таким образом, решается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} M_{j_0}(x_1) = a_{1j_0}x_1 + a_{2j_0}x_2 = v, \\ M_{j_1}(x_1) = a_{1j_1}x_1 + a_{2j_1}x_2 = v. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что $x_1 + x_2 = 1$, можно преобразовать эту систему уравнений к следующей:

$$\begin{cases} M_{j_0}(x_1) = (a_{1j_0} - a_{2j_0})x_1 + a_{2j_0} = v, \\ M_{j_1}(x_1) = (a_{1j_1} - a_{2j_1})x_1 + a_{2j_1} = v. \end{cases}$$

Здесь два неизвестных, x_1 и v, и решение легко получается, а положив все значения $y_j = 0$ при тех j, для которых $M_j(x_1)$ не образуют точку M^0, определяют y_j при j, для которых $M_j(x_1)$ образуют точку M^0.

Система уравнений (5) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a_{1j_1} y_{j_0} + a_{2j_1} y_{j_1} = v, \\ a_{2j_0} y_{j_0} + a_{2j_1} y_{j_1} = v, \end{cases}$$

или после преобразований:

$$\begin{cases} a_{1j_0} y_{j_0} + a_{1j_1}(1 - y_{j_0}) = v, \\ a_{2j_0} y_{j_0} + a_{2j_1}(1 - y_{j_0}) = v. \end{cases}$$

Остальные y_j равны нулю.

Если при некотором $j = j_0$ стратегия второго игрока образует максимальное значение нижней границы множеств ограничений и $a_{1j_0} = a_{2j_0}$, то эта граница есть отрезок, параллельный оси O_{x_1} (рис. 2).

Он заключен между точками M^0 и N^0 с координатами x_1^N и x_1^M. Тогда первый игрок имеет бесконечно много оптимальных значений

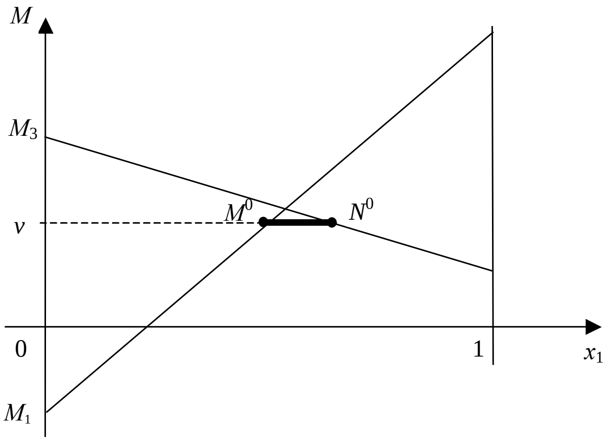


Рис. 2

x_1^0 в пределах x_1^N, x_1^M, а цена игры $v = a_{1_{j0}} = a_{2_{j0}}$. У второго игрока есть чистая оптимальная стратегия $j = j_0$, т. е. $y_{j_0} = 1, y_j = 0$ при $j = j_0$.

ОПИСАНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ ПОРЯДКА $n \times 2$ ЧЕРЕЗ ВЫИГРЫШИ ИГРОКОВ

Матричные игры порядка $n \times 2$ решаются также с помощью графического метода. Матрица выигрышей первого игрока в этом случае имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Уравнения, необходимые для решения игры порядка $n \times 2$, в данном случае имеют вид

$$a_{i1}y_1 + a_{2y_2} \le v \;\; (i = \overline{1, n}),$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \ge v. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &y_2 = 1 - y_1; \quad \sum_{j=1}^{n} x_1 = 1, \\ &y_1 \ge 0; \;\; y_2 \ge 0; \;\; x_j \ge 0; \;\; (i = \overline{1, n}). \end{aligned}\right\}$$

Смешанные стратегии $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2)$ соответственно первого и второго игроков определяются аналогично, как и в случае игры порядка $2 \times m$.

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ ПОРЯДКА $n \times 2$

Отложим по горизонтальной оси значения y_1 от 0 до 1, по вертикальной оси – значение среднего выигрыша $E_i(y_1)$ первого игрока при применении им своей i-й стратегии $(i = \overline{1, n})$ и смешанной стратегии второго игрока $y = (y_1, 1 - y_1)$. Тогда $E_i(y_1)$ могут быть изображены рядом прямых (рис. 3).

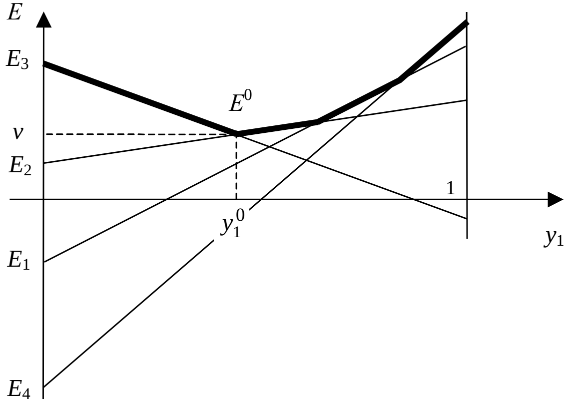


Рис. 3

Первый игрок старается максимизировать свой средний выигрыш, поэтому стремится найти max $\max_i E_i(y_1) = E(y_1)$, где $E_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 = (a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}$.

Функция $E(y_1)$ – это верхняя граница множества ограничений, изображаемая жирной линией.

Второй игрок старается минимизировать $E(y_1)$ за счет выбора своей стратегии y_1, т. е. величина y соответствует $\min_{y_1} E(y_1) = E\ \ y_1^0\ \ = v$.

На рисунке значение $E\ \ y_1^0$ обозначено точкой E^0.

Другими словами, определяются две стратегии i_0, i_1 первого игрока и вероятность y_1 для второго игрока, при которых достигается равенство $\min\limits_{y_1} \max\limits_{i} E_i(y_1)$.

Когда решают уравнения вида $E_i\left(y_1\right)=v, i=\left(i_0, i_1\right)$, они представляются в виде

$$\left.\begin{aligned} E_{i0}\left(y_1\right) &= a_{i_0 1}y_1 + a_{i_0 2}y_2 = v, \\ E_{i1}\left(y_1\right) &= a_{i_1 1}y_1 + a_{i_1 2}y_2 = v. \end{aligned}\right\}$$

Далее эта система решается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} E_{i0}\left(y_1\right) &= a_{i_0 1}y_1 + a_{i_0 2}(1-y_1) = v, \\ E_{i1}\left(y_1\right) &= a_{i_1 1}y_1 + a_{i_1 2}(1-y_1) = v. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Цена игры v – это ордината точки E^0, а вероятность y_1^0 – это абсцисса точки E^0.

Из системы (7) находят оптимальную смешанную стратегию второго игрока $y=(y_1, y_2)$ и цену игры v. Оптимальную смешанную стратегию первого игрока для $i=(i_0, i_1)$ находят из системы (другие $x_i=0$, $i \neq i_0, i_1$):

$$\left.\begin{aligned} a_{i_0 1}x_{i_0} + a_{i_1 1}x_{i_1} &= v, \\ a_{i_0 2}x_{i_0} + a_{i_1 2}x_{i_1} &= v. \end{aligned}\right\}$$

Она приводит к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{i_0 1}x_{i_0} + a_{i_1 1}(1-x_{i_0}) &= v, \\ a_{i_0 2}x_{i_0} + a_{i_1 2}(1-x_{i_0}) &= v. \end{aligned}\right\}$$

Если при некотором $i_0=i_1$ стратегия первого игрока образует минимальное значение верхней границы множеств ограничений и $a_{i_0 1}=a_{i_0 2}$, то эта граница есть отрезок, параллельный оси O_{y_1} и заключенный между точками E^0 и F^0 с координатами y_1^E и y_1^F. Тогда второй игрок имеет бесконечно много оптимальных значений y_1^0 в пределах $\left[y_1^E, y_1^F\right]$, а цена игры $v=a_{i_0 1}=a_{i_0 2}$. У первого игрока есть чистая оптимальная стратегия $i_0=i_1$, т. е. $x_{i_0}=1$, $x_i=0$ при $i \neq i_0$.

Лекция 10

ИГРЫ В ФОРМАЛИЗОВАННОМ ВИДЕ И ИХ ВЗАИМОСВЯЗИ

КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ИХ СВЯЗИ В РАЗЛИЧНЫХ ИГРАХ

Если в игре s лиц k -й игрок имеет стратегию x_k, то это описывается как максимизация функции

$$f_k = f_k(x_1, ..., x_k),\ k=1,\ s,\ x_k \in x_k .$$

Ее называют критерием эффективности действий участника игры. Поэтому любое принятие решений k-м участником процесса может рассматриваться как целеустремленное, направленное к увеличению значения некоторой величины f_k.

Игру, рассматриваемую с позиции одного игрока или с позиций всех тех, у кого интересы, т. е. критерии f_k, совпадают, называют операцией этого игрока, а его самого – оперирующей стороной.

Обычная оптимизация соответствует либо $s=1$, либо совпадению интересов всех игроков $f_k = f_1,\ k=\overline{1, s}$.

Антагонистическая игра получается при $s=2$, если $f_1 = -f_2$.

Пусть в операции присутствуют s игроков, каждый из которых стремится увеличить свой критерий эффективности $f_k(x_1, ..., x_s)$, $k=\overline{1, s}$, осуществляя выбор вектора x_r из некоторого множества X_k.

Существует ряд простейших видов связей между этими критериями (интересами):

1) совпадение интересов, когда тождественны $f_k = \varphi_k(z)$, где $\varphi_k(t)$ – монотонно растущая функция, а z – величина, одинаковая для всех игроков;

2) противоположность интересов, когда $s = 2$ и $f_2 = \varphi_k(-f_1)$, где $\varphi(t) -$ монотонно растущая функция. Антагонизм соответствует случаю

$$f_2 = c - f_1; \tag{1}$$

3) полная независимость интересов:

$$f_k = f_k(x_k),\ x_k \in x_k. \tag{2}$$

Существует ряд характерных примеров игр с непротивоположными интересами. Во всех этих играх $s = 2$, т. е. имеет место игра двух игроков, но выигрыши задаются матрицей, а не функционально.

ОТСУТСТВИЕ АНТАГОНИЗМА В ИГРЕ И ЕГО ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Существуют ситуации, когда в силу определенных причин антагонизм между игроками исчезает или, по крайней мере, снижается. В этом случае игрокам, анализирующим условия имеющего место конфликта, необходимо обнаружить такую ситуацию и не тратить ресурсы на противостояние с другим игроком, в противном случае ему грозит проигрыш во всей игре.

