Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра математики

Владимир Иванович Грибков

МАТЕМАТИКА.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Электронное учебное пособие

Кемерово 2016

УДК 51(075.8)(086.76)+519.21(075.8)(086.76)

Рецензент(ы) Фадеев Ю. А. – доктор технических наук, профессор кафедры математики КузГТУ

Грибков В. И. **Математика. Теория вероятностей** [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов инженерно-технических направлений / В. И. Грибков; КузГТУ. – Кемерово, 2016. – 1 оптический диск (1,9 Мб)

Предназначено для организации практических занятий и самостоятельной работы студентов второго курса по разделу «Теория вероятностей» учебного предмета «Математика». Основное содержание работы представляет собой разбор базовых понятий теории вероятностей на примере решений большого числа практических заданий. Приведены задания для самостоятельной работы и тестовые задания для контроля знаний студентов. В конце пособия размещены таблицы, систематизирующие знания по темам, а также необходимые для проведения расчётов.

Текстовое (символьное) электронное издание

Минимальные системные требования:	Частота процессора не менее 1,0 ГГц; ОЗУ 512 Мб; 20 Гб HDD; операционная система Windows XP; CD-ROM 4-скоростной; ПО для чтения файлов PDF-формата; SVGA-совместимая видеокарта; мышь.

Вперед→

Сведения о программном обеспечении, которое использовано для создания электронного издания	MS Word
Сведения о технической подготовке материалов для электронного издания	Редактор З. М. Савина
Объем издания в единицах измерения объема носителя, занятого цифровой информацией (байт, Кб, Мб)	1,9 мегабайта
Наименование и контактные данные юридического лица, осуществившего запись на материальный носитель	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева» 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28 Тел./факс: 8(3842) 58-35-84

Оглавление

Данное методическое издание соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Математика» для студентов технических и экономических специальностей технических университетов.

Цель пособия: помочь студентам в освоении курса теории вероятностей – в приобретении навыков при решении задач этого курса, подготовке к тестам и, как следствие, к более качественному усвоению основных понятий и методов.

Основное содержание работы представляет собой разбор базовых понятий теории вероятностей на примере решений большого числа практических заданий. Приведены задания для самостоятельной работы и тестовые задания для контроля знаний студентов. В конце пособия размещены таблицы, систематизирующие знания по темам, а также необходимые для проведения расчётов.

Пособие состоит из трех частей:

Случайные события,

Случайные величины,

Совместные распределения.

ЧАСТЬ 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Первая часть предлагаемого издания направлена на проработку тем понятия «*случайное событие*»:

1. *Пространство элементарных исходов эксперимента*.
2. *Классическая формула вероятности*.
3. *Геометрическая вероятность.*
4. *Алгебра событий.*
5. *Вероятность произведения и суммы событий.*
6. *Формулы полной вероятности и Байеса.*
7. *Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа*.

Наряду с разбором типовых задач, предлагаются контрольные вопросы, тестовые задания и задачи для самостоятельного решения по темам.

ТЕМА 1.1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ

Основные понятия: случайный эксперимент (испытание), исход случайного эксперимента, пространство исходов, случайное событие, вероятность события, невозможное событие, достоверное событие, противоположные события.

Литература: [1] – гл. 1, §1, 2, 6.

Пример 1.1.1. Случайный эксперимент состоит в однократном подбрасывании игральной кости. Записать пространство элементарных событий (исходов) этого эксперимента и событий A, B, C и D, где A – «выпало четное число очков»; B – «число очков есть простое число»; C – «число очков кратно трем»; D – «выпало одно очко». Записать событие, противоположное A. Какие из перечисленных событий являются несовместными? Какие события образуют полную группу? Привести пример невозможного и достоверного событий. Найти вероятности событий A, B, C, D.

Решение. Пространство элементарных событий (исходов) случайного эксперимента представляет собой множество: $\{1,2,3,4,5,6\}$. Событию A соответствуют три исхода: выпадение 2, 4 или 6 очков; событие B реализуется при выпадении 2, 3 или 5 очков, событие C − при выпадении 3 или 6 очков; событие D состоит из одного исхода, при выпадении 6 очков реализуются одновременно события A и C, эти события совместны. События A и D несовместны, так как не могут произойти одновременно. Событие, противоположное A, $\overline{A}$ – выпадение нечетного числа очков. События A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий, так сумма их исходов образует пространство событий эксперимента. Достоверное событие: выпадение 1,2,3,4,5 или 6 очков – это событие обязательно наступит в результате проведения эксперимента. Невозможное событие: выпадение, например 7 очков – это событие не может реализоваться при проведении эксперимента.

Найдем вероятности событий $A, B, C, D, \overline{A}$. Из определения вероятности события следует, что сумма вероятностей всех исходов случайного эксперимента равна 1. Если все исходы эксперимента равновозможны (т.е. равновероятны), то на каждый исход приходится вероятность, равная $1/n$, где n – число всех исходов эксперимента. В эксперименте с подбрасыванием кости число исходов равно 6, следовательно, на один исход приходится вероятность, равная $1/6$. Вероятность события равна сумме вероятностей всех исходов, составляющих данное событие. Тогда $P(A)=3/6=1/2$, $P(B)=3/6=1/2$, $P(C)=2/6=1/3$, $P(D)=1/6$, $P(\overline{A})=3/6=1/2$. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ можно найти через вероятность события A: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Пример 1.1.2. Случайный эксперимент: подбрасываются две монеты. Записать пространство событий этого эксперимента и события: $A-$монеты упали одинаково, $B-$выпал хотя бы один герб. Записать событие, противоположное B. Найти вероятности этих событий.

Решение. Если нас интересует, каким образом выпали монеты, гербом или цифрой, то пространство событий можно представить в виде множества: $\{гг, гц, цг, цц\}$. Событие A состоит из двух исходов $A=\{гг, цц\}$; событие $B=\{гг, гц, цг\}$; событие, противоположное B, $\overline{B}=\{цц\}$.

Исходы эксперимента равновероятны, следовательно, на один исход приходится вероятность, равная $1/4$. Тогда $P(A)=2/4=1/2$, $P(B)=3/4$, $P(\overline{B})=1/4$.

Если нас интересует, сколько выпало «гербов» и «цифр», то множество всех исходов можно записать в виде $\{(2,0);(1,1);(0,2)\}$. В этом пространстве исходы не равновероятны, так как исходам $(2,0);(0,2)$ соответствуют вероятности, равные $1/4$, а вероятность исхода $(1,1)$ равна $1/2$.

Замечание. Пространство событий случайного эксперимента не всегда имеет конечное число исходов. Например, в эксперименте: монета бросается до первого выпадения герба. Пространство событий этого эксперимента можно представить в виде множества $\{г, цг, ццг, цццг, ...\}$. В этом случае исходы эксперимента также не являются равновероятными.

Пример 1.1.3. Случайный эксперимент: монета бросается до выпадения герба. Построить пространство событий этого эксперимента.

Решение. Все исходы эксперимента можно представить в виде множества $\{г, цг, ццг, цццг, ...\}$. В этом случае число возможных исходов бесконечно, и они не являются равновозможными.

Задание. Чтобы лучше понять, что такое вероятность события, проведите 10 серий испытаний, каждая из которых состоит из 100 подбрасываний игральной кости. В каждой такой серии вычислите относительную частоту события $A-$выпадение 1 очка и найдите среднюю частоту события по всем сериям. Сравните ее с вероятностью этого события. Закон больших чисел утверждает, что относительная частота наступления события должна быть близка к вероятности этого события при многократном повторении эксперимента.

Замечание. В условиях задач иногда приводятся значения вероятностей некоторых событий. В реальной жизни утверждения вида «вероятность попадания стрелка в цель равна 0,6» отсутствуют. В этом случае значение вероятности оценивается по значению относительной частоты события на основе эксперимента. Утверждение «вероятность попадания стрелка в цель равна 0,6» означает, что в длинной серии испытаний, каждая из которых состоит, например, из 100 выстрелов, среднее число попаданий равно 60.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.1

1. В каких из следующих примеров указаны все возможные исходы испытания: *а*) выигрыш, проигрыш в шахматной игре; *б*) выигрыш, проигрыш встречи по баскетболу; *в*) выпадение герба – герба, цифры – герба, цифры – цифры (в указанном порядке) при двукратном подбрасывании монеты.
2. Образуют ли события «на обеих монетах выпала цифра», «на обеих монетах выпал герб» множество всех исходов при бросании двух монет? Какие события нужно добавить к этим двум, чтобы получить полное множество исходов?
3. Бросается три монеты. Записать все исходы этого случайного эксперимента. Какие исходы соответствуют событиям: $A-$монеты упали одинаково, $B-$выпал хотя бы один герб. Записать исходы, соответствующие событию $\overline{B}$.
4. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб, или, пока четыре раза не выпадет цифра. Перечислите все

исходы этого эксперимента. Какие исходы соответствуют событиям: A – монета подброшена 4 раза, B – цифра выпала менее трех раз? Являются ли исходы этого эксперимента равновозможными?

5. Бросается две игральные кости. Выпишите все исходы этого эксперимента. Какие исходы соответствуют событиям: A – выпало четное число очков, B – число очков нечетно, C – выпал дубль, D – сумма очков меньше четырех.

ТЕМА 1.2. КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ВЕРОЯТНОСТИ

Основные понятия:

- равновозможные (равновероятные) исходы
- событие и благоприятные исходы
- правила произведения и суммы
- размещения (без и с повторениями)
- перестановки (без и с повторениями)
- сочетания (без и с повторениями)

Литература: [1] – гл. 1, §3, 4, 5.

Если все элементарные исходы случайного эксперимента равновероятны, как, например, при подбрасывании игральной кости или монеты, вероятность события пропорциональна числу исходов m, составляющих данное событие

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

где $n-$общее число исходов эксперимента, а $m-$число исходов, составляющие событие A или число благоприятных исходов.

Для события, противоположного событию A, события $\overline{A}$, которое наступает, если событие A не реализуется в результате проведения эксперимента, имеем

$$P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A) \tag{2}$$

При решении задач формула (2) часто дает возможность более рационального решения, если вероятность события $\overline{A}$ вычисляется проще, чем вероятность события A.

Часто исходы эксперимента представляют собой комбинации различных элементов. Например, номер телефона – это набор 7 из 10 цифр, трехзначное число – упорядоченная комбинация трех из 10 цифр и т.д. В этом случае для вычисления числа исходов в формуле (1) используются формулы и основные правила комбинаторики: правило произведения и правило суммы.

Правило произведения: если нужно последовательно выполнить k действий, и первое из них можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами, и т.д. и действие под номером k –

n_k способами, то все k действия можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Правило суммы: если нужно выполнить одно из двух взаимоисключающих действий, и первое из них можно выполнить n_1 способами, а второе – n_2 способами, то одно из них можно выполнить $n_1 + n_2$ способами. Это правило можно распространить на любое число действий.

Пример 1.2.1. Из телефонного справочника случайным образом выбирается номер телефона, состоящий из 6 цифр. Найти вероятности следующих событий: $A-$все цифры в номере различны, $B-$номер состоит только из единиц и троек, $C-$из четырех единиц и двух троек, $D-$две цифры в номере четны, остальные нечетны.

Решение. Исходами этого эксперимента являются различные комбинации из шести цифр. При этом первая цифра в этих комбинациях не равна нулю и порядок цифр имеет значение. Так как все исходы эксперимента равновероятны, то воспользуемся классической формулой вероятности (1).

Общее число исходов $n = 9 \cdot \overline{A}_{10}^{5} = 9 \cdot 10^5$. Здесь мы использовали правило произведения: сначала выбираем перовую цифру номера из 9, затем из всех имеющихся 10 цифр выбираем остальные 5 цифр номера, учитывая, что они могут повторяться.

Число исходов, составляющих событие A: $m_A = 9 \cdot A_9^5 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (первую цифру номера выбираем из 9, затем остальные 5 из 9 оставшихся, учитывая, что цифры в номере не повторяются).

Число исходов, составляющих событие B: $m_B = \overline{A}_2^6 = 2^6$ (выбираем все цифры номера из двух, при этом они могут повторяться)

Для события C: $m_C = \overline{P}_{6,4,2} = \dfrac{6!}{4!2!} = 30$ (число перестановок множества, содержащего два типа элементов). Заметим, что в случае, когда перестановки содержат только два типа элементов, число перестановок $\overline{P}_{r,k,r-k} = \dfrac{r!}{k!(r-k)!}$ совпадает с числом сочетаний из r по k элементов, C_r^k.

Событие D: $m_D = m_1 + m_2 = 5 \cdot \overline{A}_5^2 \cdot \overline{A}_5^3 + 4 \cdot 5 \cdot \overline{A}_5^4 = 28125$. Здесь мы использовали правило суммы для двух взаимоисключающих действий, так как первая цифра номера может быть нечетной (число таких исходов равно m_1) или четной, но не нулем (с числом исходов m_2).

Тогда вероятности событий:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{136080}{900000} = 0.015, \qquad P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{64}{900000} = 0.00007,$$

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{30}{900000} = 0.00003, \qquad P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{28125}{900000} = 0.031.$$

Пример 1.2.2. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наудачу извлекаются два. Найти вероятности событий: $A-$оба шара белые; $B-$первый шар черный, второй белый; $C-$один шар белый, другой черный,

Решение. Исходами этого эксперимента являются различные комбинации двух шаров. Общее число таких исходов равно числу сочетаний из 5 элементов по 2, $n = A_5^2 = \dfrac{5!}{3!} = 20$. Здесь мы используем размещения, так как различаем, например комбинации: «черный-белый» и «белый-черный». При этом все исходы эксперимента равновероятны, следовательно, можно воспользоваться классической формулой вероятности.

Число исходов, составляющих событие A: $m_A = A_3^2 = 6$, так как два белых шара могут быть извлечены из трех белых. Число исходов, составляющих событие B: $m_B = C_3^1 C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6$. Здесь мы использовали правило произведения: число способов извлечь белый шар умножили на число способов извлечь черный шар. Кроме того, использовали сочетания, так как порядок шаров уже учли порядком множителей C_3^1 и C_2^1. Число исходов, составляющих событие C, найдем, используя и правило произведения и правило суммы, $m_C = C_3^1 C_2^1 + C_2^1 C_3^1 = 12$, так как возможно, что первый шар белый, второй черный или, наоборот, первый черный, второй белый. Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{6}{10}.$$

Пример 1.2.3. Колода для игры в покер состоит из 52 карт. Каждый игрок получает на руки 5 карт. Найти вероятности следующих комбинаций карт одного игрока:

a) *флешь-рояль* (десять, валет, дама, король, туз одной масти);
b) *каре* (4 карты одного и того же достоинства и одна любая карта);
c) *фул* (3 карты одного достоинства и 2 карты другого достоинства);
d) *флешь* (5 карт одной масти).

Решение. Исходами случайного эксперимента (раздача карт) здесь являются различные комбинации из пяти карт. Общее число всех исходов равно числу сочетаний из 52 карт по 5, $n = C_{52}^5 = \frac{52!}{5!47!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2\,598\,960$. Здесь мы используем сочетания, так как порядок карт при игре не важен. Все исходы эксперимента равновероятны.

A) $m_1 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$. Есть 4 способа выбрать масть, одну из 4, а затем по одному способу выбрать обозначенные карты этой масти.

B) $m_2 = 13 \cdot 48 = 624$. Карты одного достоинства – это, например, двойки, короли и т.д. Всего имеем 4 карты каждого достоинства. Тогда есть 13 способов выбрать 4 карты одного достоинства и 48 способов выбрать одну карту из оставшихся 48.

C) $m_3 = 13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2 = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744$. Выполняем последовательно 4 действия: сначала выбираем 4 карты одного достоинства (13 способов), из этих 4 карт выбираем 3, затем 4 карты другого достоинства из оставшихся 12 и из них выбираем 2 карты.

D) $m_4 = 4 \cdot C_{13}^5 = 4 \cdot \frac{13!}{5!8!} = 5148$. Выбираем масть, затем из 13 карт этой масти выбираем 5 карт.

Вероятности этих комбинаций равны соответственно

$$P(1) = \frac{1}{2598960} = 0.0000015, \quad P(2) = \frac{624}{2598960} = 0.00024,$$

$$P(3) = \frac{3744}{2598960} = 0.0014, \quad P(4) = \frac{5148}{2598960} = 0.002.$$

Колода для игры в покер содержит еще два джокера, но мы не учли этого обстоятельства. Кроме того, мы рассмотрели не все комбинации карт покера.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.2

1. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наудачу извлекается один шар. Найти вероятности событий: $A-$шар белый $B-$ шар черный.
2. Из букв слова «уравнение» случайным образом извлекается одна буква. Какова вероятность того, что она: *а*) гласная; *б*) согласная;
   в) буква «е»; *г*) буква «с»?
3. Цифры 1,2,3,4,5 пишутся на 5 карточках. Случайным образом выбираются три карточки. Определить вероятности следующих событий: $A-$трехзначное число, составленное из выбранных цифр четно; $B-$нечетно; $C-$делится на 5; $D-$на двух выбранных карточках цифры нечетны.
4. Слово «книга», собранное из букв разрезной азбуки рассыпано и собрано снова. Какова вероятность того, что вновь собранное слово «книга»?
5. Слово «*алгебра*», собранное из букв разрезной азбуки рассыпано и собрано снова. Какова вероятность того, что вновь собранное слово «*алгебра*»?
6. Из букв слова «статистика» случайным образом выбирается 5 букв и составляется в ряд. Какова вероятность того, что полученное слово «такси»?
7. Полная колода карт делится на две равные части. Найти вероятность того, что: *а*) в каждой по два туза; *б*) один и три туза.

ТЕМА 1.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Литература: [1] – гл. 1, §8.

Если пространство событий содержит бесконечное множество исходов эксперимента и ему можно поставить в соответствие некоторое геометрическое пространство, то вероятность события A:

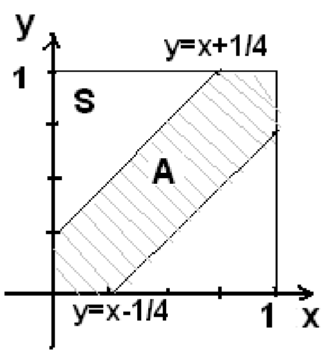
$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(S)}. \qquad (3)$$

где S – пространство событий, $mes(A)$ – мера события A, $mes(S)$ – мера всего пространства событий, Под мерой понимается: в одномерном пространстве – длина; в двумерном пространстве – площадь; в трехмерном пространстве – объем.

Пример 1.3.1. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в круг, попадет в этот треугольник.

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(S)}=\frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Пример 1.3.2. Два друга договорились о встрече между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут. Какова вероятность их встречи?



Решение. Обозначим: x – время прихода одного из друзей, y – другого; события: A – встреча состоялась, S – событие $A+\overline{A}$ (пространство событий). Событию S на рисунке соответствует квадрат со стороной, равной 1, следовательно, $mes(S)$ равна его площади, т.е. равна 1. Так как каждый ждет другого не более 15 минут, $|x-y|\le 1/4$. Решением этого неравенства является область A. Площадь этой области есть мера события A, $mes(A)=7/16$. Тогда $P(A)=7/16$.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.3

1. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты – красный. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?
2. Какова вероятность, не целясь бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их осями равно l $(l > a)$?
3. В условиях задачи 2 найти вероятности событий $B-$ встреча состоялась после 11 часов 30 минут; $C-$встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут.
4. Внутри квадрата с вершинами $(0,0)(0,1),(1,0),(1,1)$наудачу выбирается точка $M(x,y)$. Найти вероятность события $A: x^2 + y^2 \le a^2, a > 0$.
5. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и любое значение равновозможно в течение данных суток. Какова вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки пароходов 1 час?

ТЕМА 1.4. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Основные понятия:

- сумма или объединение событий
- произведение или пересечение событий
- несовместимые события
- противоположные или дополнительные события
- независимые события

Литература: [1] – гл. 2, §1; гл. 3, §1.

Часто бывает удобно представить интересующее нас событие, как комбинацию (произведение или сумму) двух или большего числа событий. Это позволяет, используя знание вероятностей одних событий, определить вероятности других событий.

