

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф.Горбачева"

В. Г. КАШИРСКИХ

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
учебно-методической комиссией специальности
140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок
и технологических комплексов»

Кемерово 2012

Рецензенты:

Полетаев В.А., зав. кафедрой информационных
и автоматизированных производственных систем КузГТУ

Завьялов В.М., директор института энергетики КузГТУ

Каширских Вениамин Георгиевич. Теория автоматического управления. Часть 2. Нелинейные и специальные системы [Электронный ресурс]: для студентов специальности 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов» / В. Г. Каширских – Электрон. дан. – Кемерово: КузГТУ, 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. требования: Процессор Intel или AMD 500 Мб, ОЗУ 128 Мб; (CD-ROM-дисковод); мышь. – Загл. с экрана.

Изложены основные принципы построения, математическое описание и методы анализа непрерывных и дискретных нелинейных, оптимальных и адаптивных систем автоматического управления, а также рассмотрены методы идентификации объектов управления.

Учебное пособие предназначено для студентов:

- специальности 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов»;
- специальности 130400 «Горное дело», специализация «Электрификация и автоматизация горного производства»;
- направления подготовки 140400 «Электроэнергетика и электротехника», профиль 140410 «Электропривод и автоматика».

© ГУ КузГТУ, 2012

© Каширских В.Г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
1. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	6
1.1. Общие сведения.....	6
1.2. Типовые нелинейности.....	8
1.3. Особенности динамики нелинейных систем.....	12
2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ.....	14
2.1. Основные понятия.....	14
2.2. Метод изоклин.....	18
2.3. Метод припасовывания.....	20
2.4. Метод точечных преобразований.....	26
3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НСАУ.....	28
3.1. Вибрационная линеаризация.....	28
3.2. Гармоническая линеаризация.....	31
3.3. Статистическая линеаризация.....	35
4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ, КАЧЕСТВА И КОРРЕКЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ.....	40
4.1. Прямой метод Ляпунова.....	40
4.2. Критерий абсолютной устойчивости Попова.....	42
4.3. Оценка качества нелинейных систем.....	44
4.4. Коррекция в нелинейных системах.....	45
5. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ.....	48
5.1. Релейные системы.....	49
5.2. Импульсные системы.....	50
5.2.1. Дискретная форма математического описания ИСАУ.....	53
5.2.2. Частотные характеристики линейных систем с АИМ.....	57
5.2.3. Методы исследования ИСАУ.....	59
5.3. Цифровые системы.....	61
6. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.....	63
6.1. Основные понятия.....	63
6.2. Методы нахождения экстремумов функционалов.....	65
6.3. Оптимальные по быстродействию релейные системы.....	69
6.4. Особенности синтеза оптимальных систем.....	70
6.5. Оптимальные системы при случайных воздействиях.....	71

7. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ.....	74
7.1. Основные понятия.....	74
7.2. Самонастраивающиеся и самоорганизующиеся системы.	75
7.3. Методы нахождения экстремума критерия качества.....	78
8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ.....	81
8.1. Общие сведения.....	81
8.2. Методы оценивания.....	83
Список рекомендуемой литературы.....	96

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория автоматического управления в настоящее время интенсивно развивается. Это обусловлено не только требованиями производства, но и новыми возможностями построения систем управления на основе широкого использования современных информационных технологий и вычислительной техники.

Данное учебное пособие охватывает материал второй части курса и представляет собой продолжение пособия [6]. Рассмотрен минимум учебного материала по нелинейным и специальным системам, необходимый для успешного освоения курсов «Автоматизация производственных процессов», «Системы управления электроприводов», «Автоматизированный электропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов».

Учебное пособие состоит из восьми глав. Глава 1 содержит общие сведения о нелинейных системах. Здесь даны пояснения об используемой терминологии, приведены типовые нелинейности и их влияние на деформацию сигналов, а также проанализированы особенности динамики нелинейных систем. Глава 2 посвящена исследованию нелинейных систем методами фазовой плоскости. Приведены примеры фазовых траекторий для различных переходных процессов. Подробно рассмотрена процедура построения фазовой траектории релейной системы методом припасовывания.

В главе 3 описаны методы линеаризации нелинейных звеньев – вибрационная, гармоническая и статистическая линеаризация. Методы исследования устойчивости и качества, а также коррекция в нелинейных системах приведены в главе 4. Особенности математического описания и анализа дискретных систем – релейных, импульсных и цифровых – рассмотрены в главе 5. Здесь же приведены критерии устойчивости линейных импульсных систем.

Оптимальные и адаптивные системы, особенности их построения и исследования описаны в главах 6 и 7. Методам идентификации объектов управления посвящена глава 8. Для пояснения содержания этой главы приведен пример определения активного сопротивления и потокосцепления статора асинхронного электродвигателя в процессе его работы с помощью расширенного фильтра Калмана.

Материал учебного пособия не является оригинальным и представляет собой основы методов исследования нелинейных и специальных систем, описанных в учебной и научной литературе. Для более глубокого самостоятельного изучения курса приведен список учебной литературы.

1. ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1.1. Общие сведения

В теории автоматического управления (ТАУ) термин “нелинейные” применительно к системам автоматического управления (САУ) обозначает, что математическое описание таких систем (математическая модель), представляющее собой, например, совокупность дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы в отдельных элементах системы, включает в себя хотя бы одно нелинейное дифференциальное уравнение. При этом статическая характеристика элемента, описываемого этим уравнением, нелинейна и такой элемент называется *нелинейным элементом*.