Отсутствие антагонизма проявляется в двух основных случаях, которые связаны как с неразумным, так и с разумным противниками и требуют специального анализа.

Первый случай – это наличие у природы критерия безразличия, по которому можно предсказать ее поведение, что лишает ее «злонамеренности» по отношению к рационально поступающему игроку.

Второй случай – это игры с «запрещенными» ситуациями, когда имеется два (или более) разумно действующих игрока и их стратегии ограничены некоторой областью определения. Если игроки используют стратегии, лежащие вне этой границы, то антагонизм между ними пропадает. При этом часто им не разрешается пользоваться этими стратегиями и они становятся «запрещенными».

Каждый из перечисленных случаев имеет свои особенности и распадается на ряд частных вариантов, характеристики которых влияют на решение игры, которую они описывают.

Часто под игрой с природой понимается процесс, в котором имеется единственный «настоящий» игрок (оперирующая сторона), стремящийся к увеличению критерия $f = f(x, y)$, где y – это факторы, не выбираемые им и описывающие некоторые объективные явления, влияющие на величину f .

Обычно интересы природы считаются неизвестными или несуществующими, а при выборе вектора x в расчете на наихудший случай принимаются антагонистическими по отношению к интересам оперирующей стороны. Более точно поведение природы при отсутствии у нее интересов можно описать с помощью критерия «безразличия»:

$$f_N = f_N(x, y) = \text{const} . \tag{3}$$

Смысл данного критерия состоит в том, что на любое изменение стратегии x природа реагирует таким значением своей стратегии y, которое приводит систему, где действуют оба игрока, в состояние равновесия, откуда ее вывел первый игрок, применяя свою стратегию.

Целесообразность такого описания видна на следующем примере.

Пусть имеются 2 игрока и одна и та же природа, выбирающая y. Тогда интересы природы нельзя считать одновременно противоположными интересам $f_1 = f_1(x_1, x_2, y)$ и $f_2 = f_2(x_1, x_2, y)$ обоих игроков, за исключением случая их совпадения.

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ КАК ИНСТРУМЕНТ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНТЕРЕСОВ ПРИРОДЫ

Если закон природы имеет вид баланса (энергии, ресурсов и т. д.) $\varphi(x, y) = 0$, определяя величину y для любого x, то критерий эффективности природы $f_N = -\varphi^2(x, y)$ заменяет этот закон – уменьшение квадрата отклонения от нулевого состояния $\varphi^2(x, y)$ увеличивает f_N и приводит к условию $\varphi(x, y) = 0$.

Примером закона природы $\varphi(x, y) = 0$ в экономическом смысле является представление в игре:

- x – как стратегии по наращиванию объема производимых в стране товаров и услуг;
- y – как стратегии покупок производимых товаров и услуг платежеспособными покупателями;
- φ – как функцию экономического роста стран – производителей товаров и услуг.

Перенося данное представление на экономики развитых стран ЕС и США и учитывая временной параметр экономического роста, можно сопоставить указанный закон природы и волновую модель экономического роста, по которой рост экономики периодически сменяется стагнацией и (или) кризисом. И если сложить положительные величины роста, а затем отрицательные показатели неизбежного падения и устранить внутренний спрос в период кризиса за счет государственной поддержки, то итоговая цифра будет близка к нулю. Суммируя же эти показатели по всему миру, с учетом наличия богатых и развивающихся стран, можно прийти в точности к результату $\varphi(x, y) = 0$.

В качестве закона природы используется также ограничение $\varphi(x, y) \geq 0$, смещающее баланс в сторону неравновесия. Он моделируется критерием эффективности природы:

$$f_N = -\left\{\min\left[\varphi(x, y), 0\right]\right\}^2. \tag{4}$$

Указанное ограничение, например, имеет место в так называемом «эксергетическом» подходе, в рамках которого при проектировании любого энергетического объекта рассчитывают, окупится ли он в энергетическом смысле. Аналогично, как при финансовой окупаемости, учитываются все затраты на строительство и обслуживание объекта в энергетических единицах и сравниваются с объемом энергии, получаемым в рассматриваемый временной промежуток от данного объекта.

Объект энергетически окупается, если от него можно получить энергии не меньше, чем вложено, т. е. если интерпретировать x как стратегии по строительству и обслуживанию энергообъекта, а y – как объем энергии, который он дает, то профицит энергии, производимый объектом $\varphi(x, y)$, должен быть, по крайней мере, не меньше нуля (ноль имеет место в случае социальной значимости объекта).

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ СИТУАЦИЯМИ

Конфликт в игре может, как правило, осложняться тем, что не весь спектр возможных стратегий у обоих противников является подходящим для них в смысле эффективности противостояния друг другу. Бывают такие сочетания стратегий игроков, когда их антагонизм исчезает и вкладывание ресурсов для того, чтобы одержать верх над противником, лишается смысла. Это сочетание стратегий и формирует запрещенные ситуации, устраняющие антагонизм в игре. На первый взгляд, это облегчает деятельность ЛПР, но этих ситуаций необходимо избегать – стратегии должны учесть возвращение игры в область антагонизма и, как следствие, возобновление противостояния с другим игроком.

Рассмотрим игру с критериями:

$$f_1 = f(x_1, x_2), \qquad f_2 = -f(x_1, x_2) \tag{5}$$

при наличии общих ограничений $\varphi\ x_1, x_2\ \ge 0$, задающих область определения $(x_1, x_2) \in P$.

При помощи специальных критериев эту игру можно привести к игре с непротивоположными интересами, где антагонизм отсутствует вне области определения – это запрещенная ситуация.

$$f_1^* = \begin{cases} f(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in P, \\ -\infty,\ (x_1, x_2) \in P, \end{cases} \tag{6}$$

$$f_2^* = \begin{cases} -f(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in P, \\ -\infty,\ (x_1, x_2) \in P. \end{cases} \tag{7}$$

В качестве примера этой игры можно взять случай, когда имеют место следующие соотношения:

$$f = x_1 - x_2; \quad P = \ (x_1, x_2) \big| x_1 + x_2 \le 1;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ \ .$$

Этот пример можно трактовать как модель экономического соревнования двух стран, использующих общее мировое сырье. Здесь x_1 и x_2 – объемы используемого первым и вторым игроком сырья в мировом масштабе, а единица показывает то, что эти объемы – часть от целого, т. е. мировых запасов сырья целиком. Для данной игры характерны: сильная неустойчивость в выигрыше по отношению к порядку ходов, а именно: тот, кто первый делает ход, т. е. выбирает значение своего x_i, может положить $x_i = 1$ и тем самым не оставить сырья для партнера.

Любая антагонистическая игра с запрещенными ситуациями типа (5) сводится к игре с непротивоположными интересами типа (6).

Лекция 11
РЕШЕНИЕ ИГР ПОРЯДКА $n \times m$

ПЕРВЫЙ МЕТОД СВЕДЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этом методе цена игры может быть произвольная. Оптимальные смешанные стратегии $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_m)$ и цена игры v с матрицей $A=\| a_{ij} \|_{n\times m}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ge v, \quad (j=\overline{1,m}),\\ &\sum_{i=1}^{n} x_i =1,\ \ x_i \ge 0, \quad (1=\overline{1,n}). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le v, \quad (i=\overline{1,n}),\\ &\sum_{j=1}^{m} y_j =1,\ \ y_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,m}). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Введя дополнительные неотрицательные переменные для j-го неравенства $j=\overline{1,m}$ и y_{m+i} для i-го неравенства $i=\overline{1,n}$ соответственно из соотношений (1) и (2), получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - x_{n+j} = v, \quad (j=\overline{1,m}),\\ &\sum_{i=1}^{n} x_i =1,\ x_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,n+m}). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + y_{m+1} = v, \quad (i = \overline{1, n}),\\&\sum_{j=1}^{m} y_1 = 1, \;\; y_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, m+n}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Выделим в уравнении (3) первое равенство при $j = 1$ и вычтем его из остальных равенств (3), $j = \overline{2, m}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i - x_{n+1} = v, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - a_{i1}) x_i - x_{n+j} + x_{n+1} = 0, \quad (j = \overline{2, m}),\\&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \;\; x_i \ge 0, \quad (i = \overline{1, n+m}).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Первый игрок максимизирует цену игры v за счет своих стратегий, и решение систем (5)–(6) сводится к поиску максимума левой части (5) при ограничениях (6) как к задаче линейного программирования.

Систему (4) решают, выделяя равенство при $i = 1$ и вычитая его из равенств для $i = \overline{1, n}$ в этой системе:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j} y_i + y_{m+1} = v, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - a_{1j}) y_j - y_{m+i} + y_{m+1} = 0, \quad (i = \overline{2, n}),\\&\sum_{j=1}^{m} y_j = 1, y_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n+m}).\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Второй игрок минимизирует цену игры v за счет своих стратегий, и решение систем (7)–(8) сводится к поиску минимума левой части (7) при ограничениях (8) как к задаче линейного программирования.

ВТОРОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этом методе предполагают положительность цены игры. Этого можно достичь подбором числа c, чье прибавление ко всем элементам матрицы выигрышей дает матрицу с положительными элементами, а следовательно, с положительным значением цены и прежними смешанными стратегиями игроков.

Пусть дана матричная игра с матрицей $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times m}$. Оптимальные смешанные стратегии $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_m)$ первого и второго игроков и цена игры v удовлетворяют соотношениям (1) и (2).

Разделим уравнения и неравенства в соотношениях (1) и (2) на цену игры v. Получим, что $v > 0$, и введем обозначения: $\frac{x_i}{v} = p_i, (i = \overline{1, n})$,

$\frac{y_j}{v} = q_j$, $(j = \overline{1, m})$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{v}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq 1$, $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1, n})$.

Тогда получим соответственно задачи (1) и (2) в виде

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = \frac{1}{v}, \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j \leq 1, \; q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, m}).$$

Первый игрок ищет такие x_i и, следовательно, p_i, чтобы цена игры v была максимальной, поэтому решение задачи (1) сводится к поиску таких неотрицательных значений p_i $(i = \overline{1, n})$, при которых

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} p_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq 1 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{array}{c} \min_{p} I'p \\ A^T p \geq I \end{array}\right\}, \qquad (9)$$

где I и I' – соответственно единичные матрица и вектор.

Второй игрок ищет такие y_j и, следовательно, q_j, чтобы цена игры v была минимальной, поэтому решение задачи (2) сводится к нахождению таких неотрицательных значений $q_j \, (j = \overline{1, m})$ при которых

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} q_j \to \max \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} &\max_q I'q \\ &Aq \le I \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

где I и I' – соответственно единичные матрица и вектор.