Пример 1.4.1. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель. Обозначим события A_i – попадание *i*-го стрелка. Запишем через A_i события: A – все три попадания, B – все три промаха, C – хотя бы одно попадание, D – хотя бы один промах, M – не менее двух попаданий, F – не более одного попадания, G – попадание не раньше третьего выстрела, H – ровно одно попадание, K – ровно два попадания.

Решение. $A = A_1A_2A_3$, $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $C = A_1 + A_2 + A_3$,

$D = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$, $M = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$,

$F = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $G = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,

$H = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $K = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.

Пример 1.4.2. На рисунке изображены электрические схемы. Выключатели изображены кружками, в которых указан номер выключателя. Запишем через события A_k – «выключатель под номером k включен» для каждой схемы события: A – «ток идет», $\overline{A}$ – «ток не идет».

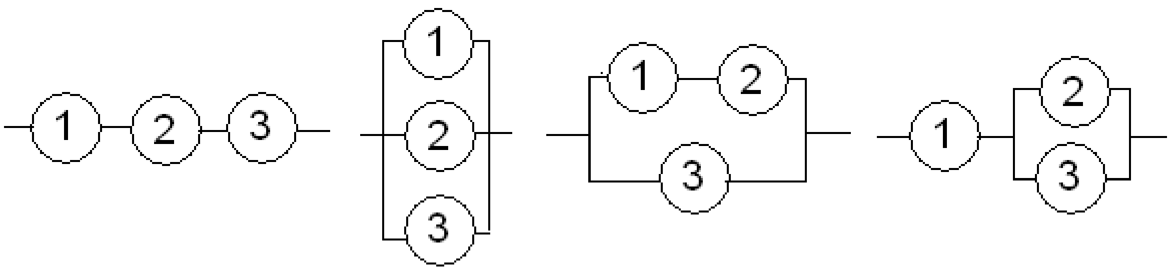


Схема 1. Схема 2. Схема 3. Схема4.

Рис. 1

Решение.

Схема 1: $A = A_1 A_2 A_3$, $\overline{A} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$.

Схема 2: $A = A_1 + A_2 + A_3$, $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

Схема 3: $A = \left(A_1 A_2\right) + A_3$, $\overline{A} = \left(\overline{A_1} + \overline{A_2}\right)\overline{A_3}$.

Схема 4: $A = A_1\left(A_2 + A_3\right)$, $\overline{A} = \overline{A_1} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

Здесь мы учли, что при последовательном включении элементов схемы ток идет только при условии, что все они включены, а при параллельном их соединении достаточно, чтобы был включен хотя бы один элемент.

Сумму, произведение событий и противоположное событие хорошо демонстрируют диаграммы Вена. **Диаграмма Эйлера-Вена** – это рисунок, содержащий все множество возможных исходов в виде прямоугольника, с размещенными в нем событиями в виде кругов, овалов или других фигур. Каждая точка внутри прямоугольника представляет собой возможный исход. Каждое выполнение случайного эксперимента приводит к случайному выбору одной из точек. Если эта точка попадает в обозначающий событие круг, то это событие произошло.

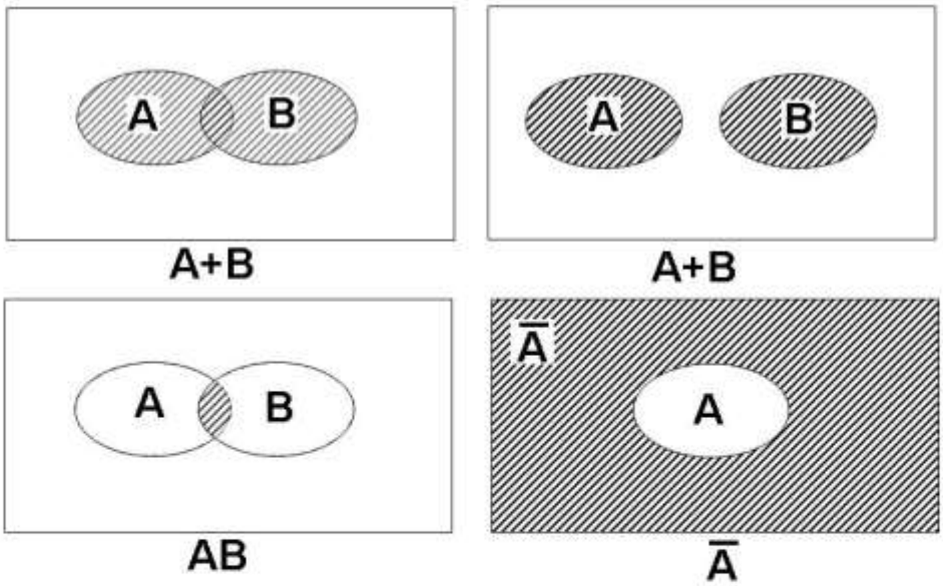
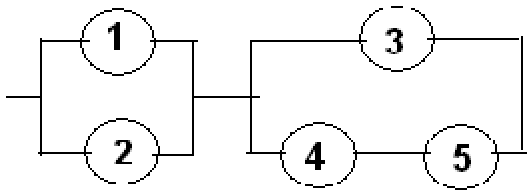


Рис. 2. Диаграммы Эйлера-Вена

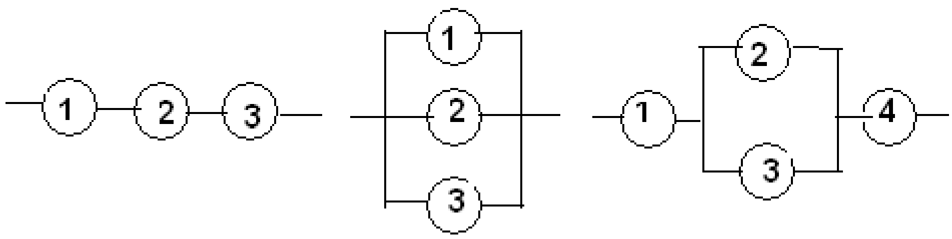
Задачи для самостоятельного решения по теме 1.4

1. Бросили медную и серебряную монеты. Обозначим события: $A-$герб выпал на медной монете; $B-$цифра выпала на медной монете; $C-$герб выпал на серебряной монете; $D-$ цифра выпал на серебряной монете; $M-$выпал хотя бы один герб; $F-$выпала хотя бы одна цифра; $G-$выпал один герб и одна цифра; $H-$не выпало ни одного герба; $K-$выпало два герба. Каким событиям из этого списка равны события: $A+C$, AC, MF, $G+M$, GM, BD, $M+K$?
2. Прибор состоит из двух блоков. Первый блок состоит из двух однотипных деталей и работает при исправности хотя бы одной из них. Второй блок состоит из трех однотипных деталей и работает при исправности хотя бы двух из них. Выразите через события A_i-исправна $i-$я деталь первого блока, $i=1,2$ и B_j-исправна $j-$я деталь второго блока, $j=1,2,3$, следующие события: $A-$работает первый блок; $B-$работает второй блок; $C-$первый блок не работает, $D-$второй блок не работает; $F-$прибор работает; $H-$прибор не работает.
3. Пусть $A,B,C-$три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить через них следующие события: $E-$из трех событий A,B,C произойдет ровно одно; $F-$ хотя бы одно; $G-$хотя бы два.

4. На рисунке изображена электрическая схема. Выключатели изображены кружками, в которых указан номер выключателя. Запишем через события A_k – «выключатель под номером k включен», $k = 1,2,3,4,5$ события: A – «ток идет», $\overline{A}$ – «ток не идет».



5. Какова вероятность отказа приборов, блок-схемы которых изображены на рисунке?



ТЕМА 1.5. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Основные понятия и формулы:

- условная вероятность
- вероятность произведения двух и более событий
- вероятность произведения независимых событий
- вероятность суммы двух и более событий
- вероятность суммы несовместимых событий
- вероятность наступления хотя бы одного события

Литература: [1] – гл. 2, §1, 2, 3; гл. 3.

Условная вероятность события A при условии наступления события B

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{4}$$

Вероятность произведения двух событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \tag{5}$$

И то же самое для независимых событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \tag{6}$$

Формулы 5 и 6 используются для вычисления вероятности совместного появления событий A и B. Их можно обобщить на случай трех и более событий. Например, вероятность совместного наступления трех событий равна

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/AB).$$

Вероятность суммы двух событий A и B

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{7}$$

Для несовместимых событий A и B

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{8}$$

Для противоположного события

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right) \tag{9}$$

Вероятность наступления хотя бы одного события:

$$P(A+B+C)=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}) \tag{10}$$

Пример 1.5.1. Подбрасывается игральная кость. События: $A-$число очков есть простое число, $B-$число очков четно. Вычислить условную вероятность $P(A/B)$.

Решение. Воспользуемся формулой (4). Вероятность совместного наступления событий A и B $P(AB)=1/6$, так как только на одной грани из шести число очков одновременно четно и является простым числом, $P(B)=3/6=1/2$. Тогда $P\left(A/B\right)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1/6}{1/2}=\dfrac{1}{3}$.

Пример 1.5.2. Вернемся к примеру 1.4.1 со стрельбой по цели тремя стрелками. Пусть вероятность попадания для первого стрелка равна $p_1=0.9$, для второго – $p_2=0.8$, и для третьего $p_3=0.7$. Тогда вероятности промахов для стрелков равны соответственно $q_1=1-p_1=0.1$, $q_2=1-p_2=0.2$, $q_3=1-p_3=0.3$. Определим вероятности событий A, B, C, D, G, H, K.

Решение. $P(A)=P\left(A_1A_2A_3\right)=p_1p_2p_3=0.9\cdot 0.8\cdot 0.7=0.504$.

$P(B)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=q_1q_2q_3=0.1\cdot 0.2\cdot 0.3=0.006$. Здесь мы воспользовались формулой умножения вероятностей для трех независимых событий. Очевидно, что вероятность попадания каждого из стрелков не зависит от того, насколько точно стреляют остальные.

Для вычисления вероятности события $C=A_1+A_2+A_3$ (попадание хотя бы одного стрелка) можно воспользоваться формулой 7. Для трех совместимых событий она достаточно громоздка, и гораздо удобнее воспользоваться формулой для вероятности противоположного события. Учтем, что событие $\overline{C}$ совпадает с B.

Тогда $P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=1-0.006=0.994$.

Аналогично, для события D, учитывая, что $\overline{D}=A$, получим

$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-P\left(A_1A_2A_3\right)=1-0.504=0.496$.

$P(G)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=q_1q_2p_3=0.1\cdot 0.2\cdot 0.7=0.014$.

Вероятность ровно одного попадания H вычислим, используя формулу сложения вероятностей для несовместимых событий $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, учитывая, что каждое из них есть произведение трех независимых событий.

$$P(H)=P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3=$$
$$=0.9\cdot 0.2\cdot 0.3+0.1\cdot 0.8\cdot 0.3+0.1\cdot 0.2\cdot 0.7=0.072.$$
Аналогично, для вероятности ровно двух попаданий K получим
$$P(K)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3\right)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3=$$
$$=0.9\cdot 0.8\cdot 0.3+0.9\cdot 0.2\cdot 0.7+0.9\cdot 0.8\cdot 0.3=0.561.$$

Предлагаем вам, используя формулы сложения и умножения вероятностей, самостоятельно найти вероятности событий M, F.

Пример 1.5.3. Пусть каждый из элементов схем 1, 2, 3, 4 примера 1.4.2 включен с вероятностью 0.7, и все элементы работают независимо друг от друга. Найти вероятности событий A и $\overline{A}$ для каждой схемы.

Решение. 1-я схема: $P(A)=P\left(A_1A_2A_3\right)=0.7^3=0.343$,
$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}\right)=3\cdot 0.3-3\cdot 0.3^2+0.3^3=0.657\text{, или}$$
$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0.343=0.657.$$
2-я схема: $P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=0.3^3=0.027$,
$$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0.027=0.973.$$
3-я схема: $P\left(A\right)=P\left(\left(A_1A_2\right)+A_3\right)=0.7^2+0.7-0.7^3=0.847$,
$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\left(\overline{A_1}+\overline{A_2}\right)\overline{A_3}\right)=\left(0.3+0.3-0.3^2\right)\cdot 0.3=0.153.$$
4-я схема: $P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=0.3+0.7\cdot 0.3^2=0.237$,
$$P\left(A\right)=P\left(A_1\left(A_2+A_3\right)\right)=0.7\left(0.7+0.7-0.7^2\right)=0.245.$$

Пример 1.5.4. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, наудачу извлекаются два шара. Найти вероятности событий: $A-$оба шара белые; $B-$первый шар черный, второй белый; $C-$один шар белый, другой черный, $D-$хотя бы один шар белый.

Решение. Обозначим события: A_1-первый извлеченный шар белый, A_2-второй белый. Запишем через A_1, A_2 события A,B,C,D: $A=A_1A_2$, $B=\overline{A_1}A_2$, $C=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$, $D=A_1+A_2$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда после извлечения шар в урну не возвращается (выборка без возвращения).
$$P\left(A\right)=P\left(A_1A_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2/A_1\right)=3/5\cdot 2/4=6/20=0.3,$$

$P(B)=P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2/\overline{A_1}\right)=2/5\cdot 3/4=6/20=0.3.$

При вычислении вероятностей событий A и B мы воспользовались формулой произведения вероятностей (5). События A_1, A_2 и $\overline{A_1}, A_2$ не являются независимыми, так как вероятность извлечения белого шара при втором испытании (события A_2) зависит от того, какой шар был извлечен при первом испытании.

Событие C есть сумма двух несовместимых событий, каждое из которых есть произведение зависимых событий.

$$P(C)=P\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=P(A_1)P\left(\overline{A_2}/A_1\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P\left(A_2/\overline{A_1}\right)=$$
$$=3/5\cdot 2/4+2/5\cdot 3/4=12/20=0.6.$$
$$P(D)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=3/5+3/5-3/10=9/10$$

Для вычисления вероятности события D мы воспользовались формулой (15) для суммы совместимых событий, но тот же результат можно получить, используя формулу для вероятности противоположного события $\overline{D}$. $\overline{D}-$в двух последовательных испытаниях не извлечено ни одного белого шара.

$$P(D)=1-P\left(\overline{D}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=1-2/5\cdot 1/4=9/10=0.9,$$

2. После извлечения шар возвращается в урну (выборка с возвращением). В этом случае события $A_1\,A_2$, $A_1\,\overline{A_2}$ и $\overline{A_1}\,A_2$ независимы, и мы воспользуемся формулой произведения вероятностей для независимых событий.

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=3/5\cdot 2/5=6/25=0.24$$
$$P(B)=P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)=2/5\cdot 3/5=6/25=0.24$$
$$P(C)=P\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)+P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)=$$
$$=3/5\cdot 2/5+2/5\cdot 3/5=12/25=0.48.$$
$$P(D)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=$$
$$=3/5+3/5-6/25=24/25=0.96.$$

В части решения 2. для вычисления вероятностей событий $A-C$ в случае выборки без возвращения мы воспользовались формулой классической вероятности, так как все исходы этого эксперимента равновероятны.

Задачи для самостоятельного решения 1.5

1. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.05, в девятку с вероятностью 0.2, а в восьмерку с вероятностью 0.6. Сделан один выстрел. Какова вероятность следующих событий: A – выбито не менее восьми очков; B – выбито более восьми очков.
2. Три поздравительные открытки распложены по конвертам с адресами случайным образом. Найти вероятности событий: A – ни одна открытка не попала в свой конверт, B – хотя бы одна открытка попала в свой конверт, С – ровно одна открытка попала в свой конверт,
3. Монета бросается либо до выпадения герба, либо до четырехкратного выпадения цифры. При условии, что результатом первого бросания была цифра, найти вероятность того, что монета была подброшена 4 раза.
4. Три орудия независимо друг от друга стреляют по цели. Какова вероятность того, что цель будет поражена, если вероятности попадания орудий равны соответственно 0.7, 0.8, 0.9?
5. В мастерской работает три станка. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0.15. Для второго станка эта вероятность равна 0.1, а для третьего 0.12. Найдите вероятность того, что за смену хотя бы один станок потребует наладки.
6. Имеется две урны. В первой 3 белых и два черных шара, во второй 4 белых и два черных. Из каждой урны случайным образом извлекается по шару. Какова вероятность того, что они одного цвета?
7. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, последовательно извлекаются шары. Найти вероятности того, что черный шар впервые появится при первом, втором, третьем, четвертом испытаниях.

ТЕМА 1.6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Основные понятия и формулы:

- полная группа событий и события-гипотезы
- формула полной вероятности
- априорные (доопытные) и апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез
- формула Байеса

Литература: [1] – гл. 4, §1, 2, 3.

Вероятность события A, которое может наступить при условии реализации одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, определяется формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \qquad (10)$$

при этом события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу.

Условные вероятность событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ при условии наступления события A определяется формулой Байеса

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_i P(H_i)P(A/H_i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11)$$

Пример 1.6.1. Магазин закупает оптом половину всех компьютеров у фирмы L, треть – у фирмы M и остальные – у фирмы N. У фирмы L 1% компьютеров с браком, у фирмы M брак составляет 5%, у фирмы N – 2%. Какова вероятность того, что наудачу выбранный в магазине компьютер оказался бракованным?

<u>Решение</u>. Обозначим события: $A-$случайно выбранный компьютер оказался бракованным.

$H_1 -$ компьютер получен от фирмы L, $P(H_1) = 1/2$, вероятность брака компьютера, проданного фирмой L: $P(A/H_1) = 0.01$.

$H_2 -$ компьютер получен от фирмы M, $P(H_2) = 1/3$, вероятность брака компьютера, проданного фирмой M: $P(A/H_2) = 0.05$.

$H_3 -$ от фирмы N, $P(H_3) = 1 - (1/3 + 1/2) = 1/6$, вероятность брака компьютера, проданного фирмой N: $P(A/H_3) = 0.02$.

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$

$$=\frac{1}{2}0.01+\frac{1}{3}0.05+\frac{1}{6}0.02=0.03.$$

В приведенном примере вопрос может быть поставлен иначе. Случайно выбранный компьютер оказался бракованным. Какова вероятность того, что он получен от фирмы L?

По формуле Байеса $P(H_1/A)=\dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\dfrac{0.005}{0.03}=\dfrac{1}{6}$.

Формула Байеса позволяет уточнять вероятность интересующего нас суждения (гипотезы) по некоторой дополнительной информации о появлении или не появлении события, как-то связанного с упомянутым суждением. Такое уточнение позволяет находить более удачное решение. Продемонстрируем это на примере.

Пример 1.6.2. Урна содержит четыре шара, относительно которых известно, что все они белые или два белых и два черных. Из урны случайным образом вынимается шар и обнаруживается, что он белый. Какова вероятность того, что все шары в урне белые?

Решение. Возможны две альтернативные гипотезы: H_1- все шары в урне белые, H_2- в урне два белых и два черных шара. Событие $A-$ вынутый шар белый.

Поскольку нам ничего неизвестно о содержании урн, примем начальные шансы обеих гипотез равными: $P(H_1)=P(H_2)=1/2$. Эти вероятности назовем доопытными или *априорными* вероятностями гипотез H_1 и H_2. Вероятность извлечь белый шар из урны, где все шары белые, $P(A/H_1)=1$ (достоверное событие), вероятность извлечь белый шар из урны, где два белых и два черных шара, $P(A/H_2)=1/2$. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Условные вероятности гипотез H_1 и H_2 вычислим по формуле Байеса $P(H_1/A)=\dfrac{1\cdot 1/2}{3/4}=\dfrac{2}{3}$, $\quad P(H_2/A)=\dfrac{1/4}{3/4}=\dfrac{1}{3}$.

Вероятности $P(H_1/A)$ и $P(H_2/A)$ назовем послеопытными или *апостериорными* вероятностями гипотез H_1 и H_2. Таким образом, по имеющейся информации о наступлении события A мы уточнили вероятности гипотез H_1 и H_2.