По большому счету все элементы САУ являются нелинейными, однако на практике во многих случаях их можно представить линейными, например, при работе элемента в пределах линейной части нелинейной статической характеристики или при использовании линеаризации нелинейной функции по методу касательной, секущей и др. Однако некоторые характеристики с существенной нелинейностью, например релейные, линеаризовать нельзя, поэтому САУ, включающие хотя бы один такой элемент, должны рассматриваться как нелинейные, что значительно сложнее по сравнению с линейными САУ.

Линейные САУ представляют собой довольно узкий класс систем, получаемых путем упрощения математического описания реальных нелинейных систем (НСАУ). По разным причинам приведение нелинейной САУ к линейной не всегда возможно, а применение линейной теории в этом случае приведет к неточным или принципиально неверным результатам. С другой стороны, НСАУ несоизмеримо богаче по своим возможностям, чем линейные. Это касается не только точности и быстродействия, но и возможности реализации сложных алгоритмов управления.

Прежде чем приступить к изучению НСАУ, необходимо познакомиться с такими важными понятиями, как наблюдаемость, идентифицируемость, оценивание, управляемость, адаптируемость, инвариантность, чувствительность, грубость, которые характеризуют основные свойства САУ. Например, оптимальное и адаптивное управление возможно лишь в том случае, если известны текущие значения параметров

и состояние САУ, а также свойства информационных процессов в САУ.

Под *наблюдаемостью* понимается возможность косвенного определения каких-либо величин объекта управления или других элементов САУ на основе измерения некоторых других величин и использования априорной информации (математической модели анализируемого элемента, характеристики шумовых процессов, вызванных различными причинами и т.д.).

Идентификацией называется определение параметров и характеристик элемента САУ на основе специальных методов по экспериментальным данным. Особенно важной в практических приложениях является *параметрическая идентификация*, которая проводится в реальном времени в процессе работы САУ и является частным случаем наблюдаемости.

Параметрическая идентифицируемость представляет собой возможность определения параметров математической модели САУ (или элемента) по результатам измерения некоторых входных и (или) выходных ее величин.

Различают также *идентификацию объекта* – получение или уточнение по экспериментальным данным его модели, работоспособной во всех эксплуатационных режимах, и *идентификацию процесса* – получение или уточнение на основе экспериментов модели данного режима.

Оцениванием в математической статистике называется обработка измеренных данных для уменьшения влияния случайных факторов на результат. В ТАУ под оцениванием понимается определение параметров и переменных САУ в реальном времени по результатам измерений доступных для этого входных и (или) выходных величин системы или отдельных звеньев на основании математической модели САУ и математических методов фильтрации.

Под *управляемостью* понимается принципиальная возможность перехода САУ из одного заданного множества состояний в другое за конечный промежуток времени. Количественная характеристика управляемости определяется показателями переходных процессов при типовых воздействиях.

Адаптируемость является частным случаем управляемости и относится к свойствам регулятора, позволяющим при изменениях возмущающих воздействий, различных помех или свойств нестационарного

динамического объекта управления формировать такое управление, при котором состояние системы будет достаточно близким к заданию.

Если рассматривать астатизм системы как невосприимчивость того или иного ее выхода к постоянным или медленно изменяющимся возмущениям в установившемся режиме асимптотически устойчивой САУ, то *инвариантность* определится как невосприимчивость того или иного выхода к возмущению произвольного вида. В общем виде под инвариантностью систем управления понимается независимость некоторых ее переменных от возмущающих воздействий.

Способность системы менять свою реакцию на заданные входные воздействия при изменении параметров называется *параметрической чувствительностью*. На практике желательно, чтобы при допустимом изменении параметров звеньев системы ее основные свойства, например устойчивость, не изменялись. Это качество системы называется *грубостью*. Работоспособная САУ должна быть не только инвариантной к возмущениям, но и грубой для обеспечения устойчивости заданного качества управления.

Различают непрерывные и дискретные, обыкновенные, оптимальные и адаптивные НСАУ с использованием в них известных принципов управления при детерминированных и случайных воздействиях.

Основными отличительными особенностями НСАУ являются следующие:

- 1) коэффициент передачи системы – величина переменная;
- 2) неприменим принцип суперпозиции;
- 3) в отличие от линейных систем возможен особый установившийся режим работы НСАУ – автоколебания, которые не могут быть описаны в рамках линейной теории;
- 4) устойчивость НСАУ определяется не только параметрами системы, но и уровнем приложенных воздействий, при этом возможно несколько равновесных состояний, из которых устойчивыми могут быть только некоторые из них.

1.2. Типовые нелинейности

Нелинейности (НЛ), встречающиеся в САУ, обусловлены либо физическими свойствами элементов (насыщение, гистерезис, сухое трение, люфт и т.д.), либо специально вводятся в систему в виде кор-

ректирующих элементов (реле, функциональные преобразователи, нелинейные элементы с “отсечкой” и др.). При составлении структурной схемы НСАУ нелинейные элементы обозначают, как и линейные, прямоугольником, в котором вместо передаточной функции или переходной характеристики записывают аналитическое выражение нелинейной функции элемента или изображают его статическую характеристику.