Формулы (9) и (10) выражают двойственный друг другу задачи линейного программирования. Решив их, получим значения $p_i \; (i = \overline{1, n})$, $q_j \; (j = \overline{1, m})$, цену игры v, а также значения x_i и y_j по формулам:

$$x_i = vp_i \; (i = \overline{1, n}), \quad y_j = vq_j \; (j = \overline{1, m}). \tag{11}$$

ОСОБЕННОСТИ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ СТРАТЕГИЙ У ИГРОКОВ

Как уже указывалось, смешанные стратегии можно использовать в рамках как вероятностной, так и физической реализации. Примером второго подхода может служить следующая задача.

Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 4 объекта. Стратегии отраслей: i-я стратегия состоит в финансировании 1-го объекта $(i = \overline{1, 4})$. Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли можно выразить соответствующей матрицей выигрышей.

В этой ситуации величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли. Поэтому такая игра является матричной игрой двух игроков с нулевой суммой.

Полученные оптимальные стратегии игроки могут использовать так: первый игрок все свои капитальные вложения может распределить по объектам в долях, соответствующих вероятностям применения своих стратегий; второй – наступает аналогично по отношению к своим капитальным вложениям – по долям вероятностей применения своих стратегий.

При исследовании игровых ситуаций часто нет необходимости получать точное решение игры или вследствие каких-либо причин найти точное значение цены игры и оптимальных смешанных стратегий невозможно или очень трудно. Тогда можно использовать приближенные методы решения матричной игры в общем случае порядка $n \times m$.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕНЫ ИГРЫ ДЛЯ ИГР ПОРЯДКА $n \times m$

Одним из таких методов является метод последовательного приближения цены игры. Количество вычислений при использовании этого метода увеличивается примерно пропорционально числу строк и столбцов, содержащихся в матрице выигрышей матричной игры. Сущность метода последовательного приближения цены игры состоит в следующем. Имитационно и мысленно игра проводится много раз, т. е. последовательно в каждой партии игры каждый игрок выбирает ту стратегию, которая дает ему наибольший общий (суммарный) выигрыш в данной партии игры. Иначе говоря, в мысленном проведении матричной игры каждый участвующий в ней игрок выбирает последовательность своих чистых стратегий, обеспечивающую первому игроку максимальный средний выигрыш, а второму игроку – минимальный средний проигрыш в каждой партии игры.

После такой реализации нескольких партий матричной игры вычисляется среднее значение выигрыша первого игрока, проигрыша второго игрока, а среднее арифметическое проигрышей и выигрышей обоих игроков принимается за приближенное значение цены этой матричной игры. Также этот метод дает возможность найти приближенное значение оптимальных смешанных стратегий обоих игроков, участвующих в игре: надо подсчитать частоту применения каждой чистой стратегии и принять ее отношение к числу уже реализованных партий за приближенное значение вероятности использования этой чистой стратегии в оптимальной смешанной стратегии соответствующего игрока этой матричной игры.

С неограниченным увеличением числа проигранных партий (т. е. партий, которые уже сыграны) в указанном выше смысле средний выигрыш первого игрока и средний проигрыш второго игрока будут неограниченно приближаться (стремиться) к цене игры, а приближенные значения смешанных стратегий в том случае, когда решение этой матричной игры единственное, будет стремиться к оптимальным смешанным стратегиям каждого игрока. Как правило, в этом методе стремление приближенных значений вышеуказанных величин к истинным значениям параметров решения матричных игр происходит достаточно медленно, однако при применении вычислительных технологий можно получить решение игры с требуемой степенью точности даже при матрицах выигрышей сравнительно большого порядка.

Лекция 12

ОПИСАНИЕ ИГР В *n*-МЕРНОМ СЛУЧАЕ И НЕКОТОРЫЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ ДВУХ ИГРОКОВ

СТРАТЕГИЯ В *n*-МЕРНОМ СЛУЧАЕ

Определение. В n-мерном случае стратегия i-го игрока есть некоторая функция, которая ставит в соответствие каждой альтернативе развития игры для этого игрока определенную стратегию из множества его стратегий. Будем обозначать множество всех стратегий i-го игрока через X_i.

Обычно игрок принимает решение о своем ходе в игре в тот момент, когда надо делать этот ход. На практике полагают, что еще до начала игры каждый игрок решил, что он будет делать в каждом случае, т. е. считают, что каждый игрок выбрал некоторую стратегию еще до начала игры.

В таких играх анализируют, какие стратегии лучшие с точки зрения максимизации доли каждого игрока в выигрыше: i-й игрок стремится максимизировать i-ю компоненту функции выигрыша.

Обычно функция выигрыша есть n-мерный вектор матожиданий выигрышей каждого из n игроков при использовании ими n-мерного вектора стратегий. Поэтому для описания функции выигрыша при условии, что i-й игрок применяет стратегию x_i, используют следующее обозначение:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (f(x_1, x_2, ..., x_n),\ f(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(x_2, x_2, ..., x_n)).$$

Функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве всех значений $x_1, x_2, ..., x_n$ можно выразить либо в форме соотношения, либо в виде n-мерной таблицы n-мерных векторов. В случае n эта запись сводится к матрице, элементами которой являются пары вещественных чисел. Ее частный вид – матрица выигрышей первого игрока. Такая n-мерная таблица называется **нормальной формой игры**.

СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ

Пусть дана игра Г. Ситуация, т. е. n-мерный вектор стратегий $(x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_n^*)$, равновесна или является ситуацией равновесия, если для любого $i = \overline{1, n}$ и для любого $x_i \in X_i$ выполняется неравенство

$$f_i \;\; x_1^*, ..., x_{i-1}^*, \;\; x_i^*, \;\; x_{i+1}^*, ..., x_n^* \;\; \leq f \;\; x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_n^* \;\; {}_i \, .$$

При этом вектор $x^* = \;\; x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_n^*$ называется **точкой равновесия по Нэшу**.

Ситуация равновесна, если ни один игрок не имеет выгоды от изменения своей стратегии при условии, что все остальные игроки собираются придерживаться своих стратегий. В этом случае, если каждый игрок знает, как будут играть остальные, он имеет основания придерживаться той стратегии, которая соответствует этой ситуации равновесия, и тем самым игра становится устойчивой. Поэтому в играх с полной информацией ситуации равновесия существуют. Если игра не имеет ситуаций равновесия, то игроки пытаются отгадать стратегии других игроков, сохраняя свои стратегии в тайне.

Пусть справедлива следующая, основная при рассмотрении игр в n-мерном случае теорема.

Теорема. Любая игра n лиц с полной информацией и счетным числом стратегий имеет ситуацию равновесия.

Игра в n-мерном случае называется **игрой с нулевой суммой**, если при каждом завершении игры вектор значений функции выигрыша $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ где p_i – выигрыш i-го игрока, удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0 \, .$$

Игра с нулевой суммой есть замкнутая система: то, что кто-то выиграл, должно быть кем-то проиграно.

Игры двух лиц с нулевой суммой называются антагонистическими, или **строго конкурентными**.

Теорема: Пусть (x_1, x_2) и (y_1, y_2) – две ситуации равновесия антагонистической игры. Тогда:

1) (x_1, x_2) и (y_1, y_2) также являются ситуациями равновесия;

2) $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) = f(y_1, x_2) = f(x)$.

Эта теорема имеет место только для антагонистических игр с нулевой суммой.

СВОЙСТВА МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ В МАТРИЧНЫХ ИГРАХ

Пусть игрок имеет только конечное число n чистых стратегий, смешанная стратегия представляет собой n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$x_i \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{2}$$

Пусть множества всех смешанных стратегий первого и второго игроков обозначаются соответственно X и Y.

Если игра имеет матрицу выигрышей A и первый и второй игроки выбирают смешанные стратегии x и y, то ожидаемый выигрыш будет

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j, \tag{3}$$

или в матричных обозначениях

$$A(x, y) = xAy^T. \tag{4}$$

Если бы второй игрок раскрыл стратегию первого игрока, то второй игрок выбрал бы y так, чтобы минимизировать $A(x, y)$, т. е. нижний выигрыш первого игрока при условии, что он выберет стратегию x,

$$v(x) = \min_{y \in Y} xAy^T. \tag{5}$$

Число xAy^T есть взвешенное среднее ожидаемых выигрышей первого игрока, использующего стратегии x против чистых стратегий второго игрока, т. е. этот минимум достигается на некоторой его чистой стратегии j:

$$v(x) = \min_j xAy^j \,, \tag{6}$$

где A^j – j-й столбец матрицы A. Поэтому первый игрок выбирает x так, чтоб максимизировать $v(x)$, получая

$$\alpha = \max_{x \in X} \min_j xAy^j \,. \tag{7}$$

Такая стратегия x называется максиминной стратегией первого игрока.

Аналогично если второй игрок выбирает стратегию y, он будет иметь ожидаемый верхний проигрыш

$$v(y) = \max_i A_i y^T \,, \tag{8}$$

где A_i – i-я строка матрицы A, и должен выбрать y так, чтобы иметь

$$\beta = \min_{y \in Y} \max_i A_i y^T \,. \tag{9}$$

Такая стратегия y называется минимаксной стратегией второго игрока.

Теорема о минимаксе. Для любой антагонистической матричной игры двух игроков с нулевой суммой числа α и β существуют и равны между собой.

ИГРЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Пусть есть игра, в которой допустимы не все смешанные стратегии. Предположим, что смешанные стратегии x и y выбираются из некоторых выпуклых многогранников.

Если матрица игры $A = \{a_{ij}\}$, то задача первого игрока состоит в том, чтобы найти

$$\max_{x \in X} \; \min_{y \in Y} xAy^T \quad , \tag{1*}$$

где два множества (выпуклые многогранники) X и Y определяются соответственно неравенствами

$$\left.\begin{aligned} xB &\le C, \\ x &\ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} yE^T &\ge F, \\ y &\le 0. \end{aligned}\right\}$$

Задача второго игрока состоит в том, чтобы при тех же ограничениях на стратегии игроков найти

$$\min_{y\in Y}\ \max_{x\in X} xAy^T \quad . \tag{2*}$$

В выражении (1*) величина в скобках является функцией y. Точнее она является значением ЗЛП, целевая функция которой имеет коэффициенты, зависящие от x. По теоремам двойственности, если эта задача допустима и ограничена, то две ЗЛП, прямая и двойственная к ней:

$$\left.\begin{aligned} &\min_y xAy^T, \\ \text{при}\ \ &yE^T \ge F, \\ &y \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

$$\left.\begin{aligned} &\max_z zF^T, \\ \text{при}\ \ &zE \le xA, \\ &z \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{4*}$$

будут иметь одинаковое значение целевой функции. Поэтому задача первого игрока сводится к задаче максимизации

$$\left.\begin{aligned} &\max_z zF^T, \\ \text{при}\ \ &zE - xA \le 0, \\ &xB \le C, \\ &z, x \ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

Аналогично задача (2*) игрока сводится к задаче минимизации:

$$\left.\begin{array}{r l} & \min\limits_{s} Cs^T, \\ \text{при} & sB^T - Ay^T \geq 0, \\ & yE^T \geq F, \\ & s,\, y \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (6^*)$$

Задачи (5*) и (6*) – это двойственные задачи. Если эти задачи допустимы, то выражения (1*) и (2*) будут равны и, таким образом, игра с ограничениями будет иметь решение в смешанных стратегиях.