Возвращаем шар в урну и повторяем эксперимент, принимая в качестве доопытных вероятностей гипотез H_1 и H_2 вероятности, равные $2/3$ и $1/3$. Если вновь вынутый шар окажется черным (событие $\overline{A}$), то принимается гипотеза H_2. Но, если шар окажется белым, то вычисляем новые апостериорные вероятности гипотез H_1 и H_2 с их априорными вероятностями $2/3$ и $1/3$. Получим: $P(H_1/A) = 4/5, \quad P(H_2/A) = 1/5$. Ясно, что если мы повторим этот процесс и вновь получим белый шар, вероятность гипотезы H_1 увеличится, гипотезы H_2 еще более уменьшится.

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.6

1. В лотерее 20 билетов, из них 4 выигрышных. Взят один билет, содержание которого неизвестно. Какова вероятность того, что второй взятый билет выигрышный?
2. Детали на сборку попадают из трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0.3% брака, второй $-$ 0.2% и третий – 0.4%. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если из первого автомата поступило 100 деталей, из второго $-$ 2000 и из третьего – 2500.
3. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8, 7 – с вероятностью 0.7 и 2 – с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел и в цель не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежит стрелок?
4. Страховая компания установила, что в среднем один вексель из 1000 не подлежит оплате, причем этот вексель обязательно бывает просрочен. Также установлено, что один вексель из ста, подлежащих оплате, просрочен. Компания получила просроченный вексель. Какова вероятность того, что он не подлежит оплате?

ТЕМА 1.7. ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Основные понятия:

- независимые испытания и альтернативные исходы
- схема и формула Бернулли
- приближение Пуассона (формула Пуассона)
- нормальное приближение (формулы Муавра-Лапласа)

Литература: [1] – гл. 5, §1, 2, 3.

Схема Бернулли. Рассмотрим случайный эксперимент, состоявший из последовательности n независимых испытаний, в каждом из которых возможно два альтернативных исхода, которые мы назовем условно «успех» и «неуспех». При этом вероятность «успеха» в каждом испытании остается постоянной, равной p; вероятность «неуспеха» равна $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что в n испытаниях «успех» наступит ровно k раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{12}$$

Пример 1.7.1. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.7. Найти вероятности событий: $B-$ ни одного попадания, $H-$одного, $K-$двух, $A-$трех попаданий, $C-$хотя бы одного попадания.

<u>Решение</u>. $p = 0.7,\ q = 0.3,\ n = 3,\ k = 0,1,2,3$

$P_3(k) = C_3^k (0.7)^k (0.3)^{3-k}$.

$P(B) = P_3(0) = C_3^0 (0.7)^0 (0.3)^3 = (0.3)^3 = 0.027$.

$P(H) = P_3(1) = C_3^1 (0.7)^1 (0.3)^2 = 0.189$.

$P(K) = P_3(2) = C_3^2 (0.7)^2 (0.3)^1 = 0.441$.

$P(A) = P_3(3) = C_3^3 (0.7)^3 (0.3)^0 = (0.7)^3 = 0.343$.

$P(C) = P(k \ge 1) = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = 0.973$.

Вероятность события C можно найти также по формуле для вероятности противоположного события, учитывая, что $\overline{C} = B$, $P(C) = 1 - P(B) = 0.973$. События B, H, K, A образуют полную группу событий, и сумма их вероятностей равна 1.

Заметим, что в примере 5.2 мы получим такие же значения вероятностей соответствующих событий, если вероятности попадания для всех трех стрелков будут одинаковы и равны 0.7.

Важно помнить условия, при которых получена формула Бернулли: 1) число испытаний ограничено: 2) испытания и результаты испытаний независимы: 3) вероятность успеха во всех испытаниях постоянна. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, формула Бернулли не применима. В частности, в примере 5.2 не выполнялось третье условие: вероятности попаданий для трех стрелков различны.

Пример 1.7.2. В урне три белых и два черных шара. Из урны производится выборка трех шаров так, что перед выбором следующего предыдущий шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в выборке 0, 1, 2, 3 белых шаров?

<u>Решение</u>: $p = 3/5,\ q = 2/5,\ n = 3,\quad k = 0,1,2,3$.

$P_3(k) = C_3^k (3/5)^k (2/5)^{3-k}$,

$P_3(0) = C_3^0 (3/5)^0 (2/5)^3 = (2/5)^3 = 8/125$,

$P_3(1) = C_3^1 (3/5)^1 (2/5)^2 = 36/125$,

$P_3(2) = C_3^2 (3/5)^2 (2/5)^1 = 54/125$,

$P_3(3) = C_3^3 (3/5)^3 (2/5)^0 = (3/5)^3 = 27/125$.

Рассмотрим схему Бернулли при условии, что проводится большое число испытаний ($n \to \infty$) при очень малой вероятности появления «успеха» в каждом испытании ($p \to 0$), так, что $np \to \lambda$. Тогда для любого $k \ge 0$ вероятность получить k успехов в n испытаниях стремится к величине $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$,

$$P(k) \approx \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda}. \qquad (13)$$

Формула Пуассона (12) является приближением формулы Бернулли при большом числе испытаний с маленькой вероятностью одного из исходов.

Пример 1.7.3. В партии из 200 изделий каждое изделие независимо от другого может быть браковано с вероятностью 0.01. Оценить вероятность того, что число бракованных изделий в партии равно 3.

Решение. Условия задачи удовлетворят условиям схемы Бернулли. По формуле Бернулли

$$P_{200}(3) = C_{200}^{3}\left(0.01\right)^{3}\left(0.99\right)^{197} = 0.181.$$

По формуле Пуассона

$$P(k=3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0.180.$$

Другим приближением формулы Бернулли является формула Лапласа (нормальное приближение), если число испытаний в схеме Бернулли велико и при этом вероятности обоих исходов p и q имеют одинаковый порядок (npq – велико)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{14}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, $\quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Вероятность того, что в n испытаниях число «успехов» k заключено между k_1 и k_2 определяется формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(x_1 \le x \le x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{15}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$, $\quad x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ табулированы, т.е. вычислены при многих положительных значениях x (см. в разделе Таблицы в конце пособия). Функция $\varphi(x)$ четна, следовательно, для отрицательных значений аргумента $\varphi(-x) = \varphi(x)$, функция $\Phi(x)$ нечетна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. В некоторых таблицах приводятся значения функции $\Phi(x) = \Phi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$, тогда $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Пример 1.7.4. В партии из 22500 изделий каждое изделие может быть браковано с вероятностью 0.2. Найти вероятности событий: 1) число бракованных изделий в партии ровно 4590; 2) число бракованных изделий в партии заключено между 4380 и 4560.

Решение. Число $n = 22500$ велико, поэтому можно воспользоваться нормальным приближением.

$$1)\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{4590-22500\cdot 0.2}{60}=1.5$$

$$P(k=4590)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(1.5)=\frac{1}{60}0.12952\approx 0.0022$$

$$2)\ x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=1,\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{4560-22500\cdot 0.2}{60}=2$$

$$P(4380\le k\le 4560)=P(-2\le x\le 1)=\Phi(1)-\Phi(-2)=$$
$$=\Phi(1)+\Phi(2)=0.3413+0.4772=0.8135.$$

Задачи для самостоятельного решения по теме 1.7

1. Подбрасывается три игральных кости. Какова вероятность того, что «единица» выпадет: *а*) ровно два раза? *б*) хотя бы один раз?
2. Экзамен состоит из шести вопросов, на каждый из которых дано три ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность того, что путем простого угадывания удастся правильно ответить на 4 вопроса?
3. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равно 0.001. Какова вероятность того, что в партии из 1000 изделий ровно 4 не выдержит испытание?
4. Издательство выпускает 30% книг в мягком переплете. Какова вероятность того, что из 210 книг, поступивших в магазин, 80 книг в мягком переплете?
5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для стрелка равна 0.7. Какова вероятность того, что при 40 выстрелах он попадет от 20 до 28 раз?
6. Из 60 вопросов, входящих в билеты (билет содержит 2 вопроса) студент подготовил 30. Какова вероятность того, что билет, взятый студентом, содержит два подготовленных им вопроса?
7. В партии 5% бракованных изделий. Какова вероятность того, что из 5, взятых на проверку изделий менее 2 бракованных?
8. Вероятность того, что изделие не пройдет контроль, равна 0.02. Какова вероятность того, что из 400 случайно отобранных изделий более двух не пройдут контроль?

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ 1.1–1.2

1. Вероятность события не может быть меньше ###.

2. Стандартная колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берется 1 карта наудачу. Вероятность того, что взятая карта окажется червовой масти, равна ###.

3. Колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берется 1 карта наудачу. Вероятность того, что эта карта окажется картой черви или пики равна ###.

4. Колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берется 1 карта наудачу. Вероятность того, что эта карта – король равна ###.

5. Колода карт содержит 52 карты, по 13 карт каждой масти. Берется 1 карта наудачу. Вероятность того, что эта карта – король червей равна ###.

6. Каждый опыт завершается одним и только одним ###.

7. Возможность наступления чего-либо в результате опыта (испытания) называют ###.

8. Вероятность – это число, которое находится в пределах
от ### и до ###.

9. Если испытание завершается наступлением исхода определенного рода, то говорят что наступило ###.

10. Численная мера объективной возможности наступления события называется ###.

11. Вероятность события не может быть больше ###.

12. Деятельность, направленная на получение или проверку определенного результата называется ###.

13. В корзине имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Вероятность того, что это яйцо некачественное равна ###.

14. Комбинаторный тип, к которому относится случайное расположение книг на полке в определенном порядке, называется ###.

15. Комбинаторный тип, к которому относится набор трех карандашей разных цветов, взятый из пяти имеющихся разных по цвету, называется ###.

16. Комбинаторный тип, к которому относится составленное наудачу расписание из трех пар, выбранных из десяти различных предметов, называется ###.

17. События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ не могущие произойти в одно и тоже время
(в результате одного и того же испытания), называются ###.

18. Если появление события $\boldsymbol{A}$ влечет за собой изменение вероятности наступления события $\boldsymbol{B}$, или наоборот, появление события $\boldsymbol{B}$ влечет за собой изменение вероятности наступления события A, то они называются ###.

19. Если вероятность наступления события A равна 0.3, то вероятность наступления противоположного события $\bar{A}$ равна ###.

20. Вероятность появления события A, определяемая при условии, что событие B уже наступило, называется ###.

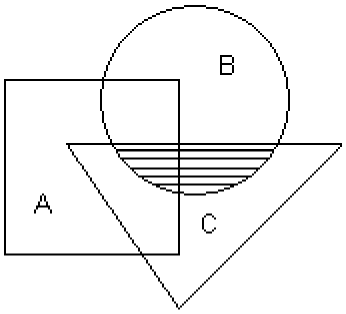
21. Отношение числа благоприятных исходов событию к числу всех равновозможных исходов эксперимента определяется как ### вероятность события.

Ответы к тестовым заданиям по темам 1.1–1.2

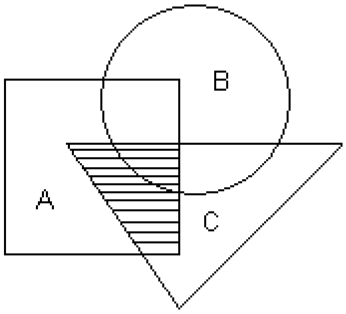
1. 0; ***2.*** 13/52, ¼; ***3.*** 26/52, 1/2; ***4.*** 1/13, 4/52; ***5.*** 1/52; ***6.*** исходом; ***7.*** событием; ***8.*** 0% и 100%, 0 и 1; ***9.*** событие; ***10.*** вероятностью; ***11.*** единицы; ***12.*** экспериментом, испытанием, опытом, наблюдением; ***13.*** 0,05, 5/100, 1/20; ***14.*** перестановка (книг); ***15.*** сочетание (цветов-красок); ***16.*** размещение (предметов); ***17.*** несовместными; ***18.*** зависимыми; ***19.*** 0,7; ***20.*** условная вероятность; ***21.*** классическая.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ 1.3–1.6

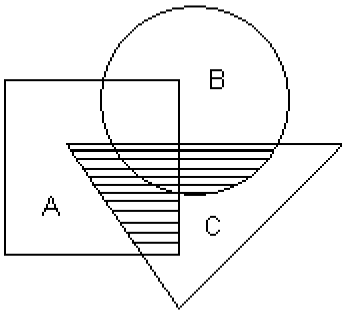
1. Пусть событие A – точка попадает в квадрат, B – точка попадает в круг, C – точка попадает в треугольник. Заштрихованная область соответствует событию ###.



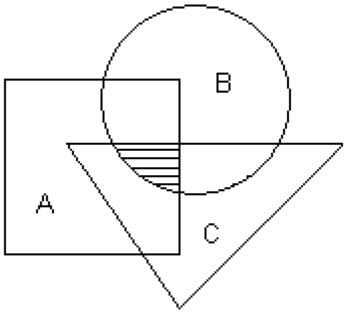
2. Пусть событие A – точка попадает в квадрат, B – точка попадает в круг, C – точка попадает в треугольник. Заштрихованная область соответствует событию ###.



3. Пусть событие A – точка попадает в квадрат, B – точка попадает в круг, C – точка попадает в треугольник. Заштрихованная область соответствует событию ###.



4. Пусть событие А – точка попадает в квадрат, В – точка попадает в круг, С – точка попадает в треугольник. Заштрихованная область соответствует событию ###.



5. Пусть *A, B, C* – события, наблюдаемые в эксперименте. Тогда, событие *E* – «из трех событий произойдет ровно одно событие» задается выражением ###.

6. Пусть *A, B,* С – события, наблюдаемые в эксперименте. Тогда, событие *E* – «из трех событий произойдет ровно два события» задается выражением ###.

7. Пусть *A, B, C* – события, наблюдаемые в данном эксперименте. Тогда, событие *E* – «из трех событий произойдет не меньше двух событий» задается выражением ###.

8. Пусть *A, B, C* – события, наблюдаемые в данном эксперименте. Тогда, событие Е – «из трех событий произойдет хотя бы одно событие» задается выражением ###.

9. События *A* и *B* несовместны. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$. Тогда вероятность $P(A+B)$ = ###.

10. События *A* и *B* независимы: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$. Тогда вероятность $P(AB)$ = ###.

11. События *A* и *B* совместные и независимые. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$. Тогда вероятность $P(A+B)$ = ###.

12. События *A* и *B* совместные. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(AB) = 0.05$. Тогда вероятность $P(A+B)$ = ###.

13. События *A* и *B* зависимые. $P(B) = 0.3$, $P(A/B) = 0.2$. Тогда вероятность $P(AB)$ = ###.

14. Данная формула $P(B_i / \grave{A}) = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}$ называется формулой ###.

15. Данная формула $Ð(\grave{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$ называется формулой ###.

16. В урне 3 белых и 2 красных шара. Наудачу из урны вынули 2 шара. Расположить следующие события в порядке возрастания их вероятностей: а) оба шара – красные; б) один из вынутых шаров – синий; в) вынутые шары разного цвета; г) среди вынутых шаров нет черного шара; д) оба шара – белые.

17. События *A* и *B* несовместные, а вероятности их появления равны 0,30 и 0,40 соответственно. Тогда, значение вероятности появления события *AB* равняется ###

18. Вероятность появления события *A* равна 0.30, вероятность появления *B* равна 0.40; события *A* и *B* несовместные.

Вероятность появления события (*A*+*B*) равна ###...

Ответы к тестовым заданиям по темам 1.3–1.6

1. *BC*; ***2.*** *AC*; ***3.*** *AC*+*BC*; ***4.*** *ABC*; ***5.*** $\grave{A}\overline{\hat{A}}\overline{\tilde{N}}+\overline{\grave{A}}\hat{A}\overline{\tilde{N}}+\overline{\grave{A}}\overline{\hat{A}}\tilde{N}$; ***6.*** $\grave{A}\hat{A}\overline{\tilde{N}}+\grave{A}\overline{\hat{A}}\tilde{N}+\overline{\grave{A}}\hat{A}\tilde{N}$; ***7.*** $\grave{A}\hat{A}\overline{\tilde{N}}+\grave{A}\overline{\hat{A}}\tilde{N}+\overline{\grave{A}}\hat{A}\tilde{N}+\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$; ***8.*** $\grave{A}\overline{\hat{A}}\overline{\tilde{N}}+\overline{\grave{A}}\hat{A}\overline{\tilde{N}}+\overline{\grave{A}}\overline{\hat{A}}\tilde{N}+\grave{A}\hat{A}\overline{\tilde{N}}+\grave{A}\overline{\hat{A}}\tilde{N}+\overline{\grave{A}}\hat{A}\tilde{N}+\grave{A}\hat{A}\tilde{N}$, $\grave{A}+\hat{A}+\tilde{N}$; ***9.*** 0.5; ***10.*** 0.12; **11.** 0.44; ***12.*** 0.45; ***13.*** 0.06; ***14.*** Байеса; ***15.*** полной вероятности; ***16.*** б), а), д), в), г); ***17.*** 0; ***18.*** 0.70.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ 1.7

1. Если число опытов в серии повторных независимых испытаний невелико, то для вычисления вероятности k «успехов» используется формула ###

2. Испытание происходит 7 раз. Вероятность того, что оно ровно 2 раза завершиться успешно, Вы будете вычислять, используя формулу ###.

3. Вероятность появления события в одном испытании 0,001. Испытание происходит 7000 раз. Вероятность того, что событие произойдет не более двух раз, Вы будете вычислять, используя формулу ###.

4. Число повторных независимых испытаний n=100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,6. Вероятность наступления ровно 50 успехов вычисляется по формуле ###.

5. Число повторных независимых испытаний n=100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0.4. Тогда вероятность того, что событие наступит от 30 до 50 раз, вычисляется по формуле ###.

6. В корзине с розами красные розы составляют 75% от общего количества. Для букета взяли 3 розы. Расположить события в порядке убывания их вероятностей: а) в букете нет красных роз; б) букет состоит из роз; в) в букете только 1 красная роза; г) букет состоит только из красных роз; д) в букете нет роз.

7. В лотерее на каждые 100 билетов 10 выигрышных. Вы покупаете 2 билета. Расположить события в порядке возрастания их вероятностей: а) хотя бы один Ваш билет выиграл; б) все три билета выиграли; в) среди Ваших билетов нет выигрышных; г) оба Ваших билета выиграли; д) выиграл только один Ваш билет.

8. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,8.

Вероятность наступления ровно 50 успехов (с точностью до сотых) равна ###.

9. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность успеха в одном испытании равна 0,5. Определите вероятность (до 4-го знака после запятой) того, что событие появится от 25 до 50 раз.

10. Число повторных независимых испытаний n = 100. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,5. Вероятность наступления ровно 50 успехов (с точностью до второго знака после запятой) равна ###.

11. Параметры ***n, p, k, q, n-k*** определяющие вероятность, определяемую по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ означают соответственно ###.

12. Проводится серия из 10 независимых испытаний. По формуле $P_{10}(9) + P_{10}(10)$ находится вероятность событий ###.

Ответы к тестовым заданиям по теме 1.7

1. Бернулли; ***2.*** Бернулли; ***3.*** Пуассона; ***4.*** Лапласа (локальная теорема Муавра-Лапласа); ***5.*** Лапласа (интегральная формула Муавра-Лапласа); ***6.*** б), г), в), а), д); ***7.*** *б*), г), д), а), в); ***8.*** 0.00; ***9.*** 0.5000; ***10.*** 0.08; ***11.*** а) число независимых испытаний, б) вероятность «успеха» в одном испытании, в) число «успехов» в серии испытаний, г) вероятность «неуспеха», д) число «неуспехов»; ***12.*** «из 10 испытаний событие наступит более 8 раз», «из 10 испытаний событие наступит хотя бы 9 раз».