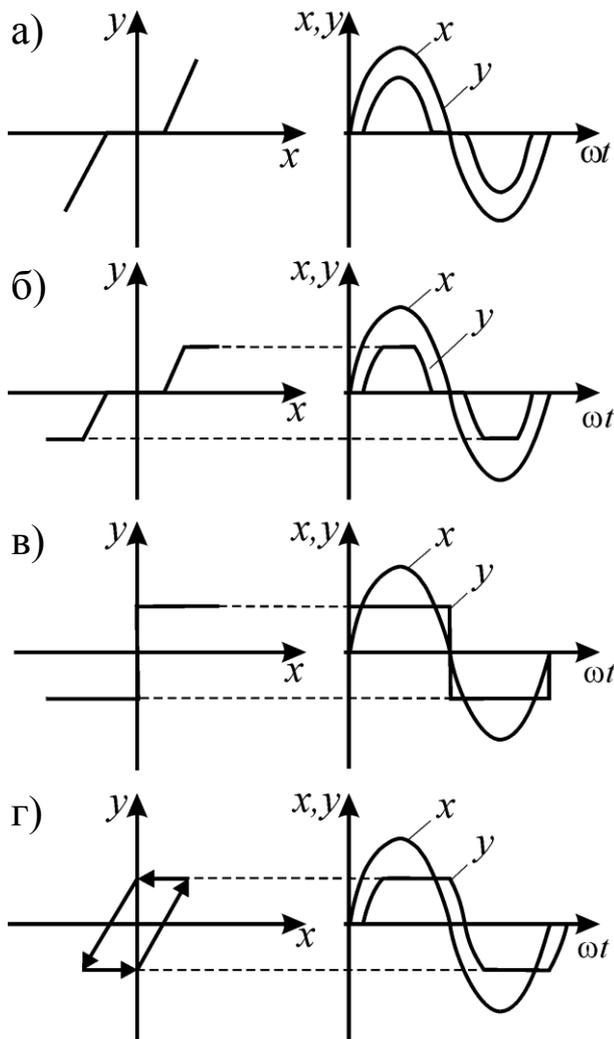


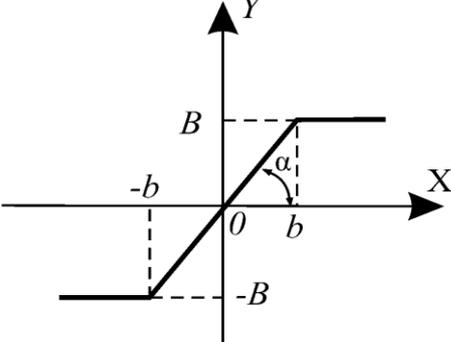
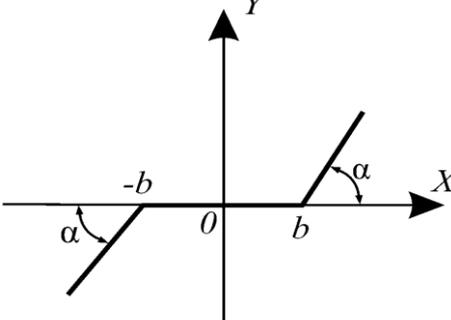
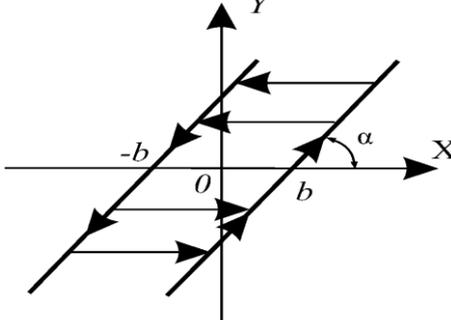
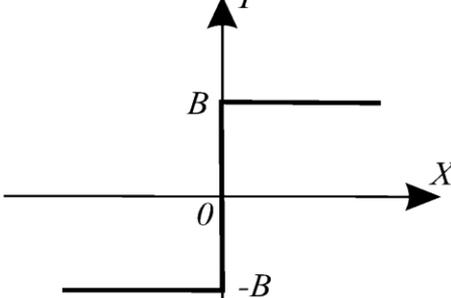
Рис. 1.1. Искажения гармонического сигнала при прохождении через нелинейность

Для упрощения процедуры анализа или синтеза НСАУ в некоторых случаях удобно, если это возможно, объединять нелинейности с получением результирующей статической характеристики. Очевидно, что в реальных условиях существует бесконечное множество различных видов нелинейностей, но для практических целей их удобно заменять типовыми нелинейностями и их комбинациями (табл. 1.1). Удобство заключается не только в упрощении описания, но и в том, что для типовых нелинейностей имеются зависимости, которые позволяют сравнительно просто провести гармоническую (п. 3.2) и статическую (п. 3.3) линеаризации нелинейного элемента с целью упрощения анализа НСАУ.

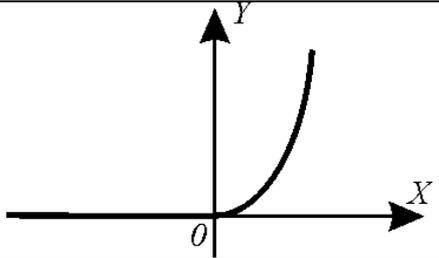
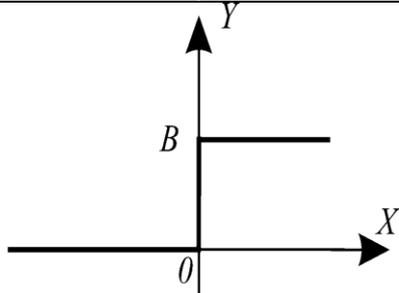
Все элементы САУ (кроме пропорционального звена с $k=1$) преобразуют входной сигнал в выходной в соответствии со своими внутренними свойствами. Для примера, на рис. 1.1, а-г показано изменение гармонического сигнала ($x \rightarrow y$) для некоторых типовых нелинейностей. Кроме основной гармоники, выходные сигналы содержат также высшие гармоники. Очевидно, что анализ и синтез НСАУ являются более сложными, чем в линейных САУ.