Л е к ц и я 13

ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРИОРИТЕТОВ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

ПОНЯТИЕ МЕТОДА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК (ЭКСПЕРТНОГО АНАЛИЗА)

Как уже указывалось, у ЛПР есть множество целей, которым необходимо поставить в соответствие некоторые оценки их предпочтительности для выработки в дальнейшем обобщенного критерия, учитывающего эти цели пропорционально этим оценкам. Поскольку привлекательность тех или иных целей связана с природой факторов, их определяющих, для этого целесообразно привлекать лиц, сталкивающихся с данными факторами в своей профессиональной деятельности. Эти лица называют экспертами, а методологию выработки ими приоритета целей организации – **методом экспертных оценок (экспертным анализом).**

В основе метода экспертных оценок лежит система предпочтений. В зависимости от цели получения экспертной информации эти предпочтения могут быть заданы по различным шкалам.

Типы шкал могут быть следующие: номинальная шкала; интервальная шкала; шкала отношений.

При использовании **номинальной шкалы** задается некий эталон и все остальные факторы сравниваются с ним. При этом происходит разбиение всего множества факторов на два: удовлетворяет эталону или не удовлетворяет. В первом случае фактор получает оценку 1, в во втором соответственно – 0.

Формирование **порядковой шкалы** подразумевает использование процедуры упорядочения факторов, т. е. их ранжирование. Экспертные оценки при этом характеризуются ординальными числами, т. е. равноудаленными друг от друга.

Для получения **интервальной шкалы** оценок необходимо ранжировать все факторы, а затем в соответствии с полученным рангом присвоить каждому фактору свою оценку или вес. При этом расстояния между значениями факторов будут определяться численной мерой веса и в общем случае характеризоваться вещественными числами.

Эти три перечисленные выше шкалы представляют собой безразмерные, условные оценки.

Шкала отношений представляет собой интервальную шкалу, пересчитанную в конкретные единицы измерения, определяемые целью экспертизы, например в деньги, киловатт-часы и так далее. Они наиболее эффективны для принятия управленческих решений.

Задача формирования шкалы отношений, являясь достаточно сложной, не имеет строгого алгоритма пересчета оценок и зависит от конкретных исходных условий экспертизы.

РАНГ И ОЦЕНКА (ВЕС)

Расположение факторов в порядке возрастания (убывания) их существенного признака называется **ранжированием**. Возможны два случая.

Первый, когда число рангов равно числу оцениваемых факторов. Это говорит о том, что эксперт различает каждый фактор по степени его предпочтительности.

Во втором случае число рангов может оказаться меньше числа оцениваемых факторов, т. е. эксперт нескольким факторам присвоил одинаковые ранги. Для получения весов необходимо одному из факторов (в общем случае безразлично, каком) присвоить некоторое число. Таким образом, задается начало шкалы отсчета. Веса всех остальных факторов привязываются к заданной оценке, т. е. производится процедура взвешивания всех остальных относительно заданного.

Ранги и веса одинаково широко используются в практике получения экспертных оценок. При этом весовые оценки более чувствительны к индивидуальным особенностям мнений экспертов, поэтому они являются предпочтительными.

Нормирование экспертной оценки – это приравнивание суммы оценок факторов единице по групповым оценкам исходя из оценок экспертов.

Нормирование любой экспертной оценки означает, что представляющее ее число для всего набора факторов в целом принимается равным единице. Нормирование осуществляется после того, как по индивидуальным оценкам экспертов получены групповые, т. е. их математические ожидания.

Нормированные оценки имеют вид

$$\bar{v}_j = \frac{v_{ij}}{\left\{\sum_{j=1}^{m} v_{ij}\right\}} \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{m} \bar{v}_j = 1,$$

где v_{ij} – матожидание оценки по j-му фактору i-м экспертом; m – число рассмотренных факторов.

Нормирование дает возможность рассматривать оценки, полученные по всему списку факторов, аналогично плотности распределения вероятностей дискретной случайной величины.

ПРОЦЕДУРЫ ПОЛУЧЕНИЯ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Экспертные оценки дают возможность оценить важность или вес интересующих факторов, используя накопленный опыт и глубокие знания специфики рассматриваемого объекта. Поэтому полученная таким способом информация обладает большой управленческой ценностью, так как представляет ее качественную характеристику, которая может быть выражена числовой мерой, называемой весом.

Полученная субъективным способом оценка (вес) обладает управленческой объективностью при выполнении следующих условий:

- точно сформулирована цель экспертизы;
- для взвешивания интересующих факторов использованы достаточно строгие логические процедуры получения оценок;
- полученная групповая оценка факторов характеризуется достаточной степенью согласованности экспертов по оцениваемым параметрам.

В основе процедур получения экспертных оценок лежат некоторые общие принципы, сформулированные следующим образом.

1. Каждому событию или фактору соответствует действительное неотрицательное число v, которое рассматривается как значимость этого события фактора x, т. е. некоторому x соответствует число v.

2. Если фактор x_j более важен, чем фактор x_k, или $x_j > x_k$, то $v_j > v_k$. Если рассматриваемые факторы равноценны, то $v_j = v_k$.

3. Если оценки v_j и v_k соответствуют факторам x_j и x_k, то $(v_j + v_k)$ соответствует общему результату x_j и x_k (свойство **аддитивности оценок**).

Использование той или иной процедуры получения оценок определяется количеством оцениваемых факторов при условии, что экспертная группа отвечает требованиям к их численности и компетентности.

Если список факторов не превышает 15…20 наименований, то наиболее эффективной процедурой взвешивания является процедура последовательных предпочтений (**процедура Черчмена–Акоффа**).

В случае значительного количества рассматриваемых факторов (больше 20) целесообразно использовать либо процедуру парных сравнений, либо процедуру трехбалльных оценок.

ПРОЦЕДУРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Данная процедура является интерпретацией процедуры Черчмена–Акоффа, максимально формализованной для компьютерной реализации.

Пусть есть m факторов, которые необходимо взвесить: $x_1, x_2, ..., x_m$. Одному из факторов, обычно x_1, присваивается базовая оценка в виде веса v_1. Факторы расставляются в порядке приоритета, где на первом месте стоит наиболее приоритетный фактор, далее – менее приоритетный и так до завершения ряда оцениваемых факторов. Для практической реализуемости процедуры далее принимается, что ранжированным рядом факторов является ряд $x_1 > x_2 > ... > x_m$, т. е. так их расставил эксперт. Эксперт сравнивает каждый приоритетный фактор с суммой других, менее приоритетных. В результате такого рассмотрения формируется ряд последовательных соотношений обычно следующего вида (в частном случае часть из них может быть равенствами и в каждом выражении часть x_1 пропущена):

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 ... + x_m, \\ x_2 > x_3 + x_4 ... + x_m, \\ x_3 > x_4 + ... + x_m, \\ .... \\ x_{m-1} > x_m. \end{cases} \tag{1}$$

Далее подставляется вместо каждого x_i его вес v_i и эти соотношения заменяют на неравенства аналогичного выше вида, при этом в неравенствах и в дальнейших выражениях может быть пропущена часть v_i

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + v_3 + v_4 ... + v_m, \\ v_2 > v_3 + v_4 ... + v_m, \\ v_3 > v_4 + ... + v_m, \\ .... \\ v_{m-1} > v_m. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь работа эксперта завершается и выполняется обработка, состоящая из двух расчетных процедур.

Процедура 1. Систему неравенств заменяют на систему равенств и из нее находят веса всех факторов, при этом вес наименее приоритетного фактора приравнивается a .

Процедура 2. Производится корректировка полученных оценок в соответствии с условиями, выраженными системой неравенств (2). Рассмотрение неравенств непременно выполняется снизу вверх.

Корректирующее слагаемое для i -го фактора определяют по выражению

$$\Delta v_i = \frac{v_{i+1} + v_{i+2} + ... + v_m}{m-1} \quad (3)$$

(здесь может быть пропущена часть оценок v_i , в случае если пропущена часть факторов x_i в соответствующих выражениях приоритета (1)).

Далее корректируют оценку i-го фактора. Неравенство вида $v_i > v_{i+1} + v_{i+2} + ... + v_m$ заменяют равенством:

$$v_i = v_{i+1} + v_{i+2} + ... + v_m + \Delta v_i \ . \quad (4)$$

Если неравенство имеет вид $v_i < v_{i+1} + v_{i+2} + ... + v_m$, его заменяют следующим равенством:

$$v_i = v_{i+1} + v_{i+2} + ... + v_m - \Delta v_i \ . \quad (5)$$

Идя снизу вверх, переходят к следующему неравенству. Если для оценки фактора их несколько, то, переходя к следующему, проверяют ранее полученную оценку фактора на соответствие этому неравенству. При его невыполнении находят новую оценку фактора и затем – среднюю двух оценок.

Л е к ц и я 14
ПРОЦЕДУРЫ ЭКСПЕРТНОГО АНАЛИЗА

РОЛЬ ЭКСПЕРТНОГО АНАЛИЗА В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

Полученный выигрыш (выгода) часто не полностью характеризует деятельность объекта, по управлению которым необходимо принять решение. Как правило, это всего лишь одна сторона (характеристика) его функционирования, не связанная (явным образом) с другими сторонами. Например, это может быть прибыль, получение которой игнорирует аналогичный процесс в отношении доли рынка, снижения цен, увеличения капитализации либо противоречит ему.

Функция полезности для каждой из таких сторон и является **критерием**. Множественность этих сторон обусловливает еще один вид неопределенности, кроме физической. Это *критериальная неопределенность*, связанная со сложностью понимания в ходе разрешения проблемной ситуации, какие именно стороны существования объекта управления более важны в сравнении с другими у ЛПР.

Установление этих сторон определяет характер выбора стратегий для критериев, отражающих эти стороны, еще называемых *частными критериями* (так как описывают лишь часть объекта).