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ТЕМАМ 1.1–1.7

1. Что такое случайный эксперимент?
2. Что представляет собой исход случайного эксперимента?
3. Что такое пространство событий (исходов)?
4. Что такое случайное событие?
5. Может ли в результате случайного эксперимента реализоваться более одного исхода?
6. Может ли в результате случайного эксперимента наступить более одного события?
7. Что такое вероятность события?
8. Что такое относительная частота события?
9. Чем относительная частота отличается от вероятности события? О чем говорит закон больших чисел?
10. Что представляет собой невозможное событие?
11. Что такое достоверное событие?
12. Что представляют собой противоположные события?
13. Как связаны между собой вероятности противоположных событий?
14. В чем заключается правило равной вероятности?
15. Какие события описывает классическая формула вероятностей?
16. Когда применяется геометрическая вероятность?
17. Что такое несовместные события?
18. Что такое пересечение или произведение событий?
19. Что такое условная вероятность?
20. Чему равна вероятность произведения двух событий?
21. Какие события называются независимыми?
22. Чему равна условная вероятность для двух независимых событий?
23. Что такое объединение или сумма событий?
24. Чему равна вероятность суммы двух событий?
25. Чему равна вероятность суммы двух несовместимых событий?
26. Что такое диаграмма Эйлера-Венна?
27. Что такое полная группа событий?
28. Какое событие описывает формула полной вероятности?
29. Сформулируйте условия применения формулы Бернулли?
30. Сформулируйте условия, при которых верна формула Пуассона.
31. Сформулируйте условия, при которых верно нормальное приближение (формулы Лапласа).

ЧАСТЬ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Цель второй части пособия: помочь студентам в освоении курса теории вероятностей, а именно – понятия случайной величины. Оно способствует приобретению навыков при решении задач, подготовке к тестированию и, как следствие, к более качественному усвоению предмета, проверяемого во время проведения контрольных работ, при защите ИДЗ и … на экзамене!

Пособие содержит примеры решения типовых задач по трем основным темам раздела «Законы распределения случайных величин»:

- ✓ Дискретные законы распределения.
- ✓ Непрерывные законы распределения.
- ✓ Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Тема «Совместное распределение двух случайных величин» будет рассмотрена в третьей части методического пособия.

Пособие содержит также примеры тестовых заданий, задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы. Все основные формулы приводятся при решении примеров и имеют нумерацию.

<u>Основные понятия</u>, которые нужно освоить при изучении этих тем:

- *случайная величина и ее закон распределения,*
- *функция распределения и плотность распределения,*
- *параметры распределения*
- *числовые характеристики распределения*
    - *математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение,*
    - *квантили распределения, мода и медиана.*

Данное методическое издание соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Математика» для студентов технических и экономических специальностей технических университетов.

ТЕМА 2.1. ДИСКРЕТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия:

- *таблица распределения и функция распределения,*
- *индикаторная (бернулевская) и биномиальная с.в.,*
- *геометрическое и гипергеометрическое распределения,*
- *формулы для определения числовых характеристик с.в. дискретного типа, частные формулы для конкретных распределений.*

Литература: [1] – гл. 6, 7, 8, 10; [2] – гл. 4, [5] – гл. 2, п. 2.1; 2.2; 2.3; 2.5; 2.7.

Пример 2.1.1. Дана таблица распределения дискретной случайной величины (д.с.в.) X.

x_i	-2	1	3
$p_i = P(X = x_i)$	0.2	0.5	0.3

а) построить функцию распределения случайной величины X;
б) найти числовые характеристики распределения: математическое ожидание, моду и дисперсию.

Решение. а) По определению, *функция распределения* случайной величины X в точке x есть вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(-\infty, x)$, т.е.

$$F_X(x) = P(X < x). \qquad (2.1.1)$$

В нашем случае случайная величина принимает дискретные значения с заданными вероятностями. Вероятности остальных значений равны нулю. Тогда для всех значений $x \le -2$: $F(x) = 0$. Для значений x в интервале $(-2,1]$ $F(x) = P(X = -2) = 0,2$. В интервале $(1,3]$: $F(x) = P(X = -2) + P(X = 1) = 0,2 + 0,5 = 0,7$. Для $x > 3$: $F(x) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 3) = 0.2 + 0.5 + 0.3 = 1$. Таким образом,

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le -2; \\ 0.2, & при\ -2 < x \le 1; \\ 0.7, & при\ 1 < x \le 3. \\ 1 & при\ x > 3 \end{cases} .$$

График функции распределения имеет вид (рис. 1):

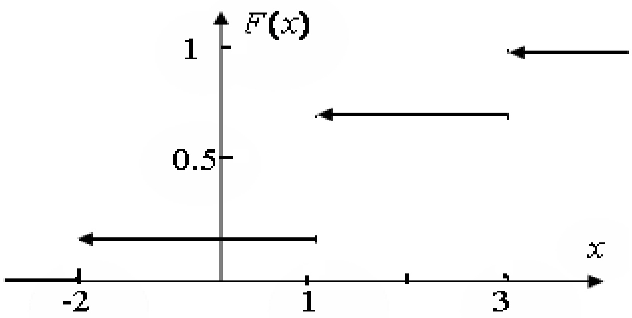


Рис. 1

Заметим, что функция распределения д.с.в. X имеет ступенчатый вид, при этом в точках разрыва функция непрерывна слева и неопределенна справа, а величина скачка функции распределения в этих точках равна вероятностям этих значений.

б) *Математическое ожидание* или *среднее* (ожидаемое) значение дискретной случайной величины X определяется как взвешенное среднее всех возможных значений X, в которых в качестве весов выступают соответствующие вероятности:

$$MX = \sum_i x_i p_i \,. \tag{2.1.2}$$

Для заданного распределения $MX = -2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 1$.

Модой дискретного распределения называется значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность. Из таблицы распределения видим, что наибольшую вероятность имеет значение $X = 1$, следовательно, $M_0 X = 1$. В данном случае мода распределения совпадает с математическим ожиданием.

Дисперсия случайной величины X характеризует разброс значений случайной величины относительно среднего значения и определяется как математическое ожидание квадратов отклонений значений X от их среднего:

$$DX = M\left(x_i - MX\right)^2 = \sum_i \left(x_i - MX\right)^2 p_i \,. \tag{2.1.3}$$

Для вычисления дисперсии, воспользуемся свойством:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2, \tag{2.1.4}$$

где $M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i$ – 2-й начальный момент д.с.в. X. (2.1.5)

$M(X^2) = (-2)^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 + 3^2 \cdot 0,3 = 4$, $DX = 4 - 1 = 3$. Такой же результат мы получим, используя для вычисления определение дисперсии.

Пример 2.1.2. Дана функция распределения д.с.в X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1;\\ 0.4, & при\ 1<x\le 3;\\ 0.9, & при\ 3<x\le 4;\\ 1, & при\ x>4.\end{cases}$$

Построить таблицу распределения случайной величины X, представить это распределение графически. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. Из условия задачи следует, что функция распределения имеет ступенчатый вид и терпит разрывы в точках 1, 3, 4. Из свойств функции распределения следует (см. пример 1.1), что случайная величина X дискретна и принимает значения 1, 3, 4, при этом, величина скачка функции $F(x)$ в этих точках равна вероятностям этих значений:

$p_1 = P\left(X=1\right) = F(1+0) - F(1) = 0.4$,

$p_2 = P\left(X=3\right) = F(3+0) - F(3) = 0.9 - 0.4 = 0.5$,

$p_3 = P\left(X=4\right) = F(4+0) - F(4) = 1 - 0.9 = 0.1$.

Таблица распределения:

x_i	1	3	4
$p_i = P\left(X = x_i\right)$	0.4	0.5	0.1

Сумма вероятностей всех возможных значений X должна быть равна единице (свойство нормировки): $\sum_i p_i = 1$. (2.1.6)

Проверка: $\sum_i p_i = 0.4 + 0.5 + 0.1 = 1$.

График функции вероятностей $p(x)$ случайной величины X представлен на рисунке 2. Длины вертикальных линий на этом графике равны вероятностям соответствующих значений. Сам график состоит из трех точек в конце этих линий.

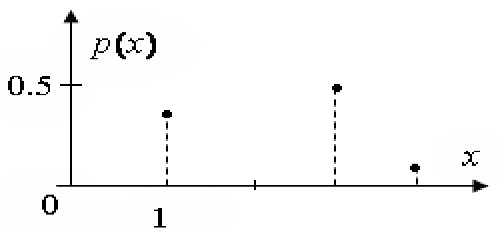


Рис. 2

Математическое ожидание, второй начальный момент и дисперсия:
$MX = \sum_i x_i p_i = 1\cdot 0,4 + 3\cdot 0,5 + 4\cdot 0,1 = 2.3,$
$M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,3 = 9.7,$
$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 9.7 - 2.3 = 7.4.$
Видим, что для данного распределения мода $M_0X = 3$ не совпадает с математическим ожиданием.

Рассмотрим подробнее понятия математического ожидания и дисперсии случайной величины и их свойства.

Пример 2.1.3. Дана таблица распределения д.с.в. X

x_i	-1	0	1
$p_i = P(X = x_i)$	0.2	0.3	0.5

Вычислить следующие математические ожидания: MX, $M(2X), M(2X+1), M(X^2), M(X-0.3)^2$,

Решение. $MX = \sum_i x_i p_i = (-1)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,5 = 0.3.$
Математическое ожидание функции случайной величины $H(X)$:

$$M[H(X)] = \sum_i^n H(X)\cdot p(x_i) \qquad (2.1.7)$$

Тогда:
$M(2X) = \sum_i 2x_i p_i = (-2)\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 2\cdot 0,5 = 0.6,$
$M(2X+1) = \sum_i (2x_i + 1) p_i = (-1)\cdot 0,2 + 1\cdot 0,3 + 3\cdot 0,5 = 1.6.$
Видим, что $M(2X+1) = 2MX + 1$. Удвоение значений случайной величины и прибавление к ним единицы приводит к удвоению математического ожидания и увеличению результата на единицу. Таким образом, мы убедились в выполнении свойства математического ожидания: $M(aX+b) = aMX + b$. (2.1.8)
$M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,5 = 0.7 \neq (MX)^2.$
Заметим, что математическое ожидание квадрата случайной величины не совпадает с квадратом математического ожидания этой величины.
$M(X-0.3)^2 = \sum_i (x_i - 0.3)^2 p_i = (-1,3)^2 \cdot 0,2 + (-0,3)^2 \cdot 0,3 +$

$+(0,7)^2 \cdot 0,5 = 0.61 = 0.7-(0.3)^2$. Здесь мы продемонстрировали свойство дисперсии (1.4) $DX = M\left(X - MX\right)^2 = MX^2 - (MX)^2$.

Пример 2.1.4. Согласно статистическим данным, вероятность попадания в аварию машины определенного типа в течение года равна 0.008. Страховая компания предлагает владельцу такой машины застраховать ее на 10000 долларов. Страховой взнос равен 100 долларам. Какую прибыль получит страховая компания при страховке одной машины? При страховке ста машин?

Решение. Пусть $X-$чистая прибыль страховой компании при страховании одной машины. X есть случайная величина, значения которой зависят от того, попадет ли машина в аварию в течение года. Вероятность того, что машина не попадет в аварию, равна $1-0.008=0.992$. В этом случае чистая прибыль страховой компании составит 100 долларов. В противном случае страховая компания должна выплатить страховку, и ее прибыль составит $100-10000=-9900$ долларов. Таблица распределения X имеет вид:

X	100	9900
P	0,992	0,008

$MX = 100 \cdot 0,992 + (-9900) \cdot 0,008 = 20$ долларов. Соответственно при страховании 100 таких машин прибыль страховой компании составит $M\left(100X\right) = 100 \cdot MX = 2000$ долларов.

Кроме того, при страховании объектов различного типа прибыль страховой компании складывается из прибылей от страхования этих объектов, так как математическое ожидание суммы любых случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т.е. $M\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i MX_i$. (2.1.9)

Пример 2.1.5. Таблица распределения д.с.в. X имеет вид:

x_i	2025	2050	2075
p_i	0.3	0.2	0.5

Найти дисперсию $DX = \sigma_X^2$.

Решение. Чтобы при вычислениях не оперировать большими числами, введем случайную величину $Y = \dfrac{X - 2050}{25}$, таблица распределения которой проще, причем $P\left(X = x_i\right) = P\left(Y = y_i\right)$.

y_i	-1	0	1
p_i	0.3	0.2	0.5

$$MY = \sum_i y_i p_i = (-1)\cdot 0,3 + 0\cdot 0,2 + 1\cdot 0,5 = 0.2,$$

$$MY^2 = \sum_i {y_i}^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 = 0.8,$$

$$DY = MX^2 - \left(MX\right)^2 = 0.8 - 0.04 = 0,76.$$

Так как $X = 25Y + 2050$, для вычисления DX воспользуемся свойствами дисперсии: $D\left(aX\right) = a^2 DX$; $D\left(X + b\right) = DX$. Тогда $DX = D\left(25Y + 2050\right) = 625DY = 625\cdot 0,76 = 475$.

Дисперсия есть величина, имеющая размерность квадрата случайной величины. Поэтому для характеристики изменчивости случайной величины используется также среднее квадратическое (стандартное) отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{DX}, \qquad (2.1.10)$$

имеющее ту же размерность, что и случайная величина.

Стандартное отклонение используется в качестве мерки для выражения реальных отклонений, и приблизительно показывает, насколько реальные значения случайной величины могут отличаться от среднего.

Во многих случаях, например, в коммерческой деятельности стандартное отклонение характеризует риск, показывая, насколько неопределенной может быть ситуация.

Пример 2.1.6. Необходимо оценить три разных проекта *X*, *Y* и *Z*. По каждому из проектов необходимы инвестиции в объеме 12000 Р, а возврат средств планируется на следующий год. По проекту *X* гарантированный возврат составит 14000 Р, по проекту *Y* может быть получено либо 10000 Р, либо 20000 Р, вероятность в каждом случае составляет 0.5. Проект *Z* не дает ничего с вероятностью 0.98 или принесет 1000000 Р с вероятностью 0.02. Эти данные собраны в таблице.

проект	возврат	вероятность
X	14 000 Р	1
Y	10 000 Р 20 000 Р	0.5 0.5
Z	0 Р 1 000 000 Р	0.98 0.02

Оценить риск и доходность каждого проекта.

Решение. Средние значения: $MX = 14000\,\text{Р}$;
$MY = 10000\,\text{Р}\cdot 0.5 + 20000\,\text{Р}\cdot 0.5 = 15000\,\text{Р}$;
$MZ = 0\,\text{Р}\cdot 0.98 + 1000000\,\text{Р}\cdot 0.02 = 20000\,\text{Р}$.

Если исходить только из этих величин, проект Z может показаться самым лучшим, а проект X – худшим из всех. Однако средние значения не дают полной информации. Так, например, несмотря на то, что по проекту Z ожидаемый возврат оказывается самым большим, этот проект несет еще и максимальный риск: вероятность отсутствия выплат составляет 98%. Присущие каждому из рассматриваемых проектов риски характеризуются стандартными отклонениями:

$\sigma_X = \sqrt{(14000 - 14000)^2 \cdot 1} = 0\,\text{Р}$;

$\sigma_Y = \sqrt{(10000 - 15000)^2 \cdot 0.5 + (20000 - 15000)^2 \cdot 0.5} = 5000\,\text{Р}$;

$\sigma_Z = \sqrt{(0 - 20000)^2 \cdot 0.98 + (20000 - 1000000)^2 \cdot 0.02} = 140000\,\text{Р}$.

Отсюда видно, что проект X самый безопасный, а проект Z самый рискованный. Обычно предпочтение отдается большим ожидаемым выплатам и меньшему риску. Однако в приведенном примере возможность получения больших выплат сопряжена с большим риском.

Оценим доходность каждого проекта. Поскольку каждый проект требует инвестиций 12000 Р, то *доход* = *выплаты* – 12000 Р.

Таким образом, получим следующие размеры ожидаемого дохода: $X - 2000$ Р, $Y - 3000$ Р, $Z - 8000$ Р. Стандартные отклонения для дохода такие же, как для размера выплат, так как

$$\sigma_{X+b} = \sigma_X . \qquad (2.1.11)$$

При решении задач 2.1.7–2.1.14 можно воспользоваться таблицей 4, в которой приведены основные дискретные распределения, указаны параметры распределения и связь числовых характеристик распределения с параметрами.

Пример 2.1.7. Три раза подбрасывается игральная кость. Построить распределение числа выпавших единиц. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. В приведенном случайном эксперименте выполняются все условия схемы Бернулли: испытания независимы, вероятность «успеха» (выпадения единицы) во всех испытаниях одинакова и равна $1/6$. Следовательно, случайная величина X – число выпавших единиц в трех испытаниях имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами $n=3,\ p=1/6$. X принимает целые значения $k=0,1,2,3$ с вероятностями

$$p_k = P_3\left(X=k\right) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k} \qquad (2.1.12)$$

$$p_0 = P_3\left(X=0\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}; \quad p_1 = P_3\left(X=1\right) = 3\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216};$$

$$p_2 = P_3\left(X=2\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{15}{216}; \quad p_3 = P_3\left(X=3\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Таблица распределения имеет вид

$X=k$	0	1	2	3
$P\left(X=k\right)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Проверка: $\sum_{k=1}^{3} p_k = \frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=1.$

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$MX = np,\ DX = np(1-p). \qquad (2.1.13)$$

$$MX = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2},\ DX = 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{15}{36}.$$

Заметим, что математическое ожидание близко к моде с.в.

Пример 2.1.8. (Игра чак-о-чак). Игрок A платит игроку B один рубль, после чего подбрасывается три игральных кости. Если на одной кости выпадет одно очко, то B платит A два рубля, если одно очко выпадет на двух костях – 4 рубля, и, если одно очко выпадает на трех костях – 8 рублей. В противном случае B не платит ничего. Вычислить средний выигрыш каждого игрока.

Решение. Пусть Y – чистый выигрыш игрока A, а X – число выпавших единиц на игральных костях. Очевидно, что случайная величина Y есть функция X. При этом, вероятности возможных значений Y равны вероятностям соответствующих значений X. Для составления таблицы распределения случайной величины Y воспользуемся решением предыдущей задачи.

X	0	1	2	3
Y	-1	1	3	7
$p_i = P(Y = y_i) =$ $= P(X = i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Для вычисления математического ожидания случайной величины Y мы не можем воспользоваться формулой $MY = np$, она имеет уже не биномиальное распределение, как X (ее значения не являются числом успехов в испытаниях Бернулли), поэтому воспользуемся определением математического ожидания:

$$MY = \sum y_i p_i = -1 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 3 \cdot \frac{15}{216} + 7 \cdot \frac{1}{216} = \frac{2}{216}.$$

Этот результат означает, что в длинной серии таких игр средний выигрыш игрока A будет равен $1/108$. Из свойств математического ожидания следует, что средний выигрыш игрока A, например, в 100 играх в 100 раз больше и равен $100/108$, т.е. примерно одному доллару.

Очевидно, что средний выигрыш игрока B в одной игре равен $-1/108$. В азартных играх, в которых участвуют на равных условиях несколько игроков, математическое ожидание выигрыша каждого игрока должно быть равно 0. Следовательно, надо пересмотреть условия игры, например, можно уменьшить ставку на 2 доллара при выпадении единиц на трех костях.

Такой же принцип должен работать в деловых отношениях равноправных партнеров.

Пример 2.1.9. Игральная кость подбрасывается до выпадения «единицы». Построить распределение числа испытаний. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. Пусть X – случайная величина, равная числу испытаний. Очевидно, оно равно номеру испытания, в котором впервые выпала единица. X может принимать значения $1, 2, 3, \ldots$ и имеет ***геометрическое+1 распределение*** с параметром $p = 1/6$. Вероятности этих значений $P\left(X = k\right) = (1-p)^{k-1} p$: (2.1.14)

$P(X=1) = p = 1/6$, $P(X=2) = (1-p)p = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{1}{6}, \ldots$

Таблица распределения:

x_i	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p_i	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$\ldots$	$p(1-p)^{k-1}$	$\ldots$

Математическое ожидание и дисперсия геометрического+1 распределения: $MX = 1/p$, $DX = (1-p)/p^2$. $MX = 6, DX = 30$, $\sigma_X \approx 5.5$. Величина σ_X говорит о том, что возможные значения X имеют достаточно большой разброс.

Пример 2.1.10. Игрок бросает монету до появления первой цифры либо до появления n раз подряд герба. Выигрыш игрока есть случайная величина $Y = 2^X$, где X – число бросаний монеты.. Найти средний выигрыш игрока при $n = 4$. Рассмотреть случай: $n \to \infty$.