Все элементы САУ (кроме пропорционального звена с $k=1$) преобразуют входной сигнал в выходной в соответствии со своими внутренними свойствами. Для при-

Типовые нелинейные звенья

№ п/п	Статическая характеристика	Наименование звена и уравнение
1		<p>Звено с насыщением (ограничением):</p> $Y = \begin{cases} kx & \text{при } X \leq b; \\ B & \text{при } X > b; \\ -B & \text{при } X < -b, \end{cases}$ <p>где $k = \operatorname{tg} \alpha$</p>
2		<p>Звено с зоной нечувствительности:</p> $Y = \begin{cases} k(X-b) & \text{при } X > b; \\ 0 & \text{при } X \leq b; \\ k(X+b) & \text{при } X < -b, \end{cases}$ <p>где $k = \operatorname{tg} \alpha$</p>
3		<p>Звено с мертвым ходом:</p> $Y = \begin{cases} k(X-b) & \text{при } \dot{X} > 0; \\ k(X+b) & \text{при } \dot{X} < 0 \end{cases}$ <p>или $Y = k(X - b \operatorname{sign} \dot{X})$,</p> <p>где $k = \operatorname{tg} \alpha$</p>
4		<p>Идеальное двухпозиционное реле:</p> $Y = \begin{cases} B & \text{при } X > 0; \\ -B & \text{при } X < 0 \end{cases}$ <p>или $Y = B \operatorname{sign} X$</p>

5		<p>Двухпозиционное реле с зоной неоднозначности:</p> $Y = \begin{cases} B \text{ при } X > b \\ -B \text{ при } X < -b \end{cases}, \text{ если } \dot{X} > 0;$ $Y = \begin{cases} B \text{ при } X > -b \\ -B \text{ при } X < -b \end{cases}, \text{ если } \dot{X} < 0$
6		<p>Идеальное трехпозиционное реле:</p> $Y = \begin{cases} B \text{ при } X > b, \\ 0 \text{ при } X \leq b; \\ -B \text{ при } X < -b \end{cases}$
7		<p>Трехпозиционное реле с зонами неоднозначности и нечувствительности:</p> $Y = \begin{cases} B \text{ при } X > b_2 \\ 0 \text{ при } -b_1 \leq X \leq b_2 \\ -B \text{ при } X < -b_1 \end{cases}, \text{ если } \dot{X} > 0;$ $Y = \begin{cases} B \text{ при } X > b_1 \\ 0 \text{ при } -b_2 \leq X \leq b_1 \\ -B \text{ при } X < -b_2 \end{cases}, \text{ если } \dot{X} < 0$
8		$Y = kX^2$
9		$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ kX & \text{при } X > 0 \end{cases}$

10		$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ kX^2 & \text{при } X > 0 \end{cases}$
11		$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ B & \text{при } X > 0 \end{cases}$

1.3. Особенности динамики нелинейных систем

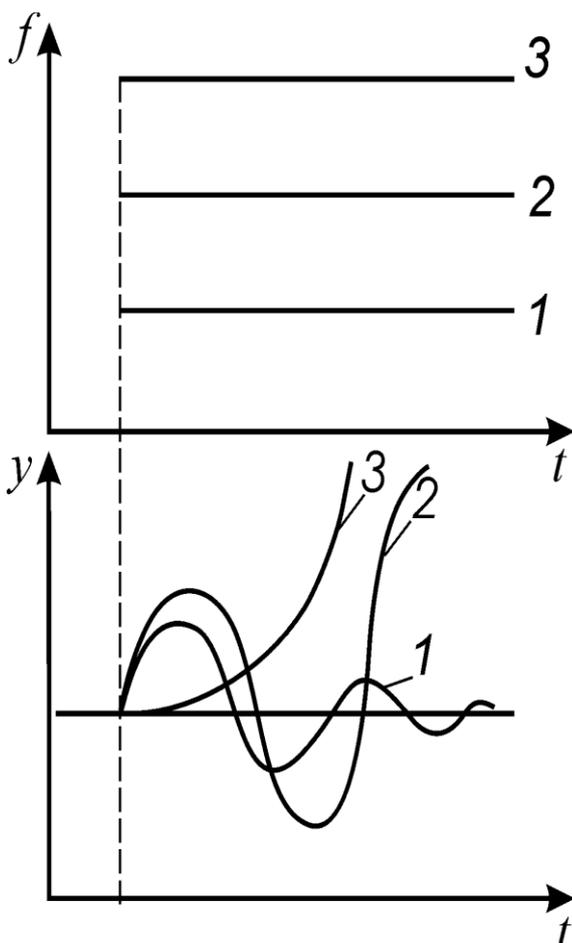


Рис. 1.2. Реакция НСАУ $y(t)$ на возмущения $f(t)$ с различными уровнями воздействия

Из-за присутствия нелинейности с изменяющимся коэффициентом передачи динамические режимы НСАУ при различных уровнях внешних воздействий f также могут быть различными (рис. 1.2). По этой причине изменяются и условия устойчивости. НСАУ, устойчивая при определенных условиях, при других может быть неустойчивой.

В отличие от линейных систем здесь не существует понятия “устойчивая САУ” – обязательно должен оговариваться режим, при котором исследуется устойчивость системы. Различают следующие виды устойчивости.