Критериальная неопределенность снимается построением *обобщенного критерия*, представляющего сумму частных критериев, умноженных на положительные коэффициенты от нуля до единицы. Эти коэффициенты называются *весами* и обозначают относительную важность частных критериев между собой, причем их сумма равна единице. В итоге имеем задачу многокритериальной оптимизации, относящуюся к оптимизации и математическому программированию. Полученное в результате ее решение автоматически дает и выигрыши от частных критериев.

Задача определения весов наиболее сложна – для их корректного поиска необходимо профессиональное знание управляемого объекта. Для этого и пользуются услугами экспертов.

Эксперты также могут установить вероятности появления во внешней среде возможных ситуаций, порождающих проблемные ситуации, что облегчает снятие физической неопределенности – здесь эти вероятности подобны весам, они также положительны и расположены в единичном отрезке.

ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Для определения предпочтений различных частных критериев, а следовательно, их оценки экспертным методом часто применяется теория полезности. Она основана на использовании функций полезности. В задачах принятия решений значение функции полезности выражает предпочтение, полезность альтернатив. Она может быть оценена на множестве альтернатив и на множестве критериев, при этом критерии могут быть взаимно независимыми либо зависимыми.

Подход к использованию теории полезности базируется на проверке ряда аксиом для построения функции полезности альтернатив. Аксиомы подразделяются на две группы: аксиомы существования функции полезности и аксиомы независимости критериев.

Аксиомы существования функции полезности сформулированы на множестве альтернатив и множестве критериев. В случае независимости альтернатив $x_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, и существования линейного порядка их предпочтения $x_1 > x_2 > ... > x_m$ на этом множестве альтернатив можно построить функцию полезности $U(x_i)$ такую, что $U(x_1) > U(x_2) > ... > U(x_m)$.

При наличии информации (количественной либо качественной) на множестве факторов $x_i \in X$, $i = \overline{1, m}$, характеризующей соответствующие альтернативы, и для них могут быть построены функции полезности как по каждому критерию f_i, соответствующему фактору x_i, так и по совокупности критериев. Построив функцию полезности $U(x_i)$ такую, что $U(x_1) > U(x_2) > ... > U(x_m)$, от нее можно перейти к оценкам факторов $v_1 > v_2 > ... > v_m$, которые являются значениями соответствующих $U(x_1), U(x_2), ..., U(x_m)$.

Теория полезности основывается на следующих аксиомах.

1. Результат x_i оказывается предпочтительнее x_j тогда и только тогда, когда $U(x_i) \geq U$, где U и $U(x_i)$ – полезности результатов x_i и x_j соответственно.

2. Транзитивность. Если $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $U(x_i) > U(x_k)$.

3. Линейность. Если некоторый результат x представлен в виде $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, то полезность его

$$U(x) = (1-\alpha)U(x_1) + \alpha U(x_2).$$

4. Аддитивность. Если $U(x_1, x_2)$ – полезность от достижения одновременно результатов x_1 и x_2, то свойство аддитивности означает, что $U(x_1, x_2) = U(x_1) + U(x_2)$. Если есть m результатов $x_1, x_2, ..., x_m$, то

$$U(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} U(x_i).$$

ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ НА ОСНОВЕ КАЧЕСТВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ФАКТОРОВ

Часто бывают случаи, когда критерии являются качественными и имеют возможные результаты типа «да – нет» с независимыми полезностями. Пусть имеется n возможных результатов $x_1, x_2, ..., x_m$.

Методика определения полезности состоит из следующих этапов.

1. Предлагают эксперту упорядочить результаты по предпочтительности. Пусть x_1 – наиболее, x_m – наименее предпочтительный результаты.

2. Приписывают полезности результата x_m значение 1 и предлагают руководителю приписать различные числа остальным результатам, определяющим их относительную ценность для него (не сообщать этих чисел ему на последующих шагах).

3. Составляют таблицу возможных вариантов выбора (комбинаций результатов), достигаемых одновременно, и затем устанавливают их предпочтительность относительно отдельных результатов $x_1, x_2, ..., x_m$:

1	x_1 или $x_2+...+x_m$	x_2 или $x_3+...+x_m$	…	x_{m-2} или $x_{m-1}+...+x_m$
2	x_1 или $x_2+...+x_{m-1}$	x_2 или $x_3+...+x_{m-1}$	…	
3	x_1 или $x_2+...+x_{m-2}$	x_2 или $x_3+...+x_{m-2}$	…	
…	………………….	………………….	…	
…	………………….	x_2 или x_3+x_4		
m	x_1 или x_2+x_3			

Рассматривают приведенные варианты выбора, начиная с верхней строки левого столбца. Если левая часть первого варианта выбора предпочтительнее или эквивалентна правой части, то переходят к верхней строке правого столбца (следующего). В противном случае продолжают просмотр столбца.

Проверяют числа, полученные на шаге 2, и определяют, удовлетворяют ли они неравенствам, полученным (принятым) на шаге 3. Если обнаруживается несоответствие, то следует изменить в минимально возможной степени числовые оценки так, чтобы они удовлетворяли числовым неравенствам.

Такая методика становится практически нереализуемой при увеличении числа результатов.

Для такой ситуации авторами предложена следующая модификация методики. Множество результатов разбивают на подмножества, состоящие из 5…7 результатов и имеющие один общий результат, например x_1. Затем приписывают начальные значения полезностям всех результатов, причем полезность общего результата x_1 одинакова во всех подмножествах. Далее применяют изложенный способ коррекции оценок полезности независимо в каждом из подмножеств с ограничением $U(x_1)=\text{const}$. В результате получают систему полезностей с единой мерой $U(x_1)$ для всех подмножеств.

ПРОЦЕДУРЫ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПРИ БОЛЬШОМ КОЛИЧЕСТВЕ ФАКТОРОВ

Процедура парных сравнений. В этой процедуре сравнение всех факторов производится попарно с тем, чтобы в каждой паре установить наиболее важный фактор. Если фактор x_i более предпочтителен, чем фактор x_i, то оценка $v_i=1$, а $v_j=0$. Результаты сравнения заносятся в матрицу парных сравнений. Матрица является квадратной с незаполненной главной диагональю, так как сравнение фактора с ним самим не имеет смысла. Оценка факторов экспертом делается по горизонтали:

Фактор	x_1	x_2	...	x_m	Сумма баллов
x_1	–	δ_{12}	...	δ_{1m}	Δ_1
x_2	δ_2	–	...	δ_{2m}	Δ_2
...	...	...	–	...	...
x_m	δ_{m1}	δ_{m2}	...	–	Δ_m

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$ $\quad \Delta_1 = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}$.

После составления данной таблицы оценкам факторов присваивается сумма баллов, подсчитанная ранее в таблице, т. е. $v_j = \Delta_j$, $j = \overline{1, m}$.

Имеется также частный случай, когда, по мнению эксперта, ни один из рассматриваемых факторов в паре не имеет предпочтительности, т. е. i-й и j-й факторы равнозначны. Тогда оценка для них может быть сформирована следующим образом: $v_i = v_j = 0,5$.

Процедура трехбалльной оценки. Экспертные оценки, как правило, могут быть отнесены к одной из трех групп: приоритетной, равноприоритетной и неприоритетной.

Весовые показатели приоритетной и неприоритетной групп имеют наименьшую плотность оценок. Это говорит о том, что веса в этих группах резко различаются между собой.

Плотность весов в равноприоритетной группе значительно выше. Из этого следует, что приоритет (вес) факторов в различных группах чувствуется экспертами по-разному: для приоритетной и неприоритетной групп оценки экспертов более очерчены, для равноприоритетной более размыты.

Таким образом, при оценке большого (практически неограниченного) числа факторов можно использовать модифицированный метод получения весов по трехбалльной системе: приоритетные факторы получают оценку 3, равноприоритетные оценку 2, неприоритетные – оценку 1.

Лекция 15

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

ГРУППОВЫЕ ОЦЕНКИ И ИХ ПОИСК ЧЕРЕЗ ПРОЦЕДУРУ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Обычно оценку факторов проводят несколько экспертов для повышения точности и объективности оценок. По индивидуальным оценкам экспертов вычисляют групповые оценки факторов двумя способами.

Первым способом групповую оценку находят как сумму оценок всех экспертов по каждому из факторов, вторым – как матожидание индивидуальных оценок экспертов по конкретному фактору.

Кроме этого, можно использовать процедуру статистических оценок для получения групповых оценок. Пусть ряд экспертов $1, 2, ..., r$ рассмотрели n факторов $x_1, x_2, ..., x_n$. Они поставили этим факторам ранги z_{ih}, $i = \overline{1, n}$, $h = \overline{1, r}$ соответственно их важности, занеся результаты в таблицу. При этом $Z = \; z_{ih}$, где единице соответствует высший ранг, эксперты располагаются по строкам, а факторы – по столбцам. Тогда для оценки весов данных факторов нужно выполнить следующие этапы.

1. Составляется таблица M , где в строках стоят факторы, для них вводят индекс i , а по столбцам тоже факторы (индекс j), и каждый фактор i в строке сравнивают с факторами j в столбцах. В соответствующей ячейке ставят число r_{ij} – это число экспертов, поставивших фактор i на более высокое место, чем фактор j . В случае $i = j$ ставится прочерк "–".

2. Строят таблицу P, аналогичную таблице M, но в ячейках вместо чисел r_{ij} ставятся числа $p_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{r}$.

3. Формируют матрицу нормированных отклонений G, где g_{ij} – это аргумент функции нормированного нормального распределения со значением $p_{ij} : F(g_{ij}) = p_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{g_{ij}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{z}}$. У таблиц $F(x)$ есть свои особенности.

Если $F(x) \geq 0{,}5$, то можно пользоваться такой таблицей напрямую. Но значению $F(x) = 0{,}5$ соответствует значение $x = 0$. При $F(x) < 0{,}5$ аргумент x по знаку будет отрицательным, а его значение определяется следующим свойством: $F(x) = 1 - F(x)$ откуда, зная, что значение $F(x) < 0{,}5$ есть значение $F(-x)$, находим соответствующее значение $F(x)$ по таблице и отнимаем его от единицы: $F(-x) = 1 - F(x)$. Это и будет то значение, по которому можно найти соответствующий x, и, приписав ему знак "$-$", получить итоговое значение, которое применительно к данной задаче обозначают g_{ij}.

4. Считают средние нормированные отклонения $\bar{g}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij} / n$, оценки $u_i = F\ \ \bar{g}_i$ и их веса $w_i = u_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$.