Решение. Если монета подбрасывается до появления первой цифры, случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/2$ и таблица распределения:

X	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
Y	2	4	8	$\ldots$	2^k	$\ldots$
$P(X=k)$	$1/2$	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$	$\ldots$	$(1/2)^k$	$\ldots$

При этом значения Y имеют те же вероятности, что соответствующие значения X, т.е. $P(X=k) = P\left(Y = 2^k\right)$.

Если монета бросается до появления первой цифры или до n – кратного появления герба, случайная величина X уже не имеет геометрическое распределение, так как она принимает конечное число значений $1,2,\ldots,n$. В этом случае таблица распределения имеет вид

X	1	2	3	$\ldots$	n
Y	2	4	8	$\ldots$	2^n
$P(X=k)$	$1/2$	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$	$\cdots$	$(1/2)^n+(1/2)^n$

При вычислении вероятности $P(X=n)$, мы учли что событие {монета подброшена n раз} есть сумма двух несовместимых событий: {цифра выпала в $n-i$ испытании} и {n раз подряд выпал герб}.

При $n=4$ таблица распределения имеет вид:

X	1	2	3	4
Y	2	4	8	2^n
$P(X=k)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/8$

$MY=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{8}=5$. Видим, что средний выигрыш MY равен числу подбрасываний монеты плюс один. Следовательно, при $n\to\infty$, выигрыш игрока равен бесконечно большой сумме!?

Геометрическое распределение широко применяется при контроле качества выпускаемой продукции.

Пример 2.1.11. Производится испытание выпускаемых приборов. Каждый следующий прибор испытывается только, если предыдущий оказался исправным. Составить закон распределения числа испытанных приборов, если вероятность того, что прибор исправен, равна 0.9. Найти среднее число испытанных приборов.

Решение. Испытания производятся до появления неисправного прибора. Вероятность того, что прибор неисправен, равна 0.1. Случайная величина X −число испытанных приборов, имеет ***геометрическое+1 распределение*** с параметром $p=0.1$. Таблица распределения имеет вид

x_i	1	2	3	$\ldots$	k	$\ldots$
p_i	0.1	0.09	0.081	$\ldots$	$0.9^{k-1}\cdot 0.1$	$\ldots$

$MX = 1/p = 10$. Этот результат означает, что в длинной серии таких экспериментов в среднем будет испытано 10 приборов.

Пример 2.1.12. В партии из 200 изделий каждое изделие может быть браковано с вероятностью 0.01. Составить закон распределения числа бракованных изделий в партии. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. Обозначим X – число бракованных изделий в партии. В этом случайном эксперименте выполняются все условия схемы Бернулли, при этом число испытаний n велико, а вероятность появления бракованного изделия p мала. Следовательно, случайная величина X имеет ***распределение Пуассона*** с параметром $\lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$. X может принимать значения $0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \qquad (2.1.15)$$

При вычислениях будем округлять полученные значения вероятностей до тысячных. Тогда

$$P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0.137, \quad P(X = 1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} \approx 0.274,$$

$$P(X = 2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} \approx 0.274, \quad P(X = 3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.183,$$

$$P(X = 4) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} \approx 0.090, \quad P(X = 5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} \approx 0.040,$$

$$P(X = 6) = \frac{2^6}{6!} e^{-2} \approx 0.010, \quad P(X = 7) = \frac{2^7}{7!} e^{-2} \approx 0.000.$$

Последнее значение с заданной точностью равно нулю. Вероятности всех последующих значений тоже равны нулю. Таблица распределения:

$X = k$	0	1	2	3	4	5	6	$k \ge 7$
$P(X = k)$	0.137	0.274	0.274	0.183	0.09	0.04	0.01	0

Числовые характеристики распределения Пуассона: $MX = \lambda$, $DX = \lambda$. Получаем: $MX = 2$, $DX = 2$. Этот результат означает, что в среднем в длинной серии таких испытаний среднее число бракованных изделий в партии из 200 изделий равно 2.

Приведем другие примеры распределения Пуассона.

Радиоактивный распад. Это случайный процесс, и распад отдельного атома не зависит от числа уже распавшихся атомов. Из многих миллионов атомов радия распадается очень маленький их процент.
Число отказов в сложном механизме, число поломок автомобилей большого автомобильного парка, количество сбоев в компьютерной системе за какой-то период времени, число телефонных вызовов в единицу времени на телефонной станции.

Распределение Пуассона широко используется также в страховой практике. Число страховых выплат за какой-то период времени подчиняется распределению Пуассона.

Пример 2.1.13. В урне 5 шаров, из которых 3 белых и 2 черных. Из урны наудачу выбирается 3 шара (выборка без возвращения). Построить распределение числа белых шаров в выборке. Найти числовые характеристики распределения. Рассмотреть случай выборки с возвращением.

Решение. Обозначим $X-$число белых шаров в выборке. Случайная величина, равная числу элементов одного типа в выборке, состоящей из n элементов $N-$множества с двумя типами элементов (K элементов одного типа и $N-K$ – другого), имеет ***гипергеометрическое распределение*** с параметрами n, N, K и принимает значения от $\max\left\{0,\ \left|N-K-n\right|\right\}$ до $\min\left\{n,K\right\}$ с вероятностями $$P(X=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}. \qquad \{0.1\}$$

В нашем случае $n=3,\ N=5,\ K=3,\ N-K=2.$ X принимает значения 1, 2, 3. с вероятностями: $P\left(X=1\right)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$,

$$P\left(X=2\right)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10},\quad P\left(X=3\right)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

Таблица распределения вероятностей:

$X=k$	1	2	3
$P\left(X=k\right)$	0.3	0.6	0.1

Проверка: $\sum p_k=1.$

Числовые характеристики гипергеометрического распределения:

$$MX = \frac{nK}{N}, \; DX = \frac{nK}{N-1}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right). \qquad (2.1.17)$$

Получаем: $MX = 1.8, \; DX = 0.36$.

В случае выборки с возвращением случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметром $p = 3/5$. Рассмотрите этот случай самостоятельно.

Гипергеометрическое распределение также используется при контроле качества продукции. Например, при поступлении партии товара в магазин проверяется не вся партия, а только выборка из нее. Если количество бракованных изделий в выборке превышает некоторое заданное значение, вся партия бракуется. При этом, допустимое количество бракованных изделий определяется по заданной допустимой вероятности брака из гипергеометрического распределения. При поступлении больших партий товара для контроля качества можно использовать геометрическое распределение.

Задачи для самостоятельного решения по теме 2.1 (д.с.в.)

1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1;\\ 0.3, & при\ 1<x\le 3;\\ 0.7, & при\ 3<x\le 4;\\ 1, & при\ x>4.\end{cases}$$

Построить таблицу распределения случайной величины X, найти ее числовые характеристики: числовые характеристики: математическое, моду, дисперсию, стандартное отклонение.

2. Дан закон распределения случайной величины X

x_i	-1	0	1
p_i	0.20	0.35	0.45

Построить ее функцию распределения. Найти числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию.

3. В лотерее на 100 билетов разыгрывается два выигрыша на сумму 2000 рублей и 600 рублей. Стоимость билета 100 рублей. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для лица, купившего два билета. Найти математическое ожидание выигрыша.

4. Среднее число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи в час равно 30. Составить закон распределения случайной величины X – числа вызовов в минуту. Найти математическое ожидание и дисперсию распределения. Найти вероятность того, что а) в течение минуты поступит не менее двух вызовов, в) не более трех вызовов.

5. Вероятность появления брака на автоматической линии равна 0.001. Линия работает без прерывания до появления первого бракованного изделия. Составить закон распределения числа произведенных изделий между двумя последовательными прерываниями. Найти его числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию.

Контрольные вопросы к теме 2.1 (д.с.в.)

1. Что называется случайной величиной (с.в.)?
2. Какие события могут происходить со случайной величиной?
3. Что представляет собой закон распределения с.в.?
4. Что такое функция распределения с.в. и какие ее свойства?
5. Что отличает дискретные с.в. от непрерывных?
6. Как называются и как выглядят основные виды законов д.с.в.?
7. Что представляют собой параметры распределения?
8. Что определяют основные числовые характеристики?
9. Чем параметры отличаются от числовых характеристик?
10. Как определяются основные числовые характеристики д.с.в.?
11. Что представляет собой биномиальный закон распределения и как его числовые характеристики выражаются через параметры?

ТЕМА 2.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные *понятия*:

- *свойства функции и плотности непрерывных распределений,*
- *формулы для числовых характеристик*
- *квантиль и критические точки распределения*
- *основные типы распределений (равномерное, показательное и (стандартное) нормальное),*
- *гауссова кривая и функция Лапласа,*
- *выражение характеристик через параметры*
- *правило трех сигм*.

Литература: [1] – гл. 10, 11, 12, 13; [2] – гл. 6; [5] – гл. 2, п. 2.4; 2.5; 2.7;

Пример 2.2.1. Дана функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0;\\ x^2/4, & при\ 0<x\le 2;\\ 1, & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти: а) функцию плотности и числовые характеристики распределения; б) $P(X\ge 1)$, $P(1<X<3)$; в) уровень δ для *квантиля случайной величины* $x_\delta = 1/2$.

Решение. а) Функция распределения случайной величины X непрерывна во всей области определения. Согласно свойствам функции плотности, функция распределения является ее первообразной, т.е. $$F'(x)=f(x). \qquad (2.2.1)$$

Тогда $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1;\\ x/2, & при\ 0<x\le 2;\\ 0, & при\ x>2.\end{cases}$$

Для непрерывной случайной величины *математическое ожидание, второй начальный момент и дисперсия* определяются формулами:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \qquad (2.2.2)$$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx, \qquad (2.2.3)$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - MX\right)^2 f(x)dx. \qquad (2.2.4)$$

Так как плотность задана различными выражениями на интервалах $(-\infty,1], (1,2]$ и $(2,\infty)$, разобьем каждый из интегралов на три интеграла:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$MX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} x^2\frac{x}{2}dx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \int_{0}^{2} \frac{x^3}{2}dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 = 2.$$

Дисперсию найдем, используя свойство: $DX = MX^2 - (MX)^2$.

$DX = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$. Такой же результат мы получим, используя для вычисления определение дисперсии {2.4}.

б) События $\{X \geq 1\}$ и $\{X < 1\}$ несовместимы и образуют полную группу, поэтому

$$P\left(X \geq 1\right) = 1 - P\left(X < 1\right), \qquad (2.2.5)$$

$P\left(X < 1\right) = F(1)$, $P\left(X \geq 1\right) = 1 - F\left(1\right) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Из свойств функции распределения следует, что вероятность попадания случайной величины X в интервал $[a,b)$

$$P\left(a \leq X < b\right) = F(b) - F(a). \qquad (2.2.6)$$

При этом для непрерывных случайных величин из условия, что $P\left(X = a\right) = P\left(Y = b\right) = 0$ следует, что

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b). \qquad (2.2.7)$$

Тогда вероятность попадания X в интервал $(1,3)$:

$$P\left(1 < X < 3\right) = F(3) - F(1) = 1 - 1/4 = 3/4.$$

в) Квантиль уровня δ распределения случайной величины X определяется как число x_δ, такое что $F(x_\delta) = P(X < x_\delta) = \delta$.

Следовательно, искомый уровень $\delta = F\left(1/2\right) = \left.\left(x^2/4\right)\right|_{x=1/2} = 1/16$.

Квантиль уровня 1/2 $x_{1/2}$ называется *медианой* распределения.

Для данного распределения $x_{1/2} = 1$, так как $F(1) = P\left(X < 1\right) = 1/2$.

Пример 2.2.2. Задана плотность распределения случайной величины *X:* $f(x)=\begin{cases} c\cos x, & при\ |x|\le \pi/2; \\ 0, & при\ |x|>\pi/2. \end{cases}$

Найти: а) константу c, б) функцию распределения, в) математическое ожидание и дисперсию распределения, г) моду и медиану распределения, д) вероятность попадания в интервал $(\pi/6,\pi)$.

Решение. а) Для определения константы c, воспользуемся свойством функции плотности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.2.8)$$

Так как плотность задана различными аналитическими выражениями на интервалах $(-\infty,-\pi/2)$, $(-\pi/2,\pi/2)$ и $(\pi/2,\infty)$, разобьем интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ на три интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cos xdx + \int_{\pi/2}^{\infty} 0dx = c\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2c = 1,$$

откуда $c = 1/2$.

б) Из определения плотности распределения случайной величины следует, что функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2.2.9)$$

Так как функция $f(x)$ задана различными аналитическими выражениями на отрезках $(-\infty,\pi/2]$, $(-\pi/2,-\pi/2]$ и $(-\pi/2,\infty]$, найдем функцию распределения на каждом из этих отрезков.

$$x \le -\pi/2: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0,$$

$$-\pi/2 < x \le \pi/2: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{x} \cos tdt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\pi/2}^{x} = \frac{\sin x + 1}{2}$$

$$x > \pi/2: \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos xdx + \int_{\pi/2}^{x} 0dx = \frac{1}{2}\sin x\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1$$

Таким образом, $F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x \le -\pi/2; \\ \dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}, & при\ -\pi/2 < x \le \pi/2; \\ 1, & при\ x > \pi/2. \end{cases}$

в) $MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{\infty} 0dx = 0$, (2.2.10)

согласно свойствам: определенный интеграл с симметричными пределами от нечетной функции равен нулю; $\int\limits_a^b 0dx = 0$.

$$MX^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{\infty} 0dx = \tag{2.2.11}$$

$$= \left(x^2\sin x + 2x\cos x + 2\sin x\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi^2/2+4$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \pi^2/2+4. \tag{2.2.12}$$

г) Модальное значение (мода) непрерывной случайной величины определяется как значение $x_{мод.}$, при котором функция плотности достигает максимума. Необходимым условием экстремума функции является равенство нулю ее первой производной: $f'(x)=(\cos x)'=\sin x$, $f'(x)=0$ в точках $x=k\pi$. В области определения функции $f(x)$ лежит только значение $x=0$, следовательно $x_{мод.}=0$.

Медиана определяется как значение случайной величины $x_{мед.}$, такое что $P\left(X > x_{мед.}\right)=P\left(X < x_{мед.}\right)=0.5$. С помощью функции распределения это условие можно записать в виде

$$F\left(x_{мед.}\right)=1-F\left(x_{мед.}\right), \text{ откуда } F\left(x_{мед.}\right)=0.5. \tag{2.2.13}$$

В данном случае $F\left(x_{мед.}\right)=0.5\left(\sin x_{мед.}+1\right)=0.5$, откуда $\sin x_{мед.}=0$ и $x_{мед.}=0$. Получаем, что $x_{мед.}=x_{мод.}=MX$.

Для симметричного распределения значение моды и медианы всегда совпадает с математическим ожиданием.

д) $P(\pi/6 \le X < \pi) = F(\pi) - F(\pi/6) = 1 - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

При решении задач 2.2.3–2.2.6 можно воспользоваться таблицей 2 (стр.40), в которой приведены основные непрерывные распределения, их функции распределения, функции плотности, параметры распределений, формулы для вычисления вероятностей, связь числовых характеристик с параметрами.

Пример 2.2.3. Единица шкалы прибора равна 0.1. Записать функцию распределения, функцию плотности случайной величины X, построить их графики. Найти числовые характеристики. Определить вероятность того, что систематические ошибки измерения X не превышают 0.01.

Решение. Показания прибора обычно округляются до ближайшего целого деления шкалы. Поэтому систематическая ошибка прибора есть случайная величина X, имеющая ***равномерное распределение*** на отрезке $[0; 0.05]$. Параметры распределения $a = 0,\ b = 0.05$. Функция распределения и плотность

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 20x, & 0 \le x \le 0.05; \\ 1, & x > 0.05. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 20, & 0 \le x \le 0.05; \\ 0, & x > 0.05. \end{cases}$$

Графики этих функций показаны на рис. 3.

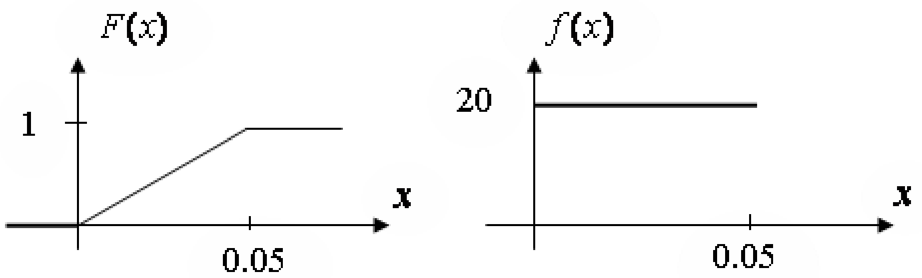


Рис. 3

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$MX = \frac{a+b}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025,\ DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(0.05)^2}{12} = 0.002.$$

Используя определение функции распределения $F(x) = P(X < x)$, получим $P(X < 0,01) = F(0,01) = 20 \cdot 0,01 = 0.2$. Вероятность $P(X < 0,01)$ можно вычислить, как вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;0,01)$: $P(0<X<0,01)=\dfrac{0,01}{0,05}=0,2$.

Равномерное распределение имеют также систематические ошибки округления, время ожидания транспорта, имеющего определенный интервал движения. Если, например, количество сбоев в сложной системе имеют распределение Пуассона, то затраты на восстановление – равномерное распределение.

Пример 2.2.4. Время между двумя **с**боями вычислительной машины T есть случайная величина, имеющая ***показательное распределение***, с математическим ожиданием, равным 400 часов. Записать функцию распределения, функцию плотности случайной величины T, построить их графики. Найти вероятность того, что время между двумя сбоями: а) не превысит 300 часов, б) составит от 100 до 200 часов.

Решение. Из формулы для математического ожидания параметр показательного распределения $\alpha = 1/MT = 1/400$. Функция распределения и плотность:

$$F(t)=P(T<t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-t/400}, & t\ge 0\end{cases}, \qquad f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{400}e^{-t/400}, & t\ge 0.\end{cases}$$

Графики функций распределения и плотности (рис. 4):

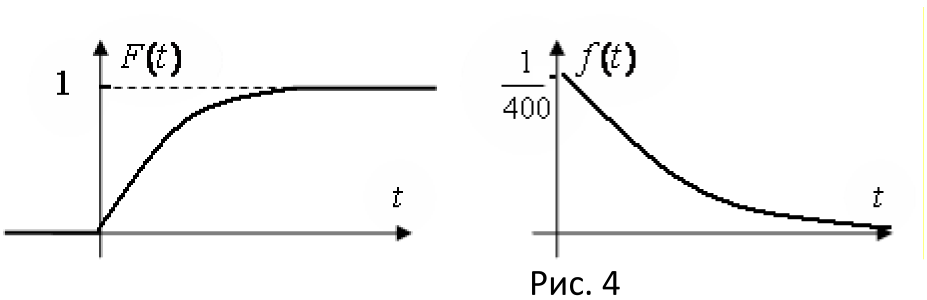


Рис. 4

$$P(T<300)=F(300)=e^{-300/400}=e^{-3/4}=0,4724$$

$$P(100<T<200)=F(200)-F(100)=e^{-1/4}-e^{-2/4}=0,1723$$

Показательное распределение имеет, например, срок службы технических изделий.

Пример 2.2.5. Прибор состоит из четырех независимо работающих элементов, надежности которых равны 0.99. Найти надежность прибора.

Решение. Пусть T – длительность безотказной работы прибора. Функция надежности

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t} \qquad (2.2.14)$$

равна вероятности безотказной работы за время t. Параметр α называют интенсивностью отказов (число отказав в единицу времени). Если прибор имеет надежность 0.99, это означает, что на основании длительных серий испытаний установлено, что в среднем этот прибор на протяжении 99% заданного промежутка времени работает безотказно. Для сложного механизма со многими элементами надежность равна произведению надежностей этих элементов, если они работают независимо друг от друга.

Тогда надежность прибора равна $(0.99)^4 \approx 0.96$. Очевидно, что, чем сложнее механизм, тем меньше его надежность.

Отметим здесь связь между показательным распределением и распределением Пуассона. Число сбоев сложного механизма имеет распределение Пуассона, время безотказной работы – показательное распределение. Число телефонных звонков, регистрируемых на АТС – распределение Пуассона, время телефонных переговоров – показательное распределение. Время ремонта автомобиля в сервисном центре – показательное распределение, число заказов – распределение Пуассона. В страховой практике число требований о выплате имеет распределение Пуассона, период времени до требования о выплате или между двумя выплатами и размер страховых выплат – показательное распределение. В случае больших выплат – это распределение Парето (распределение с большим хвостом).