Устойчивость “в малом” – устойчивость при бесконечно малых отклонениях от исходного режима.

Устойчивость “в большом” – это устойчивость при конечных отклонениях, возможных в системе по условиям ее работы.

Устойчивость “в целом” – устойчивость системы при любых отклонениях.

У линейных систем точность, устойчивость и качество переходных процессов не зависят от величины внешнего воздействия, изменение которого приводит лишь к изменению абсолютного отклонения выходной величины и не влияет на качество переходного процесса (выполняется принцип суперпозиции). В отличие от НСАУ устойчивость линейных САУ определяется лишь параметрами системы, при этом период колебаний не зависит от величины отклонения.

Асимптотическая устойчивость характеризуется сходящимся переходным процессом, при котором выходная величина асимптотически приближается к установившемуся значению.

Автоколебания – вид установившегося режима, возможного только в НСАУ, при котором амплитуда и частота колебаний неизменны. Причиной существования автоколебаний является влияние нелинейностей системы на ее работу. Пусть, например, у корректирующего звена, обеспечивающего устойчивость, имеется зона нечувствительности. При включении системы всегда будет возникать неустойчивый режим с расходящимися колебаниями, которые становятся затухающими при выходе из зоны нечувствительности. Следовательно, установившимся режимом в этом случае будут автоколебания, амплитуда которых ограничена зоной нечувствительности, а частота определяется инерционностями НСАУ.

Возможны НСАУ, в которых в зависимости от величины внешних воздействий возникает несколько автоколебательных режимов с разными амплитудами и частотами. Автоколебания не обязательно ухудшают работу системы: при малой амплитуде колебаний они могут не оказывать существенного влияния на качество работы, а при большой – выполнять защитные функции, ограничивая выходной сигнал системы при чрезмерных внешних воздействиях.

Рассмотренные особенности НСАУ требуют при анализе их устойчивости оговаривать начальные условия и внешние воздействия, поэтому нельзя говорить об устойчивости системы вообще, а нужно судить только об устойчивости ее определенного режима.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

2.1. Основные понятия

В теории автоматического управления мы имеем дело с математическими моделями (ММ), которые с определенным приближением описывают свойства и процессы реальных систем с учетом ограничений, присутствующих в реальных условиях. Состояние ММ САУ можно представить в виде элемента x множества состояний X при условии, что каждый элемент множества $x \in X$ полностью и однозначно характеризует это состояние.

Состояние в данном случае понимается как мгновенное состояние, состояние в текущий или заданный момент времени. Изменяющийся во времени процесс можно отобразить как движение элемента x в *пространстве состояний*. При геометрическом представлении процессов координатами n -мерного пространства в прямоугольной системе координат являются n величин, определяющих состояние САУ. Этими величинами могут быть выходные величины (координаты) системы или ее отдельных звеньев, а также другие переменные величины системы и их производные.

Множество векторов $X(t_i)$ называется пространством состояний, которое называют также фазовым пространством (рис. 2.1). Координаты x_1, x_2, \dots, x_n называются фазовыми координатами, или координатами

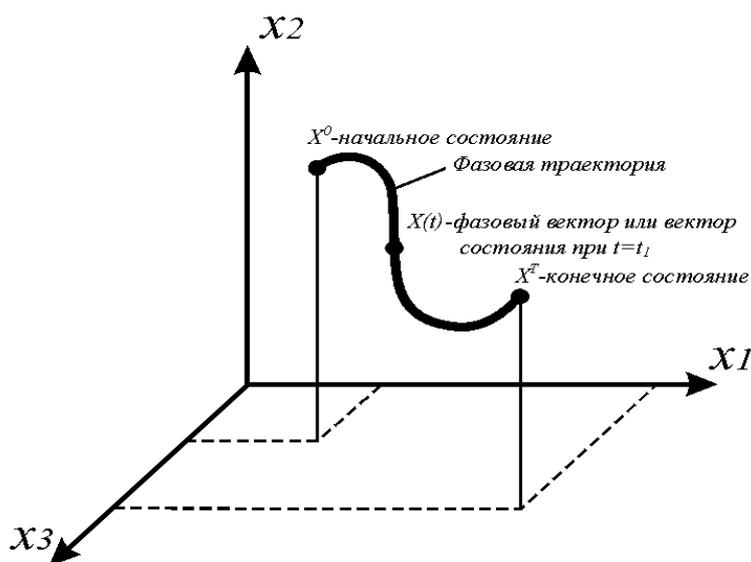


Рис. 2.1. Фазовое пространство

состояний, а состоянию системы в каждый момент времени, определяемому значениями ее n координат, соответствует определенная точка фазового пространства — изображающая точка (фаза).

При изменении состояния системы изображающая точка будет перемещаться в фазовом пространстве, описывая траекторию, называемую *фазовой траекторией*.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих различным режимам САУ, возникающим при различных начальных условиях, различных воздействиях или различных значениях некоторых параметров элементов САУ, которые могут изменяться в процессе ее работы, называется *фазовым портретом системы*.

Для удобства анализа режимов САУ с использованием фазового пространства в качестве координат этого пространства используют отклонения выходных или других используемых при этом величин от их значений, соответствующих некоторому установившемуся режиму системы. При этом сходящимся процессам будет соответствовать движение изображающей точки в начало координат фазового пространства, а расходящимся – движение в бесконечность.