5. Проверка на непротиворечивость: находят различия $g_{ij}^* = \bar{g}_i - \bar{g}_j \ \ \forall i,\ j = \overline{1, n},\ i < j$, нормированные различия $\Delta_{g_{ij}} = F\ \ g_{ij}^*$, отклонения $\Delta_{ij} = \Delta_{g_{ij}} - p_{ij}$ и среднее линейное отклонение $\Delta_{\Sigma_{ij}} = \sum \left|\Delta_{ij}\right| \Big/ r^* \ \ \forall i,\ j = \overline{1, n},\ i < j$, где r^* – число пар (i, j), удовлетворяющих условиям $i < j$.

Критерий непротиворечивости – малое число пар (i, j), для которых $\left|\Delta_{ij}\right| > \Delta_{\Sigma}$.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ НАДЕЖНОСТЬ ГРУППОВЫХ ОЦЕНОК

После расчета групповых оценок оценивают их качество или надежность, т. е. определяют, насколько они согласованы по каждому рассмотренному фактору и в целом в экспертной группе одним из способов.

Один способ – это расчет величины **размаха вариации** z^{var} в ответах экспертов по i-му фактору

$$z^{\mathrm{var}} = z_i^{\max} - z_i^{\min},$$

где $z_i^{\max}$ и $z_i^{\min}$ – максимальная и минимальная оценки i-го фактора.

На основе некоторого нормированного значения размаха вариации z^{nor} по всем факторам оценивают степень согласованности оценок экспертов. Они надежны, если выполняется условие:

$$z_i \le z^{\mathrm{nor}}.$$

Другой способ расчета согласованности экспертных оценок базируется на вычислении **среднего квадратического отклонения** в ответах экспертов $\sigma(z_i)$. Если число экспертов равно $r(h=\overline{1,r})$, а число оцениваемых факторов $(i=\overline{1,n})$, то можно рассчитать величину дисперсии $D(z_i)$ как

$$D(z_i)\left[\sum_{h=1}^{r}(z_{ih}-E(z_i))^2\right]\Big/ r-1 ,$$

$$\sigma(z_i)=\sqrt{D(z_i)},$$

где $E(z_i)=\left[\sum_{h=1}^{r} z_{ih}\right]\Big/ r$ – матожидание оценки i-го фактора; z_{ih} – ранговая оценка фактора i экспертом h.

Для оценки согласованности всех экспертов $(h=\overline{1,r})$ по каждому фактору $(i=\overline{1,n})$ часто применяют **коэффициент согласованности**:

$$\mu_i = 1-\frac{\sigma(z_i)}{E(z_i)}.$$

Если среднее квадратическое отклонение в ответах экспертов $\sigma(z_i)$ равно 0, то все эксперты присвоили рассматриваемому фактору одинаковую оценку, т. е. $\mu_i = 1$.

Если среднее квадратическое отклонение $\sigma(z_i)$ равно значению математического ожидания (среднего арифметического) или превышает его, то $\mu_i < 0$. Так как отрицательное значение коэффициента согласованности не имеет никакого здравого смысла, то при анализе считается, что он равен 0, т. е. отсутствует согласованность экспертов в группе по данному фактору.

СОГЛАСОВАННОСТЬ МНЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ ПО ВСЕМ ФАКТОРАМ

При анализе экспертных оценок возникает необходимость выявить согласованность мнений всех экспертов по всем факторам. Такая интегральная оценка позволяет характеризовать качество информации, полученной по всей экспертной группе. Для этого рассчитывается коэффициент согласованности всех экспертов по всем факторам z^S, его часто называют **коэффициент конкордации**.

Расчет производится в **рангах**, т. е. используются величины r_{ih}, тогда

$$z^S = \frac{12S}{r^2 n(n^2 - 1)},$$

где

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{h=1}^{r} (z_{ih} - M) \right]^2,$$

$$E = \frac{1}{2} n(r + 1),$$

здесь E – матожидание суммы ранговых оценок по всем факторам, m и n – общее число экспертов и факторов.

Значение коэффициента конкордации заключается в интервале от 0 до 1. Причем если $z^S = 1$, то это означает, что все эксперты присвоили всем факторам абсолютно одинаковые оценки. Если $z^S = 0$, то согласованности мнений экспертов по всем оцениваемым факторам не существует. Оба этих варианта представляют собой крайние случаи при оценке качества экспертизы и являются ненадежными, так как в первом случае имел место несомненный сговор экспертов, а во втором – экспертная группа не справилась с поставленной перед ней задачей. Реальные значения коэффициента согласованности должны быть заключены в диапазоне 0,7…0,9.

Полученное значение коэффициента конкордации можно проверить на статистическую значимость, используя для этого, например, критерий χ^2-Пирсона. В этом случае для оценки статистической значимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{табл}}, \tag{*}$$

где $\chi^2_{\text{табл}} = f(\gamma, \alpha)$ причем γ – доверительная вероятность, которую в расчетах принимают на уровне 99 % или 95 %, а α – число степеней свободы, равное произведению числа экспертов на число факторов, т. е. $\alpha = mr$.

Значение $\chi^2_{\text{набл}}$ рассчитывается как $\chi^2_{\text{набл}} = (n-1)rz^S$.

Выполнение условия (*) говорит о том, что полученная степень согласованности мнений экспертов z^S является неслучайной.

ОСОБЕННОСТИ ГРУППОВОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Как уже указывалось, по индивидуальным оценкам экспертов производится вычисление их групповых оценок интересующих ЛПР факторов, при этом применяются два различных способа.

С одной стороны, групповую оценку можно найти, сложив оценки каждого эксперта по всем анализируемым факторам. С другой стороны, групповую оценку факторов рассчитывают в виде среднего арифметического их индивидуальных оценок конкретными экспертами. Если групповые оценки пронормировать, то независимо от способа их получения пронормированные групповые оценки будут одинаковыми. Поэтому неважно, каким способом делают расчет групповых оценок экспертов по каждому из рассмотренных факторов.

При проведении групповой экспертизы считается, что мнение группы экспертов надежнее, чем мнение отдельного лица (эксперта). В этом случае надежность экспертных оценок подобна надежности статистических оценок, к которым непременно предъявляется требование по объему выборки. Но на практике трудно рассчитывать на то, что можно сформировать достаточно многочисленную группу экспертов, состоящую из действительно квалифицированных специалистов в рассматриваемой области.

Кроме этого, коллективная ответственность за полученные оценки позволяет в ряде случаев специалистам принимать более рискованные решения тогда, когда это представляется возможным.

При этом считается, что интервал оценок, который образуется за счет различных мнений экспертов, должен содержать «истинную» оценку, необходимую для принятия обоснованного решения. Поэтому разброс мнений не должен противоречить требованию по надежности получения экспертной информации, в частности, по величине коэффициента согласованности мнений и экспертов и коэффициента конкордации.

Лекция 16

ГРУППОВОЙ И МНОГОШАГОВЫЙ ЭКСПЕРТНЫЙ АНАЛИЗ

ПРОВЕДЕНИЕ ГРУППОВОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

Наиболее надежные экспертные оценки дает групповая экспертиза.

Организация и проведение групповой экспертизы включает в себя несколько этапов.

1. Формирование цели экспертизы.
2. Формирование группы аналитиков и руководителя экспертизы, а также разработка процедуры опроса.
3. Отбор и формирование группы экспертов.
4. Проведение опроса.
5. Анализ и обработка экспертной информации.
6. Синтез полученной информации и приведение ее к форме, удобной для принятия решения.

Формирование цели экспертизы является первоначальным и ответственным этапом любой экспертизы. Экспертиза – трудоемкое и дорогостоящее мероприятие. Проводить экспертизу следует тогда, когда никакие другие способы решения проблемы не дают результатов. Цель экспертизы должна быть четко сформулирована, т. е. заказчик экспертизы должен представлять, для чего она будет организована и какой результат может быть получен. При этом экспертиза может быть направлена на решение как стратегической, так и тактической проблемы, стоящей перед организацией или предприятием.

Сформированная группа аналитиков необходима в качестве методологической, методической и практической поддержки проведения экспертизы. Круг задач, решаемых этой группой, достаточно большой: составление анкет экспертизы, формулирование ее цели в форме, понятной для экспертов, выбор процедуры опроса, а также обучение экспертной группы этим процедурам для практического использования ими в качестве инструментария. Руководитель экспертизы при этом может быть выбран из числа членов аналитической группы.

ПРИНЦИП САМООЦЕНКИ ЭКСПЕРТОВ

Обычно сложно рассчитывать на использование в качестве экспертов большого количества компетентных специалистов по данной проблеме. При этом компетентность кандидатов в эксперты нужно проверять. Для этих целей используются «мягкие» тестовые проверки их компетентности.

На практике часто используется принцип самооценки экспертов. Разрабатывается специальная анкета, в которую включается определенное количество вопросов по данной проблематике. Для удобства получения самооценок количество вопросов ограничивается, как правило, десятью. Затем эксперты расставляют вопросы в ранжированный ряд. На первое место ставится тот вопрос, ответ на который, по мнению эксперта, он знает лучше остальных, и оценивает его оценкой 5 по пятибалльной шкале. Затем следует вопрос, ответ на который эксперт оценивает на 4, и так далее.

Получив такие данные от всех экспертов, можно р ать среднюю групповую самооценку как

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} z_{ih} ,$$

где $m-$ число экспертов, участвующих в опросе; $n-$ число вопросов анкеты, используемой для опроса.

Зависимость средней групповой ошибки от самооценки имеет вид, показанный на рис. 1.

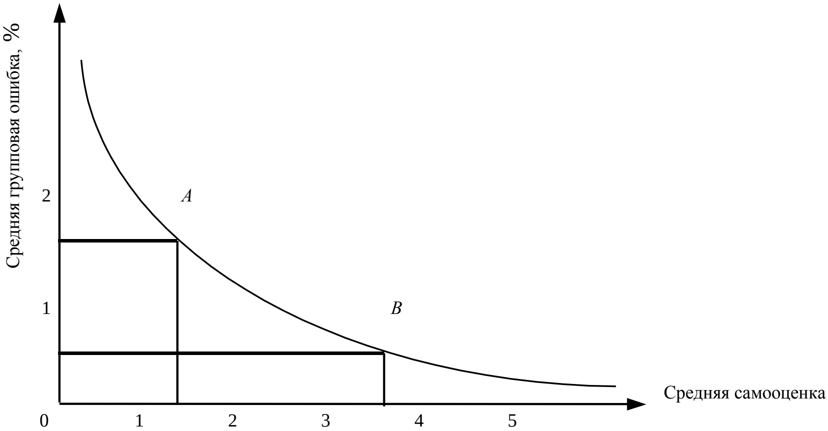


Рис. 1

Анализ такой зависимости говорит о том, что группа экспертов A, самооценка которых выше, чем у группы экспертов B, будет давать более качественные оценки, так как средняя групповая ошибка у этой группы экспертов имеет меньшее значение.