Пример 2.2.6. Средний процент выполнения плана предприятиями некоторой отрасли равен 106% со стандартным отклонением 3%. Полагая, что процент выполнения плана есть случайная величина, имеющая ***нормальное распределение***, записать ее функцию плотности. Найти долю предприятий: а) не выполняющих плана, б) выполняющих план от 110 до 150%, в) для которых отклонение от среднего составляет 2%.

Решение. Пусть X – процент выполнения плана. По условию, $MX = 106$. Параметры распределения: $a = MX = 106$, $\sigma^2 = DX = 9$. Тогда функция плотности $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-106)^2}{18}}$.

а) Доля предприятий, не выполняющих плана.

Вероятность $P(X < x) = \Phi_{a,\sigma^2}(x) = \Phi_{0,1}\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$. (2.2.15)

Тогда $P(X < 100) = \Phi_{0,1}\left(\dfrac{100-106}{3}\right) = \Phi_{0,1}(-2) = 1 - \Phi_{0,1}(2) =$
$= 1 - 0.9772 = 0.0228$. Следовательно, в среднем около 2,3% предприятий не выполняют план.

б) Доля предприятий, выполняющих план от 110 до 150%. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал задается формулой:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) \qquad (2.2.16)$$

$$P(110 < X < 150) = \Phi_{0,1}\left(\frac{150-106}{3}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{110-106}{3}\right) =$$
$$= \Phi_{0,1}(1.46) - \Phi_{0,1}(1.33) = 0.4279 - 0.4082 = 0.0197.$$

В среднем 2% предприятий выполняют план от 110 до 150%.

в) Вероятность отклонения значений X от математического ожидания a задается формулой

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi_{0,1}\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1. \qquad (2.2.17)$$

Тогда доля предприятий, для которых отклонение от среднего значения составляет 2%, определяется вероятностью

$$P\left(|X - 100| < 2\right) = 2\Phi_{0,1}\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = 2\Phi_{0,1}(0.66) - 1 = 2 \cdot 0.7454 - 1 \approx 0.49$$

Замечание 1. Функция $\Phi_{0,1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ есть функция распределения стандартного нормального распределения с параметрами; $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Эта функция табулирована [3]. Во многих учебниках табулирована не функция распределения, а функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} dt$ [1], [2]. Связь между ними: $\Phi_{0,1}(x) = 0.5 + \Phi(x)$. $\Phi(x)$ – нечетная функция, поэтому $\Phi(0) = 0$; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. В конце данного пособия приводится в разделе Таблицы вторая функция, т.е. $\Phi(x)$.

При этом, $$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \tag{2.2.18}$$

$$P(x_1<X<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \tag{2.2.19}$$

Замечание 2. Отметим, что вероятность того, что значение случайной величины попадает в некоторый интервал на числовой прямой, равна площади соответствующей области под кривой плотности распределения. В случае нормального распределения более правдоподобным оказывается наблюдение значений, расположенных вблизи центра кривой, где кривая выше. Вблизи краев, где кривая проходит ниже, наблюдение соответствующих значений оказывается менее правдоподобным.

Нормальное распределение имеют случайные ошибки результатов измерений, многие экономические показатели.

Часто случайная величина X по своей природе принимает только положительные значения. Например, время, длина, вес, цены. Распределение в этом случае не симметрично. В этом случае логарифмирование значений X приводит к приближенно нормальному распределению.

Задачи для самостоятельного решения по теме 2.2 (н.с.в.)

1. Задана функция распределения случайной величины X
$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0;\\ x/4, & при\ 0<x\le 4;\\ 1, & при\ x>4.\end{cases}$$
Найти: а) функцию плотности и числовые характеристики распределения; б) $P(X\ge 1)$; в) $P(3<X<5)$.
2. Задана плотность распределения случайной величины X
$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0\ и\ x>\pi;\\ c\sin x, & при\ 0<x\le \pi.\end{cases}$$
Найти: а) константу c, б) функцию распределения $F(x)$, в) числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсию распределения, д) вероятность попадания в интервал $(\pi/3, 3\pi/2)$.
3. Автобусы идут с интервалом 5 минут. Записать функции распределения и плотности случайной величины X – времени ожидания автобуса пассажиром, подошедшим к остановке в произвольный момент времени. Построить их графики. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X. Вычислить вероятность того, что время ожидания а) не превысит трех минут, б) составит от двух до четырех минут.
4. Случайная величина T – время работы радиолампы имеет показательное распределение. Среднее время работы радиолампы 400 часов. Записать функции распределения и плотности распределения. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов.
5. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X контролируемого размера от номинала не превышает 10 нм. Точность изготовления деталей характеризуется стандартным отклонением $\sigma=5$ нм. Считая, что X имеет нормальное распределение: а) записать функцию плотности случайной величины X, б) выяснить, сколько процентов годных деталей изготавливает автомат, в) определить, какой должна быть точность изготовления, чтобы процент годных деталей повысился до 98.

Контрольные вопросы к теме 2.2 (н.с.в.)

1. Что такое функция плотности для н.с.в. и, какие она имеет свойства?
2. Какой геометрический смысл вероятности на «языке» функции распределения и функции плотности?
3. По каким формулам определяются числовые характеристики законов распределения н.с.в?
4. Как выглядят функции распределения и функции плотности для равномерного, показательного и нормального распределений?
5. Что называется «гауссовой кривой» и, что она собой определяет?
6. Как выглядит функция Лапласа (выражение и график) и, какие она имеет свойства?
7. В чем состоит правило 3-х сигм?

ТЕМА 2.3. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Основные *понятия*:

- *Неравенства Чебышева и Маркова,*
- *Теорема Бернулли*
- *Центральная предельная теорема (ЦПТ)*
- *Закон распределения суммарной ошибки округления*.

Литература: [1] – гл. 9; [2] – гл. 5; [5] – гл. 5, п. 3.1–3.8;

Пример 2.3.1. В 400 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0.8. С помощью неравенства Чебышева оценить: а) вероятность того, что разность между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов не превышает 20; б) вероятность того, что эта разность будет меньше трех стандартных отклонений.

Решение. а) Неравенство Чебышева имеет вид

$$P\left(|X - MX| > \varepsilon\right) \le \frac{DX}{\varepsilon^2} \qquad (2.3.1)$$

Число успехов X в испытаниях Бернулли имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами $n = 400$ и $p = 0,8$. Среднее число успехов равно $MX = np = 400 \cdot 0,8 = 320$. Дисперсия $DX = np(1-p) = 400 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 64$. Согласно неравенству Чебышева, $P\left(|X - 320| > 20\right) \le \dfrac{64}{400} \approx 0,16$. Это верхняя граница вероятности противоположного события «превышает». Нижнюю границу вероятности исходного события «не превышает» определим, используя неравенство Чебышева в форме $P\left(|X - EX| < \varepsilon\right) \ge 1 - \dfrac{DX}{\varepsilon^2} = 0,84$.

б) $P\left(|X - EX| < 3\sigma\right) \ge 1 - \dfrac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} \approx 0,8889$. Эта оценка называется правилом *трех сигм*. Для непрерывной случайной величины, имеющей нормальное распределение, эта вероятность равна 0,9973.

Пример 2.3.2. Опыт страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый десятый договор. С помощью неравенства Чебышева оценить необходимое количество договоров, которые следует заключить, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9 можно было утверждать, что доля страховых случаев отклонится по абсолютной величине от 0,1 не более чем на 0,01.

<u>Решение</u>. Число страховых случаев за определенный период времени подчиняется биномиальному распределению, для которого неравенство Чебышева принимает вид $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\le\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ или

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \qquad (2.3.2)$$

По условию задачи $p=0.1, \varepsilon=0.01$. Тогда $P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|\le 0.01\right)\ge 1-\frac{0.1\cdot 0.9}{n\cdot 10^{-4}}\ge 0.9$, откуда $\frac{0.1\cdot 0.9}{n\cdot 10^{-4}}\le 0.1$, и необходимое количество договоров $n\ge 9\cdot 10^3=9000$.

Пример 2.3.3. Среднее изменение курса акции компании в течении биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что в течение ближайших торгов курс изменится более, чем на 3%.

<u>Решение</u>. Для неотрицательной случайной величины при неизвестной дисперсии оценку вероятности можно сделать с помощью неравенства Маркова $P(X>a)\le\frac{MX}{a}$. (2.3.3)

Пусть X – изменение курса акций. По условию задачи $MX=0.3$, $a=3$. Тогда $P(X\ge 3)\le\frac{0.3}{3}=0.1$

Пример 2.3.4. Монета подбрасывается 10000 раз. Оценить вероятность того, что частота выпадения герба отличается от вероятности более чем на 0,01.

<u>Решение.</u> Закон больших чисел утверждает, что относительная частота события должна быть близка к вероятности события, если эксперимент проведен много раз. Следствием закона больших чисел является теорема Бернулли: если p – вероятность

«успеха» в одном испытании Бернулли, а k – число «успехов» в n испытаниях, то при $n \to \infty$, $\frac{k}{n} \xrightarrow{P} p$.

При этом $$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \le \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}. \qquad (2.3.4)$$

Эта теорема позволяет оценить вероятность того, что частота «успехов» в n испытаниях отличается от вероятности «успеха» в одном испытании более чем на заданное число ε. Применяя теорему в виде (2.3.4) получим следующую оценку: $P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0.01\right) \le \frac{p(1-p)}{n\,0.01^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{10^4 10^{-4}} = \frac{1}{4}$. Этот результат означает, что не более чем в четверти случаях при 10000 подбрасываниях монеты частота выпадения герба отличается от вероятности более чем на 0,01.

Оценим эту же вероятность с помощью приближенной формулы Лапласа. Согласно теореме Лапласа при $n \to \infty$ случайная величина $\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ имеет приближенно ***стандартное нормальное распределение*** и

$$P\left(x_1 \le \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x_2\right) = \Phi_{0,1}(x_2) - \Phi_{0,1}(x_1). \qquad (2.3.5)$$

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Из условий задачи: $n = 10000$, $\varepsilon = 0.01$, $p = 1/2$. Тогда

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le 0.01\right) = P\left(-\frac{10^4 \cdot 10^{-2}}{50} \le \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{10^4 \cdot 10^{-2}}{50}\right) =$$

$$= P\left(-2 \le \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 2\right) = \Phi_{0,1}(2) - \Phi_{0,1}(-2) = 2\Phi(2) =$$

$$= 2 \cdot 0.4772 = 0.9544$$

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0.01\right) = 1 - P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| \le 0.01\right) = 0,0456 \approx 0,05.$$

Оценка по теореме Бернулли дала вероятность 0,25. Более точная оценка по формуле Лапласа показала, что не более чем в

5% случаев при 10000 подбрасываниях монеты частота выпадения герба отличается от вероятности более чем на 0,01.

Пример 2.3.5. Независимые случайные величины X_i распределены ***равномерно*** на отрезке $\left[0,1\right]$. Найти: а) оценку закона распределения случайной величины $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$ в виде функции плотности; б) вероятность того, что $55<Y<70$.

Решение. Если случайные величины X_i независимы и одинаково распределены, то, согласно центральной предельной теореме (ЦПТ), случайная величина $\sum_i X_i$ имеет приближенно ***нормальное распределение*** при $n\to\infty$, независимо от того, какое распределение имеют величины X_i. Тогда случайная величина $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$ имеет плотность распределения приближенную к плотности нормального закона $f(y)=\dfrac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)$, где a_Y и σ_Y – параметры распределения.

По формулам для математического ожидания и дисперсии равномерного распределения находим: $MX_i=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$, $DX_i=\dfrac{(1-0)^2}{12}=\dfrac{1}{12}$, $\sigma_{X_i}=\dfrac{1}{\sqrt{12}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Математическое ожидание и дисперсия суммы независимых случайных величин равны суммам их математических ожиданий и дисперсий соответственно:

$$MY=M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=\sum_{i=1}^{100} MX_i=MX_i\cdot 100=\frac{1}{2}\cdot 100=50,$$

$$DY=D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=\sum_{i=1}^{100} DX_i=\frac{1}{12}\cdot 100=\frac{25}{3}.$$

Параметры нормального распределения случайной величины Y: $a_Y=MY=50$, $\sigma_Y=\sqrt{DY}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$. Тогда плотность распределения: $f(y)=\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{3(y-50)^2}{50}\right)$.

б) Вероятность попадания случайной величины, имеющей распределение близкое к нормальному, в интервал (y_1, y_2), определяется формулой $P(y_1 < Y < y_2) = \Phi\left(\frac{y_1 - a_Y}{\sigma_Y}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - a_Y}{\sigma_Y}\right)$,

Тогда $P(55 < Y < 70) = \Phi\left(\frac{70-50}{5/\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{5/\sqrt{3}}\right) =$

$= \Phi(4\sqrt{3}) - \Phi(\sqrt{3}) = \Phi(6{,}93) - \Phi(1{,}73) = 1 - 0{,}9582 = 0{,}0418.$

Замечание. Согласно ЦПТ, случайная величина $Z = \frac{\sum_i X_i - nMX_i}{\sqrt{nDX}}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Задачи для самостоятельного решения по теме 2.3

1. 500 раз подбрасывается игральная кость. Какова вероятность того, что частота выпадения шестерки отклонится от классической вероятности на 0,05?
2. Дисперсия каждой из 3600 независимых случайных величин равна 5. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превысит 0,25.
3. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0.975, утверждать, что частота выпадения герба попадает в интервал (0.4, 0.5). Использовать для оценки неравенство Чебышева.
4. Средний размер вклада в отделении банка равен 6000 рублей. Оценить вероятность того, что случайно взятый вклад не превысит 10000 рублей.
5. Складывается 1000 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3}. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,998 заключена суммарная ошибка. Предполагается, что ошибки округления каждого числа независимы и равномерно распределены в интервале $\left(-0{,}5\cdot 10^{-3}; 0{,}5\cdot 10^{-3}\right)$.

Контрольные вопросы по теме 2.3 (ЗБЧ и ЦПТ)

1. Запишите формулы для неравенств Чебышева и поясните, в чем их смысл?
2. Запишите формулу для неравенств Маркова и поясните, в чем ее смысл?
3. Как формулируется теорема Бернулли и поясните, в чем состоит ее смысл?
4. Сформулируйте предельную центральную теорему.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ 2.1–2.2

1. Соответствие характеристик с.в. их определениям

1) Математическое ожидание;	a) значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность;
2) Дисперсия;	b) взвешенное среднее всех возможных значений X, в которых в качестве весов выступают соответствующие вероятности;
3) Медиана.	c) математическое ожидание квадратов отклонений значений X от их среднего;
	d) средневероятное значение случайной величины.

2. Соответствие характеристик ДСВ определяющим их формулам:

1) Математическое ожидание;	a) $\sum_i (x_i - MX)^2 p_i$;
2) Дисперсия;	b) $\sum_i x_i p_i$;
3) Медиана.	c) $P(X < x_\delta) = \delta$;
	d) $P\left(X > x_{мед.}\right) = P\left(X < x_{мед.}\right) = 0.5$.

3. Соответствие закона распределения его аналитическому заданию:

1) Биномиальный;	a) $P\left(X = k\right) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$;
2) Гипергеометрический;	b) $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
3) Пуассона;	c) $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$;
	d) $P(X = k) = \dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$.

4. Соответствие закона распределения случайной величины формуле определяющим ее математическое ожидание

1) $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$;

2) $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$;

3) $P\left(X=k\right)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$;

4) $P(X=k)=\dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$.

a) $MX=\dfrac{nK}{N}$;

b) $MX=\lambda$;

c) $MX=np$;

d) $MX=1/p$.

5. Числовыми характеристиками центра диапазона значений с.в. являются:

a) математическое ожидание;
b) медиана;
c) мода;
d) стандартное отклонение.

6. Числовыми характеристиками разброса значений случайной величины являются:

a) дисперсия,
b) стандартное отклонение,
c) математическое ожидание.

7. При увеличении всех значений случайной величины в ***a*** раз, ее математическое ожидание:

a) не изменится;
b) увеличится в a раз;
c) увеличится в a^2 раз.

8. При увеличении всех значений случайной величины на ***a*** единиц, ее математическое ожидание:

a) не изменится;
b) увеличится на a единиц;
c) уменьшиться на a единиц.

9. При увеличении всех значений случайной величины в ***a*** раз, ее дисперсия:

a) не изменится; b) увеличится в a раз;
c) увеличится в a^2 раз.

10. При увеличении всех значений случайной величины на ***a*** единиц, ее дисперсия:

a) увеличится на a единиц ;

b) увеличиться на a^2 единиц;

c) не изменится.

11. Соответствие между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом _______ случайной величины.

12. Функция, задающая вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(-\infty, x)$, называется функцией _______ случайной величины.

13. Неотрицательная функция $f(x)$, через которую выражается функция распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, называется функцией _______ распределения.

14. Свойствами функции распределения являются:

a) $0 \le F(x) \le 1$;

b) $-\infty < F(x) < \infty$.

c) функция $F(x)$ неубывающая;

d) функция $F(x)$ возрастающая;

e) $F(x_0 + 0) - F(x_0) = P(X = x_0)$.

15. Свойствами функции плотности **не являются:**

a) $f(x) < 0$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

c) $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$;

d) $\int F(x)dx = f(x)$;

e) $P(a \le X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

16. Соответствие характеристик н.с.в. выражениям (или формулам) , их определяющим:

1) Математическое ожидание;	a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx;$
2) Медиана;	b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$
3) Дисперсия;	c) $\int\limits_{-\infty}^{x_\delta} f(x)dx = \delta;$
4) Квантиль уровня □□	d) $\int\limits_{-\infty}^{x_{me}} f(x)dx = 0.5.$

17. Соответствие (закона) распределения его аналитическому выражению (плотности распределения):

1) Равномерное;	a) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};$
2) Показательное;	b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$
3) Нормальное.	c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \ge 0. \end{cases}$

18. Соответствие закона распределения случайной величины ее математическому ожиданию:

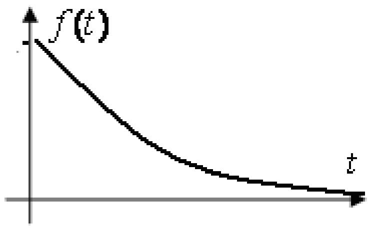
1) $f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$ a) $MX=\alpha;$

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \alpha e^{-\alpha x}, & x\ge 0.\end{cases}$ b) $MX=\dfrac{a+b}{2};$

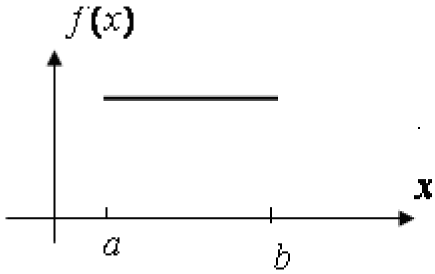
3) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$ c) $MX=a.$

19 . Соответствие функции плотности распределения с.в. ее графику:

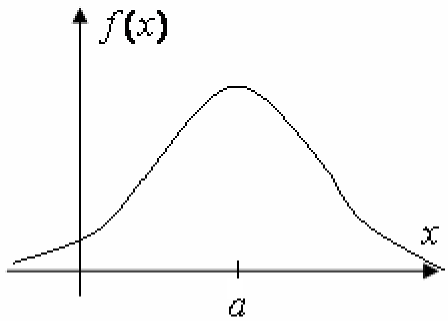
1) $f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$

a) 

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};$

b) 

3) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \alpha e^{-\alpha x}, & x\ge 0.\end{cases}$

c) 

ЧАСТЬ 3. СОВМЕСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные понятия:

- совместное распределение двух случайных величин
- таблица совместного распределения двух дискретных случайных величин
- функция распределения двух случайных величин
- плотность распределения двух случайных величин
- независимость двух случайных величин
- условное распределение одной из случайных величин при заданном значении другой
- условное математическое ожидание одной из случайных величин при заданном значении другой
- ковариация, коэффициент корреляции двух случайных величин.