На практике при геометрической интерпретации пространства в основном используют фазовую плоскость, координатами которой являются выходная величина системы x и ее первая производная $y = dx/dt$. На рис. 2.2 показаны некоторые переходные процессы и соответствующие им фазовые портреты.

Поскольку $y = dx/dt$, то в верхней полуплоскости фазовые траектории идут по часовой стрелке (производная положительна при увеличении переменной), а в нижней – в обратном направлении. При этом ось абсцисс касательные к фазовым траекториям пересекают под прямым углом, а между собой они пересекаются только в особых точках. *Особыми точками* называются точки, соответствующие состоянию равновесия системы. Различают четыре вида особых точек: фокус, центр, узел и седло. Особым точкам соответствует начало координат фазового портрета или фазовой траектории. При наличии зоны нечувствительности *особые точки* могут образовывать *особый отрезок* – рис. 2.2, з.

Фокус показан на рис. 2.2, а, б, г, д, а *узел* – на рис. 2.2, е, ж. Фокус и узел могут быть устойчивыми и неустойчивыми. На рис. 2.2, и особой точкой в начале координат является так называемое *седло*, которое всегда соответствует неустойчивому состоянию равновесия. Это состояние возможно в системах с отрицательной восстанавливающей силой и применяется, например, для получения быстрых перебросов механических деталей из одного положения в другое с использованием пружины, стремящейся резко увеличить возникающее отклонение (выключатели).