ЧИСЛЕННОСТЬ ЭКСПЕРТОВ И ФОРМЫ ИХ ОПРОСА

Есть определенные требования к оптимальной численности экспертной группы. Если к экспертным оценкам применять то же требование, что и к статистическим оценкам, то экспертная группа должна обладать значительной численностью, причем чем больше, тем лучше. Но численность компетентных специалистов, как правило, весьма невелика.

Проведенные исследования показывают, что число экспертов в группе может быть 10-12, так как при повышении численности средняя групповая ошибка экспертизы практически не снижается (рис. 2).

Для проведения опроса используются две формы: открытая и закрытая.

Существенное достоинство открытой формы опроса связано с тем, что при индивидуальном оценивании эксперты имеют возможность общаться друг с другом, обмениваться мнениями, выслушивать доводы и контраргументы каждого. Это приводит к тому, что полученные

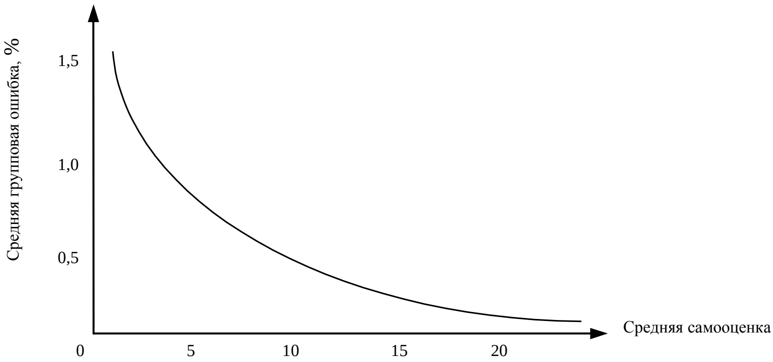


Рис. 2

групповые оценки обладают, как правило, большой степенью согласованности. Здесь существует опасность нивелировки мнений экспертов за счет использования ими при назначении своей оценки мнения наиболее авторитетного эксперта в группе – тогда снижается ценность полученных групповых оценок.

Закрытая форма опроса свободна от недостатков, присущих открытой форме, что является ее достоинством. Но обычно согласованность мнений экспертов получается достаточно низкой.

После проведения экспертизы информация обрабатывается с целью расчета показателей надежности полученных оценок. Для принятия управленческих решений полученные оценки обычно преобразовываются в шкалу отношений.

МНОГОШАГОВЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ОПРОСА (МЕТОД ДЕЛЬФЫ)

Для ликвидации основного недостатка закрытой формы опроса – низкой согласованности мнений экспертов – необходимо применять специальные приемы, в частности, использовать многошаговые процедуры опроса, один из которых называется методом Дельфы.

Этот метод получил свое название от древнегреческого города Дельфы, в котором находился дельфийский оракул, делавший предсказания (прогнозы) для жителей Греции. На самом деле, дельфийский оракул представлял собой группу старейшин, которые, используя свои знания, опыт и интуицию, формировали групповое мнение по злободневным проблемам жизни. Этот метод является использованием модификации **групповой экспертизы** для принятия управленческих решений.

Метод Дельфы представляет собой ряд последовательных процедур, которые характеризуются тремя основными чертами: анонимностью, регулируемой обратной связью и групповым ответом.

Анонимность позволяет уменьшить влияние доминирующих в группе личностей, что повышает эффективность данного вида групповой экспертизы.

Обратная связь осуществляется за счет проведения ряда туров опроса, в каждом из которых экспертам сообщаются специально рассчитанные характеристики предыдущего тура опроса. Таким образом, обратная связь уменьшает «шумы» – групповые интересы экспертов.

Групповой ответ формируется интерактивным путем с учетом оценок, полученных на предыдущем туре опроса.

В основе метода лежат следующие предпосылки.

1. Поставленные перед экспертами вопросы должны допускать выражение ответа в виде числа.

2. Каждый эксперт должен располагать всей информацией для получения числовой оценки.

3. Ответ на каждый вопрос экспертом должен быть обоснован.

Это позволяет сблизить суждения экспертов по оцениваемой ими проблеме.

После каждого тура оценки экспертов обрабатываются и представляются всем экспертам в определенной форме. Наиболее часто сообщаются нижняя и верхняя границы оценок, а также средние значения по всем рассматриваемым факторам. Эксперт, оценки которого лежат вне рассчитанных интервалов, должен их или изменить, или мотивировать, почему его оценка не совпадает с групповой. Мотивировки мнений и измененные оценки сообщаются всем экспертам в анонимной форме. Убедительность аргументов и мотивировок позволяет эксперту изменить свое мнение в ту или иную сторону.

Число туров может быть различным. Наиболее часто оценки экспертов согласуются после двух или трех туров.

Л е к ц и я 17

ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ЗА РЕСУРСЫ

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ НА РЫНКЕ

Понятие *экономического равновесия* отражает равенство спроса предложению в точке равновесия при равновесных ценах. В силу узости этого понятия целесообразней анализировать равновесие по Нэшу, поскольку параметры состояния, где могут находиться участники и куда они могут стремиться попасть, часто не зависят от цен выпускаемой и покупаемой продукции.

Методы обеспечения равновесия для субъектов рынка должны не только учитывать их интересы (критериальную неопределенность). Состояния, которые описывают найденные решения, достигаются субъектами рынка в результате их собственных действий, и эти действия почти независимы от управляющего органа, стремящегося достигнуть общесистемного эффекта. Поэтому методы обеспечения равновесия должны давать методику поиска решений, определяемых неявным характером управления деятельностью независимых субъектов рынка. В отличие от прямого, ориентированного на оптимизацию действий, неявный характер управления предусматривает здесь не прямые указания по экономической деятельности, а создание таких условий, при которых равновесие по Нэшу в результате поиска равновесных состояний возможно в принципе.

РАВНОВЕСНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗЛП

К поиску точек равновесия в играх n лиц сводится также ряд обратных задач *математического программирования* (ЗМП), являющихся обобщением задач *линейного программирования* (ЗЛП), например, с матрицей межотраслевого баланса (МОБ). Приведем некоторые из них.

Заданы матрица МОБ A размерности $m \times n$, векторы цен $c \in E^n$ и ресурсов $b \in E^n$, требуется найти оптимальный план $x^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_x \; c^T x : Ax \le b, x \ge 0$. Обратно, задан оптимальный план вектора x^*, прибыль (затраты) $\varphi^* = \varphi(x^*)$, матрица МОБ A, находится вектор цен c^* ресурсов b^* и оценок ресурса A^* из соотношения: x^*, $x^*, \varphi^* \in \operatorname{Arg}\min\limits_x \; c^{*T} x : Ax \le b^*, x \ge 0$, где $c^* \in R_c$, $b^* \in R_b$; R_b, R_c – выпуклые компакты.

Пусть некоторая система характеризуется параметрами x. Внешние условия ее работы отражаются параметрами $u = \{A, b, c\}$. Прямая задача заключается в поиске оптимальных значений параметров x^* функционирования системы при заданных внешних условиях u^*. Обратная задача есть поиск таких внешних условий – параметров u^*, при которых система с параметрами $x = x^*$ работает оптимально.

Есть следующая *общая постановка обратной задачи МП*: найти пару векторов $x^* \in E^n$ и $u^* \in E^m$, принадлежащую некоторому множеству $R_{x,u}$:

$$x^*, u^* \in R_{x,u} = \; x, u : u \in E^m, g(x,u) \le 0, w(x,u) \; , \tag{1}$$

где $g \in E^{m_1}$, $w \in E^{m_2}$, $m_2 < n + m$, и удовлетворяющую экстремальному включению

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_x \{\varphi_0(x, u^*) : \varphi_i(x, u^*) \le 0, i = \overline{1, l}, x \in R_x\}, \tag{2}$$

т. е. в задаче параметрического МП (2) требуется выбрать параметр $u = u^*$ и отвечающий ему оптимум x^* такой, что x^*, $u^* \in R_{x,u}$.

Обратные задачи связаны с задачами поиска точек равновесия в играх n лиц – в задаче (1), (2) $\varphi_i(x,u) \equiv 0$, $g(x,u) \equiv 0$, а условия

$w(x,u)=0$ линейны: $w=C_1x+C_2u+g$, где C_1 и C_2 – матрицы соответствующих размерностей, тогда, введя квадратичный функционал

$$\frac{1}{2}\left|C_1x+C_2u+g\right|^2,$$

обратную задачу (1), (2) можно представить как игру двух лиц следующим образом – требуется найти:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_x \; \varphi(x,u^*): x \in R_x \; ,$$

$$u^*\varphi_i \in \operatorname{Arg}\min_u \; 1/2\left|C_1x+C_2u+g\right|^2, u \in R_u \; .$$

Эта задача есть частный случай игры *n* лиц по поиску равновесной точки. При этом ряд обратных задач МП сводится к иерархическим играм с непротивоположными интересами. Если в задаче (1), (2) целевая функция $\varphi_0(x,u)$ выпукла по *x*, то задача (2) параметрического нелинейного МП представима как

$$x(u)=\operatorname{Arg}\min_x \; \varphi_0(x,u):\varphi_i(x,u)\le 0, i=\overline{1,l}, x\in R_x \; . \tag{3}$$

Посредством функции $x(u)$ поставим следующую задачу оптимизации:

$$u^* = \operatorname{Arg}\min \; 1/2\left|C_1x+C_2u+g\right|^2 : u \in R_u \; . \tag{4}$$

Задачи (3), (4) отражают иерархическую игру, где первый игрок – центр, выбирает стратегию u (4). Второй игрок (3) на нижнем уровне иерархии выбирает стратегию $x(u)$. Наилучший гарантированный результат центра есть выбор такого u^*, что пара x^*, u^* удовлетворяет условию $C_1x^*+C_2u^*+g, u^* \in R_{u^*}$ или нулевой функционал в (4) при $u=u^*$.

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ

В экономическом смысле ситуации равенства спроса предложению называют равновесными. Приведем модель равновесия.