ТЕМА 3.1. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Литература: [1] – гл. 14, § 1–6; [5] – гл. 3, п. 3.1–3.8; [2] – гл. 8, § 1, 2;

Пример 3.1.1. Задано совместное дискретное распределение случайных величин X, Y: $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = kx_i y_j$, где $k -$положительная константа. Случайные величины X и Y могут принимать целые значения 1, 2, 3. Построить таблицу совместного распределения случайных величин X, Y, таблицы распределения каждой из случайных величин в отдельности. Найти вероятность $P\left(X + Y > 5\right)$.

Решение. Константу k найдем из условия $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1$.
$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} kx_i y_j = к + 2к + 3к + 2к + 4к + 6к + 3к + 6к + 9к = 36k = 1$,
откуда $k = 1/36$. Тогда таблица совместного распределения случайных величин X, Y имеет вид

$X \setminus Y$	1	2	3	$p_{\bullet j}$
1	1/36	2/36	3/36	6/36
2	2/36	4/36	6/36	12/36
3	3/36	6/36	9/36	18/36
$p_{i\bullet}$	6/36	12/36	18/36	1

На пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца таблицы стоит число
$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = \dfrac{1}{36} x_i y_j$.

Распределение каждой из случайных величин в отдельности получим с помощью суммирования по столбцам и строкам соответственно: $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}$, $p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}$. Эти распределения приведены в последнем столбце и последней строке таблицы. Суммирование вероятностей в них, очевидно, также дают 1.

Событию $\{X+Y>5\}$ соответствует ровно один исход случайного эксперимента $\{X=3, Y=3\}$. Вероятность этого исхода $P(X+Y>5)=P(X+Y=6)=P(X=3, Y=3)=1/4$.

Пример 3.1.2. Задана таблица совместного распределения случайных величин X, Y

$X \setminus Y$	–1	0	1
1	0.15	0.30	0.35
2	0.05	0.05	0.10

Построить функцию распределения случайных величин X, Y.

Решение. По определению, функция совместного распределения двух случайных величин X, Y: $F(x,y)=P(X<x, Y<y)$.

В области $(x \le 1) \cup (y \le -1)$: $F(x, y)=P(X<1, Y<-1)=0$, так как X не принимает значений меньше 1, а Y – меньше -1.

В прямоугольнике $(1<x\le 2) \cap (-1<y\le 0)$:

$F(x,y)=P(X<2, Y<0)=P(X=1, Y=-1)=0.15$.

$(1<x\le 2)\cap(0<y\le 1)$: $F(x,y)=P(X<2, Y<1)=$

$$=P(X=1, Y=-1)+P(X=1, Y=0)=0.15+0.30=0.45,$$

$(1<x\le 2)\cap(y>1)$: $F(x,y)=P(X<2, Y<\forall y\in(1,\infty))=$

$$=P(X=1, Y=-1)+P(X=1, Y=0)+P(X=1, Y=1)==0.80,$$

$(x>2)\cap(-1<y\le 0)$: $F(x,y)=P\big(X<\forall x\in(2,\infty), Y<0\big)=$

$$=P(X=1, Y=-1)+P(X=2, Y=-1)=0.15+0.05=0.20,$$

$(x>2)\cap(0<y\le 1)$: $F(x,y)=P\big(X<\forall x\in(2,\infty), Y<1\big)=$

$$=0.15+0.05+0.30+0.05=0.55,$$

$(x>2)\cap(y>1)$: $F(x,y)=P\big(X<\forall x\in(2,\infty), Y<\forall y\in(1,\infty)\big)=$

$$=0.15+0.05+0.30+0.05+0.35+0.10=1.$$

Представим функцию распределения в виде таблицы

$X \setminus Y$	$y\le -1$	$-1<y\le 0$	$0<y\le 1$	$y>1$
$x\le 1$	0	0	0	0
$1<x\le 2$	0	0.15	0.45	0.80
$x>2$	0	0.20	0.55	1

Функция распределения имеет ступенчатый вид и имеет разрывы при тех значениях x и y, при которых вероятности $P(X=x, Y=y)$ отличны от нуля. При этом вероятность $P(X=x,\ Y=y)=F(x+0,\ y+0)-F(x,+0)-F(x+0,\ y)+F(x,y)$, т.е. равна величине скачка функции распределения в точке $(x,\ y)$.

Пример 3.1.3. Функция распределения случайных величин X,Y $F(x,y)$ задана в виде таблицы:

$X \setminus Y$	$y \le 1$	$1 < y \le 2$	$2 < y \le 3$	$y > 3$
$x \le 2$	0	0	0	0
$2 < x \le 4$	0	0.25	0.30	0.40
$x > 4$	0	0.40	0.75	1

Построить таблицу совместного распределения случайных величин X,Y.

Решение. Из таблицы видим, что функция распределения имеет ступенчатый вид и терпит разрывы при значениях $x=2;4$ и $y=1;2;3$. Следовательно, случайные величины X и Y дискретны, и отличны от нуля только вероятности пар значений X,Y: $(2,1);(2,2);(2,3);(4,1);(4,2);(4,3)$, при этом они равны скачу функции распределения в соответствующих точках

$$P(X=x,\ Y=y)=F(x+0,\ y+0)-F(x,+0)-F(x+0,\ y)+F(x,y).$$

$$P(X=2,Y=1)=F(2+0;\ 1+0)-F(2;1+0)-F(2+0;1)+F(2;1)=$$
$$=0.25-0-0+0=0.25,$$

$$P(X=2,Y=2)=F(2+0;2+0)-F(2;2+0)-F(2+0;2)+F(2;2)=$$
$$=0.30-0-0.25+0=0.05,$$

$$P(X=2,Y=3)=F(2+0;3+0)-F(2;3+0)-F(2+0;3)+F(2;3)=$$
$$=0.4-0-0.3+0=0.1,$$

$$P(X=4,Y=1)=F(4+0;1+0)-F(4;1+0)-F(4+0;1)+F(4;1)=$$
$$=0.40-0.25-0+0=0.15,$$

$$P(X=4,Y=2)=F(4+0;\ 2+0)-F(4;2+0)-F(4+0;2)+F(4;2)=$$
$$=0.75-0.30-0.40+0.25=0.3,$$

$$P(X=4,Y=3)=F(4+0;\ 3+0)-F(4;3+0)-F(4+0;3)+F(4;3)=$$
$$=1-0.40-0.75+0.30=0.15.$$

Таблица совместного распределения случайных величин X, Y:

$X \setminus Y$	1	2	3
2	0.25	0.05	0.10
4	0.15	0.30	0.15

Сумма вероятностей по индексам i и j должна быть рана единице. Проверка: $\sum_j \sum_i p_{ij} = 1$.

Пример 3.1.4. Условия примера 4.2. Установить, зависимы ли случайные величины X и Y. Определить степень этой зависимости.

Решение. Таблица совместного распределения

$X \setminus Y$	-1	0	1
1	0.15	0.30	0.35
2	0.05	0.05	0.10

Для решения задачи нам потребуются распределения каждой из случайных величин в отдебльности. Мы их получим суммированием соответственно по столбцам $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{2} p_{ij}$ и строкам $p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{2} p_{ij}$ таблицы совместного распределения:

x_i	1	2		y_j	-1	0	1
$p_{i\bullet}$	0.80	0.20		$p_{\bullet j}$	0.20	0.35	0.45

Для независимых случайных величин $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$. Для установления зависимости X и Y, достаточно проверить, что это условие не выполняется хотя бы для одной пары значений X и Y. $p_{11} = 0.15$, $p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1} = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$. Видим, что $p_{11} \neq p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 1}$, следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

Убедиться, что случайные величины X, Y зависимы, можно также, вычислив их ковариацию. Если $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, случайные величины независимы, в противном случае они зависимы. Степень зависимости характеризуется величиной коэффициента корреляции $\rho(X,Y)$.

$\operatorname{cov}(X,Y) = M\left(\left(X - MX\right) \cdot \left(Y - MY\right)\right) = M(XY) - MX \cdot MY$,

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}.$$

Вычислим все составляющие этих формул:

$MX=1\cdot 0,8+2\cdot 0,2=1,2$, $MX^2=1^2\cdot 0,8+2^2\cdot 0,2=1,6$,

$DX=MX^2-\left(MX\right)^2=1,6-1,44=0,16$,

$MY=-1\cdot 0,2+0\cdot 0,35+1\cdot 0,45=0,25$

$MY^2=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,35+1^2\cdot 0,45=0,65$

$DY=MY^2-\left(MY\right)^2=-1,65-0,625=1,025$.

Математическое ожидание произведения случайных величин X,Y найдем, используя таблицу совместного распределения случайных величин X,Y:

$$M\left(X\cdot Y\right)=1\cdot(-1)\cdot 0,15+1\cdot 0\cdot 0,3+1\cdot 1\cdot 0,35+2\cdot(-1)\cdot 0,05+$$
$$+2\cdot 0\cdot 0,05+2\cdot 1\cdot 0,1=0,4.$$

$\operatorname{cov}(X,Y)=0,4-1,2\cdot 0,25=0,1\neq 0$,

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{0,1}{\sqrt{0,16\cdot 1,025}}\approx 0,25.$$

Полученные значения ковариации и коэффициента корреляции говорят о том, что зависимость между случайными переменными X,Y существует, при этом она положительная и достаточно слабая.

Пример 3.1.5. Задана таблица совместного распределения случайных величин X,Y

$X\setminus Y$	-1	0	1	$\sum$
1	0.15	0.30	0.35	0.8
2	0.05	0.05	0.10	0.2
$\sum$	0.2	0.35	0.45	1

Построить таблицы условного распределения случайной величины Y при $X=1$ и $X=2$. Найти условные математические ожидания $M\left(Y/X=1\right)$ и $M\left(Y/X=2\right)$.

Решение. Условное распределение случайной величины Y при заданном значении X определяется формулой

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}.$$

Вычислим вероятности:

$$P(Y = -1/ X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(X = 1)} = \frac{0.15}{0.8} = \frac{3}{16},$$

$$P(Y = 0/ X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(X = 1)} = \frac{0.30}{0.8} = \frac{6}{16},$$

$$P(Y = 1/ X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(X = 1)} = \frac{0.35}{0.8} = \frac{7}{16}.$$

Таблица условного распределения Y при $X = 1$

y_j	-1	0	1
$P(Y = y_j / X = 1)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$

Условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x_i$ равно $M\left(Y / x_i\right) = \sum_j y_j P(Y = y_j / X = x_i)$.

$$M\left(Y / X = 1\right) = \sum_j y_j P(Y = y_j / X = 1) = -1 \cdot \frac{3}{16} + 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{7}{16} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично для $X = 2$:

$$P(Y = -1/ X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = -1)}{P(X = 2)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4},$$

$$P(Y = 0/ X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 0)}{P(X = 2)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4},$$

$$P(Y = 1/ X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(X = 2)} = \frac{0.10}{0.2} = \frac{1}{2}.$$

y_j	-1	0	1
$P(Y = y_j / X = 2)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$$M\left(Y / X = 2\right) = \sum_j y_j P(Y = y_j / X = 2) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Контрольные вопросы по теме 3.1

1. Как определяется совместное распределение двух дискретных случайных величин?
2. Приведите пример таблицы распределения двух дискретных случайных величин X, Y, которые могут принимать значения 0 и 1.
3. Как определяется распределение одной случайной величины по таблице распределения двух случайных величин? Постройте эти таблицы по примеру в пункте 2.
4. Как определяется функция распределения двух случайных величин?
5. Сформулируйте свойства функции распределения.
6. Сформулируйте условие независимости двух дискретных случайных величин.
7. Как определяется условное распределение одной из случайных величин при заданном значении другой в случае дискретного распределения?
8. Как определяется условное математическое ожидание одной из случайных величин при заданном значении другой в случае дискретного распределения?
9. Как определяется коэффициент корреляции двух случайных величин?
10. Перечислите свойства коэффициента корреляции.

Задачи для самостоятельного решения по теме 3.1

1. Один раз подбрасывается игральная кость. Случайные величины: $X = 1$, если выпало четное число очков, и $X = 0$ в противном случае; $Y = 1$, если выпало число очков, кратное трем и $Y = 0$ в противном случае. Построить таблицу распределения случайных величин X, Y и таблицы распределения каждой из случайных величин в отдельности.
2. Построить функцию совместного распределения случайных величин X, Y в условиях примера 1.
3. Функция распределения случайных величин X, Y $F(x, y)$ задана в виде таблицы:

$X \setminus Y$	$y \le 1$	$1 < y \le 3$	$3 < y \le 5$	$y > 5$
$x \le 2$	0	0	0	0
$2 < x \le 4$	0	0.1	0.3	0.5
$x > 4$	0	0.3	0.7	1

   Построить таблицу совместного распределения X, Y.
4. Дана таблица распределения случайных величин X, Y

$X \setminus Y$	0	2	4
1	0.05	0.10	0.15
2	0.10	0.15	0.10
3	0.05	0.10	0.20

   Вычислить коэффициент корреляции случайных величин X, Y
5. По условиям задачи 4 найти условные распределения случайной величины X при $Y = 0, 2, 4$. Найти условные математические ожидания $M\left(X / Y = 0\right)$, $M\left(X / Y = 2\right)$, $M\left(X / Y = 4\right)$.

ТЕМА 3.2. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Литература: [1] – гл. 14, § 7, 8, ; [5] – гл. 3, п. 3.1- 3.8; [2] – гл. 8, § 3, 4;

Пример 3.2.1. Случайные величины X, Y распределены равномерно в области D, где $D-$четверть круга $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Записать функцию плотности совместного распределения $f(x,y)$.

Решение. Равномерное распределение в заданной области задается формулой $f(x,y)=c$, где $c-$ константа. Плотность распределения должна удовлетворять условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$. Воспользуемся им для нахождения c. При вычислении интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$ перейдем в полярную систему координат, где элемент площади $dxdy=rdrd\varphi$. При этом учтем, что переменная r меняется от 0 до ∞, а $\varphi-$от 0 до 2π, а в области интегрирования r меняется от 0 до 1, а φ от 0 до $\pi/2$, а также, что определенный интеграл от 0 равен нулю.

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi)rdrd\varphi=\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{\pi/2} crdrd\varphi=c\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1\cdot\left.\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{c\pi}{4}=1, \text{ откуда } c=\frac{4}{\pi}.$$

Тогда плотность распределения имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases}4/\pi, & \textit{в области} \quad x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0;\\ 0, & \textit{в остальных точках.}\end{cases}$$

Пример 3.2.2. Задана плотность совместного распределения случайных величин X, Y:

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y), & \textit{при } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1;\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти константу с и плотности распределения случайных величин X и Y. Установить, зависимы ли случайные величины X и Y.

Решение. Константу найдем из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(x+y)dxdy = c\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{0}^{1}(x+y)dx = c\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_0^1 dy =$$

$$= c\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = c\frac{1}{2}\left(y+y^2\right)\Big|_0^1 = c = 1, \text{ откуда } c = 1.$$

Здесь мы также учли, что плотность распределения отлична от 0 только в области $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Плотности распределения случайных величин X и Y в отдельности определяются интегрированием функции $f(x,y)$ по переменным y и x соответственно.

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)dy = \int\limits_{0}^{1}(x+y)dy = \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = x+\frac{1}{2}$$

$$f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)dx = \int\limits_{0}^{1}(x+y)dx = \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_0^1 = y+\frac{1}{2}.$$

Для независимых случайных величин X и Y $f(x,y) = f(x)\cdot f(y)$.

$$f(x)\cdot f(y) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right) = xy+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4},\ f(x,y) = x+y.$$

$f(x,y) \ne f(x)\cdot f(y)$, следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

Пример 3.2.3. По условиям примера 3.2.2 найти: функцию совместного распределения случайных величин X,Y;

вероятность попадания X,Y в квадрат $0 \le x \le \frac{1}{2}\ 0 \le y \le \frac{1}{2}$,

Решение. $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \textit{при } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$

По определению функции распределения $F(x,y)=P(X<x,Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(t,s)dsdt$.

В области $(x\le 0)\cup(y\le 0)$:

$$F(x,y)=F(0,0)=P(X<0,Y<0)=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dsdt=0.$$

В прямоугольнике $(0<x\le 1)\cap(0<y\le 1)$:

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}(s+t)dsdt=\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y}(s+t)dsdt=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{s^2}{2}+st\right)\Bigg|_0^y dt=\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{y^2}{2}+yt\right)dt=\left(\frac{y^2t}{2}+\frac{yt^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=\frac{xy(x+y)}{2}.$$

В области $(0<x\le 1)\cap(y>1)$: $F(x,y)=\int\limits_{0}^{x}\left(\int\limits_{0}^{1}(s+t)ds+\int\limits_{1}^{y}0ds\right)dt=$

$$=\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{s^2}{2}+st\right)\Bigg|_0^1 dt=\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{1}{2}+t\right)dt==\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=\frac{x+x^2}{2}$$

Аналогично в области $(x>1)\cap(0<y\le 1)$ получим:

$$F(x,y)=\int\limits_{0}^{y}\left(\int\limits_{0}^{1}(s+t)dt+\int\limits_{1}^{x}0dt\right)ds=\frac{y+y^2}{2}.$$

$(x>1)\cap(y>1)$: $F(x,y)=\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}(s+t)dsdt+\int\limits_{1}^{x}\int\limits_{1}^{y}0dsdt=$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{s^2}{2}+st\right)\Bigg|_0^1 dt=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+t\right)dt=\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1.$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \textit{при } x<0 \textit{ или } y<0; \\ (x^2y+xy^2)/2, & \textit{при } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1; \\ (x^2+x)/2, & \textit{при } 0\le x\le 1 \textit{ и } y>1; \\ (y^2+y)/2, & \textit{при } x>1 \textit{ и } 0\le y\le 1; \\ 1, & \textit{при } x>1 \textit{ и } y>1. \end{cases}$$

Вероятность попадания пар значений X, Y в прямоугольник $a\le x\le b, c\le y\le d$:

$P\left(a\le X\le b, c\le Y\le d\right)=P(a\le X<b, c\le Y<d)=P(X<b, Y<d)-$
$-P(X<b, Y<c)-P(X<a, y<d)+P(X<a, Y<c)=$
$=F\left(b,d\right)-F\left(b,c\right)-F\left(a,d\right)+F\left(a,c\right)$. Тогда

$$P\left(0\le X\le\frac{1}{2}, 0\le Y\le\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2},0\right)-F\left(0,\frac{1}{2}\right)+F\left(0,0\right)=$$

$$=\left.\frac{xy(x+y)}{2}\right|_{x=y=\frac{1}{2}}-\left.\frac{xy(x+y)}{2}\right|_{x=\frac{1}{2}, y=0}-\left.\frac{xy(x+y)}{2}\right|_{x=0, y=\frac{1}{2}}+0=\frac{1}{8}.$$

В случае непрерывного распределения для вычисления вероятности попадания в прямоугольник $a\le x\le b, c\le y\le d$ можно воспользоваться свойством плотности распределения

$$P(a\le X\le b, c\le Y\le d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$P\left(0\le X\le\frac{1}{2}, 0\le Y\le\frac{1}{2}\right)=\int_0^{1/2}\left(\int_0^{1/2}(x+y)\,dy\right)dx=\int_0^{1/2}\left.\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^{1/2}dx=$$

$$=\int_0^{1/2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{8}\right)\right|_0^{1/2}=\frac{1}{8}.$$

Пример 3.2.4. Задана функция распределения случайных величин X,Y

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \textit{при} \;\; x<0 \;\; \textit{или} \;\; y<0;\\ \sin x\cdot\sin y, & \textit{при}\; 0\le x\le \pi/2,\, 0\le y\le \pi/2;\\ 1, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти плотность распределения и вероятность попадания пары X,Y в прямоугольник $(0\le x\le \pi/6)\cap(\pi/6\le y\le \pi/2)$.

Решение. Используем свойство плотности распределения $f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\sin x\cdot\cos y,\; \frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\cos x\cdot\cos y.$$

Таким образом:

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos x\cdot\cos y, & \textit{при}\; 0\le x\le \pi/2,\, 0\le y\le \pi/2;\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Для вычисления вероятности воспользуемся формулой $P(a\le X\le b, c\le Y\le d)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

$$P\left(0\le X\le \pi/6, \pi/6\le Y\le \pi/2\right)=\int\limits_0^{\pi/6}\cos x\,dx\cdot\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\cos y\,dy=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/6}\cdot\sin y\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 3.2.5. Условия примера 5.2. Найти коэффициент корреляции случайных величин X,Y.