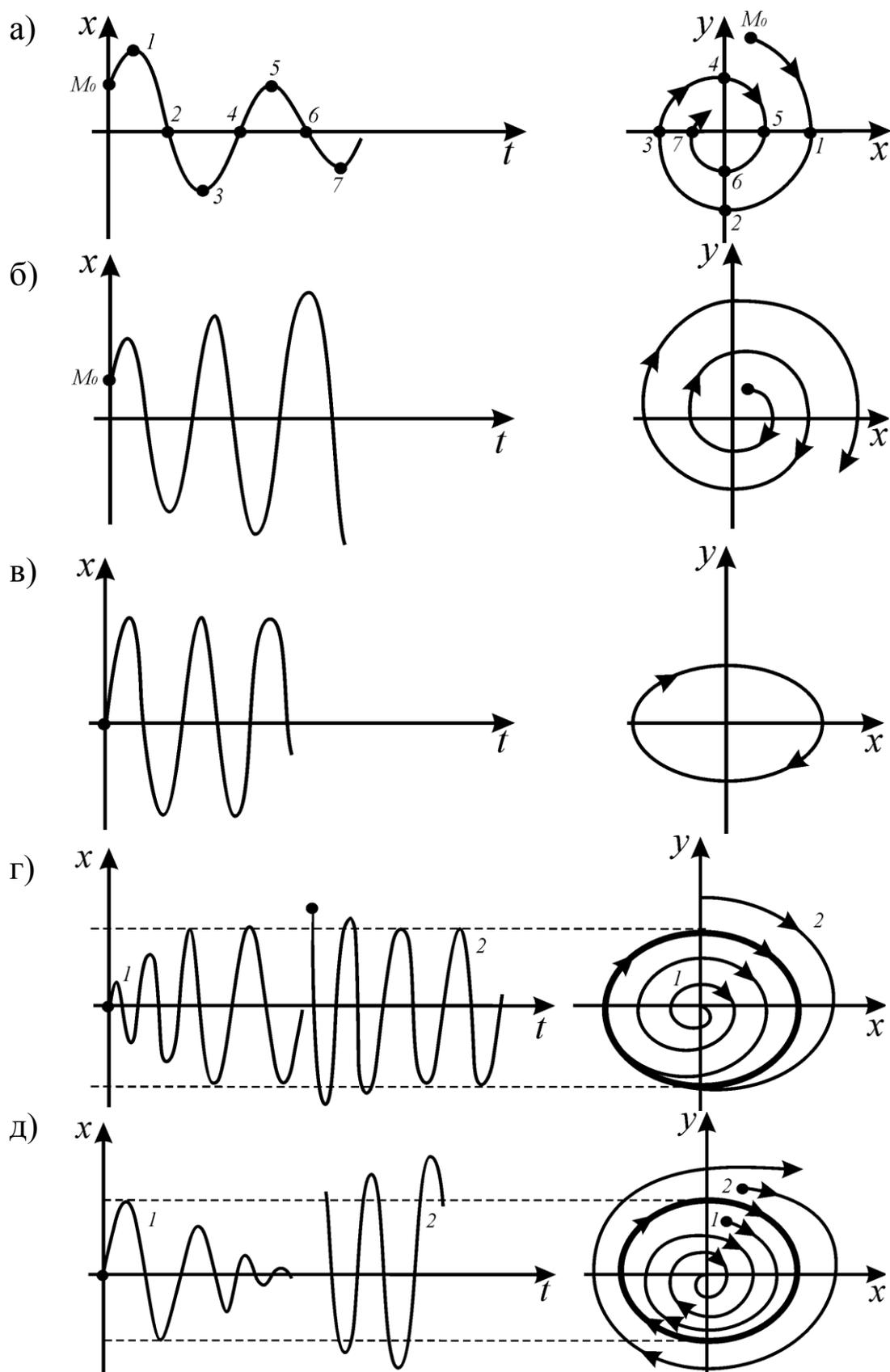


Рис. 2.2. Примеры фазовых портретов

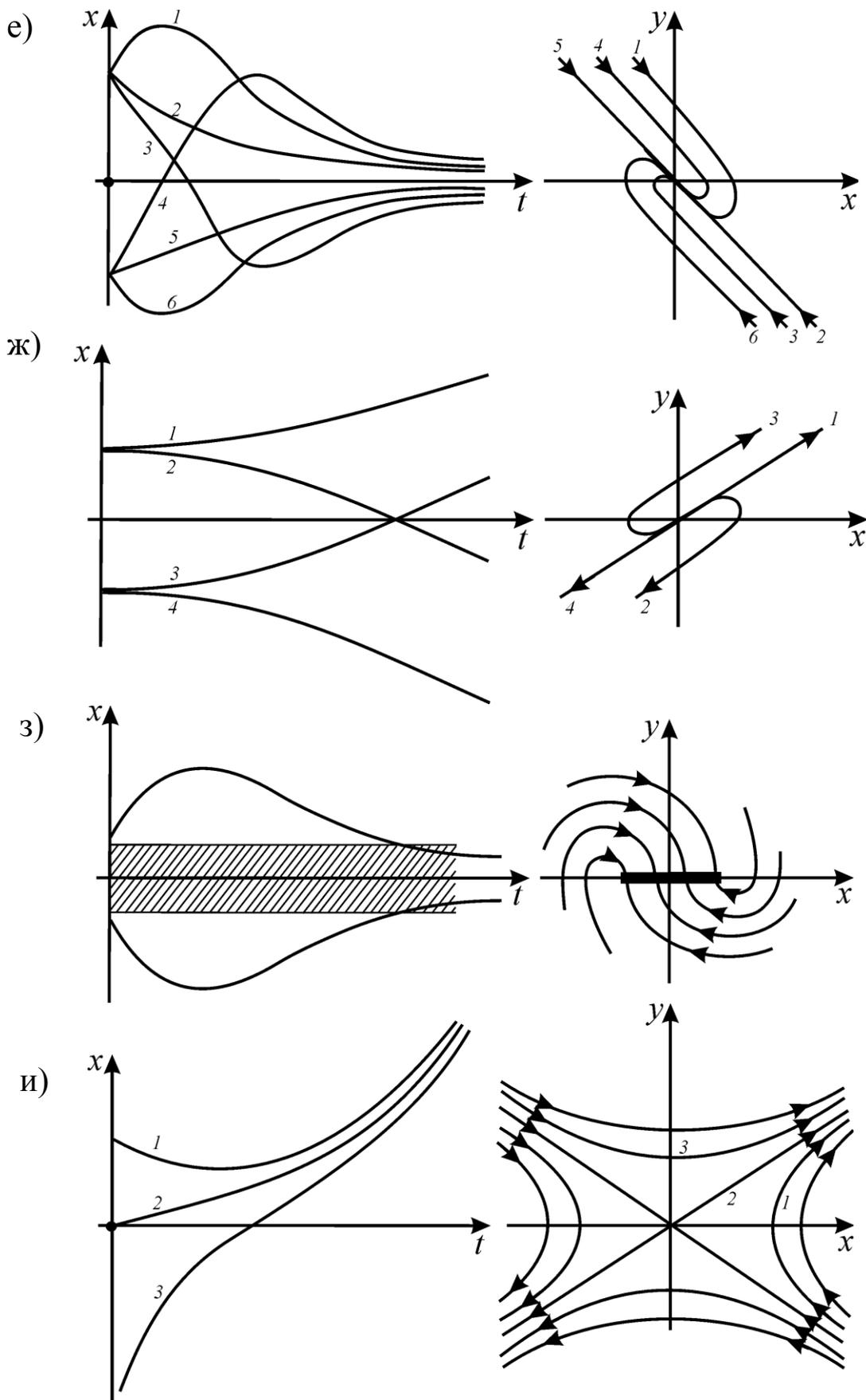


Рис. 2.2. Примеры фазовых портретов (продолжение)

В НСАУ возможно существование *предельных циклов*, которым соответствует замкнутая кривая на фазовой плоскости (эллипс). Предельный цикл может быть неустойчивым, когда фазовые траектории удаляются от него с обеих сторон (рис. 2.2, д), и устойчивым, когда внешние и внутренние траектории “наматываются” на эллипс (рис. 2.2, г) – именно такие режимы работы НСАУ являются автоколебаниями.

Различают системы с *мягким режимом возбуждения автоколебаний*, когда автоколебания всегда возникают при включении САУ, при любых начальных и внешних воздействиях (рис. 2.2, г), и системы с *жестким режимом возбуждения автоколебаний*, в которых для получения автоколебаний необходимо посредством внешнего воздействия создать достаточно большое начальное отклонение.

На рис. 2.2, в начале координат соответствует особая точка *центр*, которая характеризует равновесное состояние линейной САУ, находящейся на границе устойчивости.

Все рассмотренные термины и понятия используются при анализе и синтезе НСАУ для упрощения процедуры описания и обсуждения режимов, возможных в системе.

Фазовый портрет дает полное представление о динамике, точности, устойчивости и качестве НСАУ второго порядка при детерминированных воздействиях.

На практике нашли применение следующие методы фазовой плоскости: метод изоклин, метод припасовывания и метод точечных преобразований.

2.2. Метод изоклин

Для построения фазовой траектории по этому методу не требуется решать дифференциальные уравнения НСАУ. В качестве координат фазовой плоскости примем отклонение выходной величины от установившегося значения x и ее производную по времени $y = dx/dt$. При этом математическое описание системы второго порядка нужно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Q(x, y); \\ \frac{dx}{dt} = P(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

где Q, P – нелинейные функции от выходной величины и ее производной.