Пусть есть m участников, потребляющих и выпускающих ресурсы, с целевыми функциями u_k. Компонента u_{ki} вектора x_k положительна, если участник получает ресурс i, и отрицательна при его поставке другим агентам. При заданных ценах $p=(p_i)$ участник k максимизирует свою целевую функцию при ограничениях из множества X_k и ограничении $\beta_k(p)$:

$$u_k(x_k, p) \to \max , \tag{5}$$

$$x_k \in X_k , \tag{6}$$

$$px_k \le \beta_k(p) . \tag{7}$$

Здесь $\beta_k(p)$ – заданные функции, отражающие объем денег, получаемый или отдаваемый с учетом знака $\beta_k(p)$ участником k. Далее вводится участник $m+1$, его поведение описывается задачей:

$$py \to \max, \; y \in Y , \tag{8}$$

где $Y \subset R^n$ – положительные компоненты вектора y соответствуют объемам выпускаемых благ, а отрицательные – затратам.

В задачах (5)–(7), (8) искомые переменные есть векторы x_k, y. Вектор цен p устанавливается в процессе обмена или определяется ценообразующим органом для обеспечения возможности сбалансированного функционирования системы при независимости принятия решений.

Набор векторов p^*, $x_k^*\,{}_1^m$, y^* называется ценовым равновесием, если для $\forall k$ при $p=p^*$ вектора x_k^* и y^* есть решения задач (5)–(7) и (8) соответственно и выполнены балансовые условия

$$\sum_k x_k^* \le y^*, \quad p^* \sum_k x_k^* \le p^* y^* . \tag{9}$$

При этом p^* называется вектором равновесных цен, а набор $x_k^*{}_1^m, y^*$ – равновесным планом или равновесным состоянием. При этом не каждый набор $\beta_k(p)$ совместим с (9). При больших доходах и желании их полностью потратить равновесие не всегда существует.

Чтобы обеспечить существование равновесия, часто вводят условие

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k(p) = \max_{y \in Y} py,\ \ \forall p \ge 0\,. \tag{10}$$

Выражение (10) выполняется для равновесных цен, в противном случае выбранный вектор предложения не обязательно реализуется полностью, и, значит, фактическая выручка может быть меньше планируемой, а сумма поступлений потребителей – меньше стоимости предлагаемых благ.

Поэтому наряду с (10) используется условие:

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k(p) = \max_{y \in Y} py \quad \text{если} \quad \max_i p_i \ge \pi^0,\ p = (p_i) \ge 0\,, \tag{11}$$

где π^0 – константа. Согласно (11) денежные поступления потребителей не больше прибыли системы, если хотя бы одна из цен достаточно велика.

МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА-ОБМЕНА ТИПА ЭРРОУ–ДЕБРЕ

В линейной модели производства-обмена типа Эрроу–Дебре производители затрачивают ограниченные ресурсы при выпуске товаров, которые в некоторой пропорции распределяются между потребителями. Они приобретают товары, максимизируя свои функции полезности. При этом цены на продажу-покупку товаров должны быть равновесными. Имеется n продуктов, выпускаемых l производителями и используемых m потребителями.

Здесь i -й участник является потребителем при $i \in I = \{1, ..., m\}$, а k -й участник выступает как производитель при $k \in K = \{m+1, ..., m+l\}$.

Участник $s \in S = \{1, ..., m+l\} = IU \quad K$ выбирает стратегию $x^s = \{x_1^s, ..., x_n^s\}$, где x_n^s – объем товара, который он планирует выпустить или потребить. При этом k-й производитель на единицу j-го продукта тратит ресурс в объеме c_j^k.

Затраты $\sum_j c_j^k x_j^k = \langle c^k, x^k \rangle$ ресурса не должны превосходить некоторую величину ξ_k. Реализация произведенного товара x_j^k по ценам p_j дает доход $\langle p, x^k \rangle = \sum_j p_j x_j^k$. Стратегия x^k выпуска и реализации товаров должна максимизировать величину дохода, т. е. вектор x^k должен удовлетворять:

$$\left.\begin{aligned} &\max \sum_j p_j x_j^k, \\ &\sum_j c_j^k x_j^k \le \varepsilon_k, \\ &x_j^k \ge 0, \forall k \in K, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}\right\}$$

Пусть оптимальное значение, или *оптимум* целевой функции, этой задачи есть $\varphi_k(p)$. Предполагается, что доход производителя $\varphi_k(p)$ целиком распределяется между потребителями как источниками дохода по заданной системе коэффициентов θ_k^i – доли i-го потребителя в доходе k-го производителя:

$$\sum_i \theta_k^i = 1, \ k \in K,$$

$$\theta_k^i \ge 0, \quad k \in K, \quad i \in I.$$

В итоге потребитель i получает денежный ресурс в объеме $\sum \theta_k^i \varphi_k(p)$, который он расходует на покупку товаров в объеме x_j^i, максимизируя полезность получаемого набора товаров, выражаемую

$$\sum_j c_j^i x_j^i = \langle c^i, x^i \rangle.$$

В данной модели i -й потребитель выбирает свой план x_i из решения задачи

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_j c_j^i x_j^i, \\ \sum\limits_j p_j x_j^i \le \sum\limits_k \theta_k^i \varphi_k(p), \\ x_j^i \ge 0,\ \forall i \in I. \end{array}\right\}$$

Из решения этой задачи требуется найти такую систему цен $p_j = p_j^*$, *чтобы среди оптимальных решений задач нашлись такие* x^{s*}, *что:*

$$\sum_{i \in I} x^{i*} = \sum_{k \in K} x^{k*} .$$

Цены p_j^* называются равновесными, а пара p^*, x^{s*} , $s \subset S$ – состоянием равновесия. Очевидно, что модель Эрроу–Дебре есть обратная задача МП.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. *Дубров А.М. и др.* Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: учеб. пособие / под ред. Б.А. Лагоши. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 223 с.

2. *Печерский С.Л.* Теория игр для экономистов. Вводный курс : учеб. пособие / С.Л. Печерский, А.А. Беляева ; Европ. ун-т в СПб., фак. экономики. – СПб. : Изд-во Европ. Ун-та , 2001. – 342 с.

3. *Касич С.П.* Экономические приложения теории игр в задачах и упражнениях по курсу «Теория отраслевых рынков» : учеб. пособие / под ред. В.М. Гильмундинова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 77 с.

4. *Арсеньев Ю.Н. Шелобаев С.И., Давыдова Т.Ю.* Принятие решений. Интегрированные интеллектуальные системы: учеб. пособие для вузов. – М.: Юнити , 2003. – 269 с.

5. *Шегал Б.Р.* Принятие решений при проектировании АСОИУ: учеб. пособие. – Новосибирск : Изд-во НГТУ , 2005. – 53 с.

Дополнительный

1. *Абчук В.А.* Математика для менеджеров и экономистов: учебник. – СПб.: Изд-во В.А. Михайлова , 2002. – 524 с.

2. *Айзекс Р*. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967.

3. *Балдин К.В., Быстров О.Ф.* Математические методы в экономике: Теория, примеры, варианты контрольных работ: учеб. пособие / Рос. акад. образования, Моск. психолог.-соц. ин-т. – М.: Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та; Воронеж: МОДЭК, 2003. – 112 с.

4. *Бережная Е.В., Бережной В.И.* Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 367 с.

5. *Берж К*. Общая теория игр нескольких лиц. – М.: ИФМЛ, 1961.

6. Бесконечные антагонистические игры / под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1963.

7. *Блекуэл Д., Гиршик М.* Теория игр и статистических решений. – М.: ИЛ, 1958.

8. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. учеб. пособие для студ. втузов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.

9. *Волков И.К.* Исследование операций: учебник для втузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 435 с.

10. *Воробьев Н.Н.* Математическая теория игр. – Л.: Знание, 1963.

11. *Воробьев Н.Н.* Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.

12. *Грень Е.* Статистические игры и их применение. – М.: Статистика, 1975.

13. *Данилов В.И.* Лекции по теории игр / КЛ / 2002 / 001. – М.: Российская экономическая школа, 2002. – 122 с.

14. *Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В.* Математические методы в экономике: учебник / под общ. ред. А.В. Сидоровича. – 2-е изд. – М.: Дело и Сервис, 1999.

15. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ. – М., 1975.

16. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера. – М., 1997.

17. *Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И.* Математические методы и модели в планировании. – М., 1987.

18. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964.

19. *Коваленко А.А.* Сборник задач по теории игр. – Львов: Вища школа; Изд-во при Львов. ун-те, 1974.

20. *Колбин В.В., Сыроежин И.М.* Анализ деловой игры с применением ЭВМ // Экономика и математические методы, 1969. – Т. 5. – Вып. 1.

21. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике: учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2000. – 207 с.

22. *Крапивин В.Ф.* Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. – М.: Сов. радио, 1972.

23. *Красс М.С., Чупырнов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник для вузов по экон. спец. и направлениям. – М.: Дело, 2002. – 688 с.

24. *Крушевский А.В.* Элементы теории матричных игр. – КВИРТУ, 1960.

25. Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. статей / под ред. Г.У. Куна и А.У. Таккера. – М.: ИЛ, 1959.

26. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь. – М.: Дело, 2003.

27. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. – М.: ИЛ, 1961.

28. *Мак-Кинс и Д.* Введение в теорию игр. – М.: Физматгиз, 1960.

29. Матричные игры / под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1961.

30. *Монахов А.В.* Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002.

31. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики: пер. с франц. – М.: Мир, 1985. – 200 с.

32. *Оуэн Г.* Теория игр. – М.: Мир, 1971.
33. *Пинегина М.В.* Математические методы и модели в экономике. – М.: Экзамен, 2002.
34. Позиционные игры / под ред. Н.Н. Воробьева, И.Н. Врублевской. – М.: Наука, 1967.
35. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений в экономике: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2002. – 286 с.
36. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие / под ред. В.И. Ермакова; Рос. экон. акад. им. Г.В. Плеханова. – М.: ИНФРА-М, 2004.
37. *Сыроежин И.М.* Очерки теории производственных организаций. – М.: Экономика, 1970.
38. *Федосеев В.В. Гармаш А.Н. Дайитбегов Д.М. и др.* Экономико-математические методы и модели в маркетинге: учеб. пособие для вузов / под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 387 с.
39. *Хазанова Л.Э.* Математические методы в экономике. – 2-е изд., исп. и перераб. – М.: БЕК, 2002.
40. Экономико-математический энциклопедический словарь / гл. ред. В.И. Данилов–Данильян. – М.: Большая Рос. Энцикл.: ИНФРА-М, 2003.
41. Экономическая кибернетика / под ред. И.М. Сыроежина, ч. 2. – Л., 1973(ПФЭИ).

Самков Тимур Леонидович

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Курс лекций

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Подписано в печать 20.12.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 6,27. Печ. л. 6,75. Изд. № 173. Заказ №
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20