Решение. Коэффициент корреляции двух случайных величин определяется формулой

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}},\text{ где } \operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY.$$

Плотность совместного распределения случайных величин X,Y: $f(x,y)=\begin{cases}x+y & \textit{при}\; 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 1;\\ 0 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$.

Плотности $f(x),\ f(y)$ найдены в примере 5.2.

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12},$$

$$MY=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy=\int_0^1 y\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}.$$

$$M\left(X\cdot Y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 xy(x+y)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^3y}{3}\Bigg|_0^1+\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^1\right)dy=\int_0^1\left(\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{y^2+y^3}{6}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3},$$

$$MX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12},$$

$$MY^2=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dx=\int_0^1 y^2\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}.$$

$$DX=MX^2-\left(MX\right)^2=\frac{7}{12}-\frac{49}{144}=\frac{35}{144},\ DY=MY^2-\left(MY\right)^2=\frac{35}{144}.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{72},$$

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{-1/72}{35/144}=\frac{-2}{35}\approx-0.06.$$

Этот результат показывает, что связь между случайными переменными X и Y отрицательная и очень слабая, так как коэффициент корреляции отрицателен и близок к нулю.

Пример 3.2.6. Условия примера 5.2. Построить функции регрессии Y на x и X на y

Решение. Функцией регрессии Y на x называется условное математическое ожидание случайной величины Y при заданном значении $X=x$, т.е. функция $\varphi(x)=M\left(Y/x\right)$ и соответственно

$\varphi(y)=M\left(X/y\right)$. Чтобы построить эти функции, нам потребуются условные законы распределения случайных величин X и Y.

Условные плотности распределения одной случайной величины при заданном значении другой задаются формулами:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)},\qquad f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}.$$

Плотности $f(x)=x+\frac{1}{2}$ и $f(y)=y+\frac{1}{2}$ найдены в примере 5.1. $f(x,y)=x+y$. Тогда

$$f(y/x)=\frac{2(x+y)}{2x+1},\quad f(x/y)=\frac{2(x+y)}{2y+1}$$

Условное математическое ожидание

$$M\left(Y/x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(y/x)dy=\int_0^1 y\frac{2(x+y)}{2x+1}dy=\frac{2}{2x+1}\int_0^1 y(x+y)dy=$$

$$=\frac{2}{2x+1}\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{2x+1}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

Функция регрессии Y на x: $\varphi(x)=\frac{2}{2x+1}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)$.

В силу симметрии плотности распределения регрессия X на y задается функцией $\varphi(y)=\frac{2}{2y+1}\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{3}\right)$.

Пример 3.2.7. Задана плотность совместного распределения случайных величин X,Y

$$f(x,y)=\frac{1}{3\pi}e^{-\frac{x^2+4y^2}{6}}$$

Определить, зависимы ли случайные величины X и Y. Найти вероятность попадания точки $\left(X,Y\right)$ в прямоугольник: $|x|\le 1, |y|\le 2$.

Решение. Случайные величины X и Y независимы, если плотность совместного распределения удовлетворяет условию $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$. Плотность $f(x,y)$ может быть представлена в виде

$$f(x,y)=\frac{1}{3\pi}e^{-\frac{x^2+4y^2}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{3})^2}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}.$$

$f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$, следовательно, случайные величины X и Y независимы. При этом случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a=0$, $\sigma=\sqrt{3}$, $Y-$нормальное распределение с параметрами $a=0$, $\sigma=\sqrt{3}/2$.

В общем случае плотность совместного нормального распределения двух случайных величин определяется формулой

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(x-a_X)(y-a_Y)}{2\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)},$$

где $r-$коэффициент корреляции случайных переменных X,Y. Для независимых переменных коэффициент корреляции и ковариация $M\left((X-a_X)(Y-a_Y)\right)$ равны нулю, и мы получим:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}e^{-\left(\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{(y-a_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)}=f(x)\cdot f(y).$$

Вероятность попадания X,Y в прямоугольник $|x|\le 1, |y|\le 2$. Так как случайные величины X,Y независимы, вероятность попадания пары X,Y в прямоугольник $|x|\le 1, |y|\le 2$ равна произведению вероятностей попадания каждой случайной величины в интервалы $|x|\le 1$ и $|y|\le 2$ соответственно:

$$P\left(|X|\le 1, |Y|\le 2\right)=P\left(|X|\le 1\right)\cdot P\left(|Y|\le 2\right)=$$

$$=\left(2\Phi_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-1\right)\cdot\left(2\Phi_{0,1}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)-1\right)=$$

$$=(2\cdot 0.7150-1)\cdot(2\cdot 0.9886-1)\approx 0.42.$$

Контрольные вопросы по теме 3.2

1. Как определяется совместное распределение двух непрерывных случайных величин?
2. Как определяется плотность распределения двух случайных величин?
3. Сформулируйте свойства плотности распределения.
4. Как определяется вероятность попадания пары случайных величин в заданную область?
5. Как определяется плотность каждой случайной величины по плотности совместного распределения двух случайных величин?
6. Сформулируйте условие независимости двух непрерывных случайных величин.
7. Как определяется условная плотность распределения одной из случайных величин при заданном значении другой?
8. Как определяется условное математическое ожидание одной из случайных величин при заданном значении другой в случае непрерывного распределения?
9. Что называется функцией регрессии Y на x (X на y)?
10. Как определяется коэффициент корреляции двух случайных величин?

Задачи для самостоятельного решения по теме 3.2

1. Задана плотность совместного распределения случайных величин X, Y:
$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-x-y}, & \textit{при } x\ge 0,\ y\ge 0; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$
Найти константу с и плотности распределения случайных величин X и Y. Установить, зависимы ли случайные величины X и Y.
2. Задана плотность совместного распределения случайных величин X, Y:
$$f(x,y)=\begin{cases} c(1-xy), & \textit{при } 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$
Найти константу с и плотности распределения случайных величин X и Y. Установить, зависимы ли случайные величины X и Y.
3. По условиям задачи 1 найти: функцию совместного распределения случайных величин X,Y и вероятность $P\left(X>0, Y<1\right)$.
4. По условиям примера 2 найти коэффициент корреляции случайных величин X,Y. Построить функцию регрессии X на y.

ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМАМ 3.1–3.2

1. Дискретное распределение случайных величин X, Y задается формулой:
   а) $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$;
   б) $p_{ij} = P\left(X < x_i, Y < y_j\right)$, $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$;
   в) $p_{ij} = F\left(x_i, y_j\right)$, $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

2. Функция распределения случайных величин X, Y определяется следующим образом
   а) $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$
   б) $F(x, y) = P(X = x, Y = y)$
   в) $F(x, y) = P(X \geq x, Y \geq y)$

3. Свойствами функции распределении случайных величин X, Y <u>не</u> являются:
   а) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
   б) $-\infty < F(x, y) < \infty$;
   в) $F(x, y)$ убывающая функция по каждой из переменных x, y;
   г) $F(x, y)$ неубывающая функция по каждой из переменных x, y.

4. Непрерывное распределение случайных величин X, Y задается функцией плотности $f(x, y)$, удовлетворяющей условию:
   а) $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(t, s) ds dt$;
   б) $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$;
   в) $F(x, y) = \int\limits_{0}^{x} \int\limits_{0}^{y} f(t, s) ds dt$.

5. Свойствами плотности распределения случайных величин X, Y не являются:

а) $f(x,y) \geq 0$; б) $-\infty < f(x,y) < \infty$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,s)ds\,dt = 1$; г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,s)ds\,dt = F(x,y)$;

д) $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

6. Для независимых случайных величин X, Y выполняется условие:

а) $F(x,y) = F(x) \cdot F(y)$;

б) $F(x,y) \neq F(x) \cdot F(y)$;

в) $F(x,y) = F(x) + F(y)$.

7. Для независимых случайных величин X, Y, имеющих дискретное распределение, выполняется условие:

а) $P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$;

б) $P\left(X = x_i, Y = y_j\right) \neq P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$;

в) $P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P\left(X = x_i / Y = y_j\right)$.

8. Для независимых случайных величин X, Y, имеющих непрерывное распределение, выполняется условие:

а) $f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$;

б) $f(x,y) \neq f(x) \cdot f(y)$;

в) $f(x,y) = f(x \cdot y)$.

9. Условное распределение дискретной случайной величины X при заданном значении случайной величины $Y = y_j$ определяется формулой:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}.$$

10. Плотность условного распределения непрерывной случайной величины X при заданном значении случайной величины $Y = y$ определяется формулой:

а) $f(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)}$;

б) $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f(x)}$;

в) $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f(y)}$.

11. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин $M(X \cdot Y)$ равно:

а) $MX \cdot MY$; б) $MX + MY$; в) $M\left(X \cdot Y\right)$.

12. Дисперсия суммы двух зависимых случайных величин $D(X+Y)$ равна:

а) $DX + DY + 2\left(M(X \cdot Y) - MX \cdot MY\right)$;

б) $DX + DY$;

в) $DX \cdot DY$.

13. Математическое ожидание произведения двух зависимых дискретных случайных величин X, Y определяется формулой:

а) $M\left(X \cdot Y\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$;

б) $M\left(X \cdot Y\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j P\left(X = x_i\right) \cdot P\left(Y = y_j\right)$;

в) $M\left(X \cdot Y\right) = \sum_i \sum_j P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$.

14. Математическое ожидание произведения двух зависимых непрерывных случайных величин X, Y определяется формулой:

а) $M\left(X \cdot Y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)dxdy$;

б) $M\left(X\cdot Y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x)\cdot f(y)dxdy$;

в) $M\left(X\cdot Y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x\cdot y)dxdy$.

15. Ковариация $\operatorname{cov}\left(X,Y\right)$ случайных величин X, Y определяется формулой:

а) $M\left(\left(X-MX\right)\cdot\left(Y-MY\right)\right)$;

б) $M\left(X\cdot Y\right)$;

в) $M\left(X-MX\right)\cdot M\left(Y-MY\right)$.

16. Ковариация двух независимых случайных величин равна:

а) 1; б) –1; в) 0; г) 0.5.

17. Коэффициент корреляции случайных величин X, Y определяется формулой:

а) $\rho\left(X,Y\right)=\dfrac{M\left(\left(X-MX\right)\cdot\left(Y-MY\right)\right)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$;

б) $\rho\left(X,Y\right)=\dfrac{M\left(\left(X-MX\right)\cdot\left(Y-MY\right)\right)}{\sqrt{D\left(X\cdot Y\right)}}$;

в) $\rho\left(X,Y\right)=\dfrac{M\left(X\cdot Y\right)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$.

18. Коэффициент корреляции случайных величин характеризует степень их ______ .

19. Коэффициент корреляции случайных величин X,Y принимает значения в диапазоне:

а) $\left[0,1\right]$; б) $\left(-1,1\right)$; в) $\left[-1,1\right]$; г) $\left(-\infty,+\infty\right)$.

20. Коэффициент корреляции двух независимых случайных величин равен:

а) 1; б) -1; в) 0; г) 0.5.

21. Коэффициент корреляции двух случайных величин, связанных между собой линейной зависимостью $Y = aX + b$, где $a > 0$ равен:

а) 1; б) –1; в) 0; г) 0.5.

22. Коэффициент корреляции двух случайных величин, связанных между собой линейной зависимостью $Y = aX + b$, где $a < 0$ равен:

а) 1; б) –1; в) 0; г) 0.5.

23. Условное математическое ожидание дискретной случайной величины X при заданном значении случайной величины $Y = y_j$ определяется формулой:

а) $M\left(X/Y = y_j\right) = \sum_i x_i P\left(X = x_i / Y = y_j\right)$;

б) $M\left(X/Y = y_j\right) = \sum_i x_i P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$;

в) $M\left(X/Y = y_j\right) = \sum_i x_i y_j P\left(X = x_i / Y = y_j\right)$.

24. Условное математическое ожидание непрерывной случайной величины X при заданном значении случайной величины $Y = y$ определяется формулой:

а) $M\left(X/Y = y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/y)dx$;

б) $M\left(X/Y = y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y)dx$;

в) $M\left(X/Y = y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f(x/y)dx$.

25. Функцией регрессии Y на x называется функция:

а) $\varphi(x) = M\left(Y/x\right)$;

б) $\varphi(x) = M\left(X/y\right)$;

в) $\varphi(x) = M\left(Y/y\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: Высшее образование, 2006. – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – Москва : Высшее образование, 2007. – 404 с.
3. Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А. Е. Ефимова. – Москва: Наука, 1990. – 431 с.
4. Малыхин В. И., Математика в экономике: учеб. пособие. – Москва: ИНФРА-М, 2002. – 352 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва: Высшая школа, 2000. – 480 с.
6. Вся высшая математика. Т. 5 / М. Л. Краснов [b др.]. – Москва, 2001. – 294 с.
7. Андронов А. М. Теория вероятностей и математическая статистика / А. М. Андронов [и др.]. – Москва: Питер, 2004. – 460 с.

Таблица 1.

Значение функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
	Десятые доли x									
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020

Таблица 2. Значение функции $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

z	Сотые доли z									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0365
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3464	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3485	0,3508	0,3533	0,3554	0,3577	0,3599	0,2621
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3980	0,3997	0,4015
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,8908	0,4812	0,4817
2,2	0,4860	0,4864	0,4867	0,4871	0,4874	0,4877	0,4880	0,4883	0,4886	0,4889
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4926	0,4928	0,4930	0,4932	0,4934	0,4936
2,6	0,4953	0,4954	0,4956	0,4954	0,4958	0,4959	0,4960	0,4962	0,4963	0,4964
2,8	0,4974	0,4975	0,4975	0,4976	0,4977	0,4978	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980
3,0	0,4886	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989

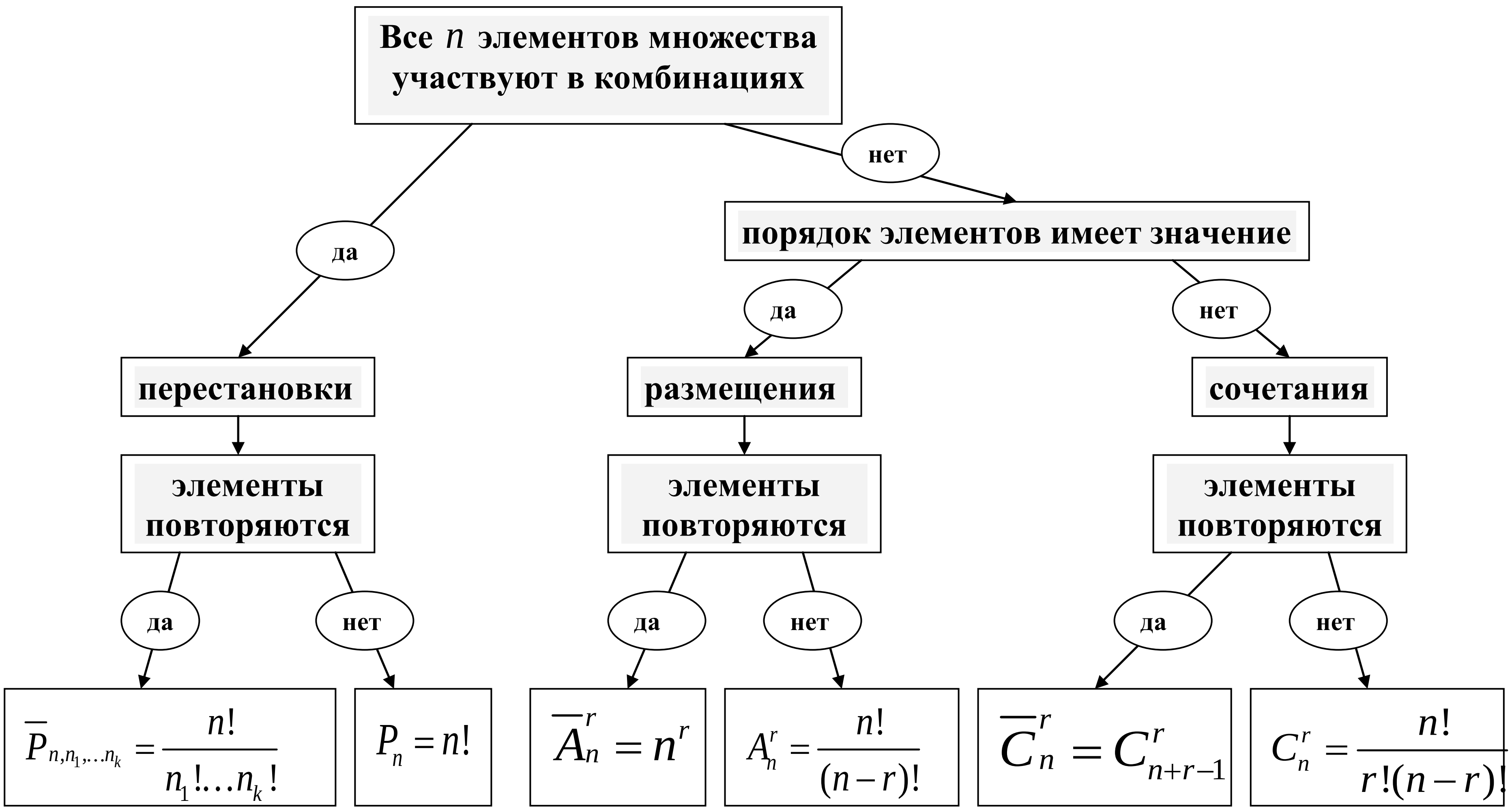


Таблица 3. Блок-схема: выбор подходящей комбинаторной формулы

Таблица 4. Дискретные законы распределения

ВИД (НАЗВАНИЕ) ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	ДИАПАЗОН ЗНАЧЕНИЙ С.В. X	ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $p_k = P(X = k)$	ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	СВЯЗЬ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПАРАМЕТРАМИ
Бернулли	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$, $P(X=0)=q$	$p \quad (q = 1-p)$	$MX = p$ $DX = pq$
Биномиальное	$\{0,1,2,\mathrm{K}\ ,n\}$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$n,\ p \quad (q = 1-p)$	$MX = np$ $DX = npq$
Пуассона	$\{0,1,2,3,\mathrm{K}\ ,n,\ldots\}$	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	$MX = \lambda$ $DX = \lambda$
Геометрическое	$\{0,1,2,3,\mathrm{K}\ ,n,\ldots\}$	pq^k	$p \quad (q = 1-p)$	$MX = q/p$ $DX = q/p^2$
Геометрическое +1	$\{1,2,3,\mathrm{K}\ ,n,\ldots\}$	pq^{k-1}	$p \quad (q = 1-p)$	$MX = 1/p$ $DX = q/p^2$
Гипергеометрическое	от $\max\{0,\ \lvert N-K-n\rvert\}$ до $\min\{n,K\}$	$\dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$	$n,\ N,\ K$	$MX = \dfrac{nK}{N}$, $DX = \dfrac{nK}{N-1}\left(1-\dfrac{K}{N}\right)\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$

Таблица 5. Непрерывные законы распределения

ВИД ЗАКОНА	*ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ* $f(x)$	*ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ* $F(x)$	*ПАРА-МЕТРЫ, ОБО-ЗНА-ЧЕНИЕ*	*ИНТЕРВАЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ* $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	*СВЯЗЬ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК С ПАРАМЕТРАМИ*
Равномерный	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$	$R[a,b]$	$\dfrac{x_2 - x_1}{b-a}$	$MX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Показа-тельный	$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \ge 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \ge 0. \end{cases}$	$E(\alpha)$	$e^{-\alpha x_1} - e^{-\alpha x_2}$	$MX = \dfrac{1}{\alpha}$, $DX = \dfrac{1}{\alpha^2}$
Нормальный	$\dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$	$\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$	$N(a,\sigma)$	$\Phi\left(\dfrac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{x_1-a}{\sigma}\right)$	$MX = a$, $DX = \sigma^2$
Стандартный нормальный	$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$	$N(0,1)$	$\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$	$MX = 0$, $DX = 1$