Для получения уравнений фазовых траекторий исключим время из описания, для чего разделим первое уравнение (2.1) на второе:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = R(x, y). \quad (2.2)$$

Метод изоклин основан на построении в фазовой плоскости линий, соответствующих алгебраическому уравнению

$$R(x, y) = C, \quad (2.3)$$

где C – постоянная величина, для которой задается ряд произвольных положительных и отрицательных значений, количество которых в результате определит точность построения фазовой траектории.

Каждому значению C соответствует своя линия – *изоклина*, которая представляет собой геометрическое место точек с одинаковым наклоном фазовых траекторий, проходящих через эти точки. Из (2.2) и (2.3) следует, что $dy/dx=C$, поэтому величина C определяет тангенс угла наклона фазовой траектории (касательной) к оси абсцисс.

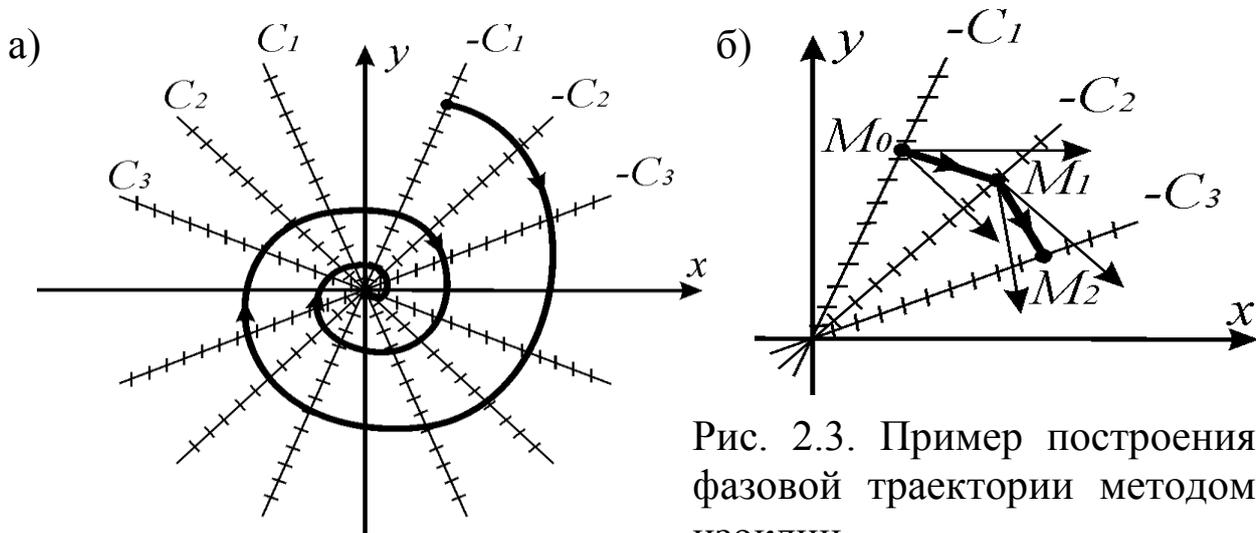


Рис. 2.3. Пример построения фазовой траектории методом изоклин

На рис. 2.3 показан пример построения фазовой траектории НСАУ методом изоклин. На каждую изоклину для построения фазовой траектории наносят штрихи, угол наклона которых определяется из условия ($C=dy/dx=tga \rightarrow a$). Совокупность штрихов на изоклинах определяет вид фазовой траектории (рис. 2.3, а), но для более точного ее построения можно воспользоваться следующей процедурой. Выбрав начальное положение изображающей точки на какой-либо изоклине, проводят из этой точки M_0 два луча – один параллельно штри-

хам на данной изоклине, а другой параллельно штрихам на следующей изоклине. Эти лучи отсекают на второй изоклине отрезок, который нужно разделить пополам – получим точку M_1 . Приняв теперь эту точку за исходную, повторим процедуру – получим точку M_2 и т.д. Для получения фазовой траектории нужно соединить полученные точки плавной линией.

Данный метод является простым только в том случае, если уравнение (2.3) будет не слишком сложным.

2.3. Метод припасовывания

Метод припасовывания (или сшивания) используется для построения фазовых траекторий НСАУ с кусочно-линейными нелинейностями, например релейными. В этом случае нелинейную характеристику можно представить набором линейных функций, которые поочередно включаются в математическое описание системы в моменты прохождения значений x и y через точки излома нелинейной характеристики. В результате фазовая траектория разбивается на участки, в пределах которых уравнение (2.2) является линейным и, следовательно, легко интегрируемым.

Точкам излома кусочно-линейной характеристики на фазовой плоскости будут соответствовать так называемые *линии переключения*. При пересечении фазовой траекторией этих линий изменяется правая часть уравнения (2.2). Соединение получаемых при этом участков в общую фазовую траекторию и называется припасовыванием.

На рис. 2.4 для примера приведены фазовые портреты НСАУ с различными релейными нелинейностями. Здесь φ_c – значение нелинейной функции. На рис. 2.4, а уравнение линии переключения – $x=0$ и она совпадает с осью ординат. На рис. 2.4, б линии переключения описываются уравнениями $x = \begin{cases} b & \text{при } y > 0 \\ -b & \text{при } y < 0 \end{cases}$, а на рис. 2.4, в – $x = \pm b$. Из-за не-

чувствительности реле между линиями переключения в последнем случае существует *особый отрезок* (см. п. 2.1).

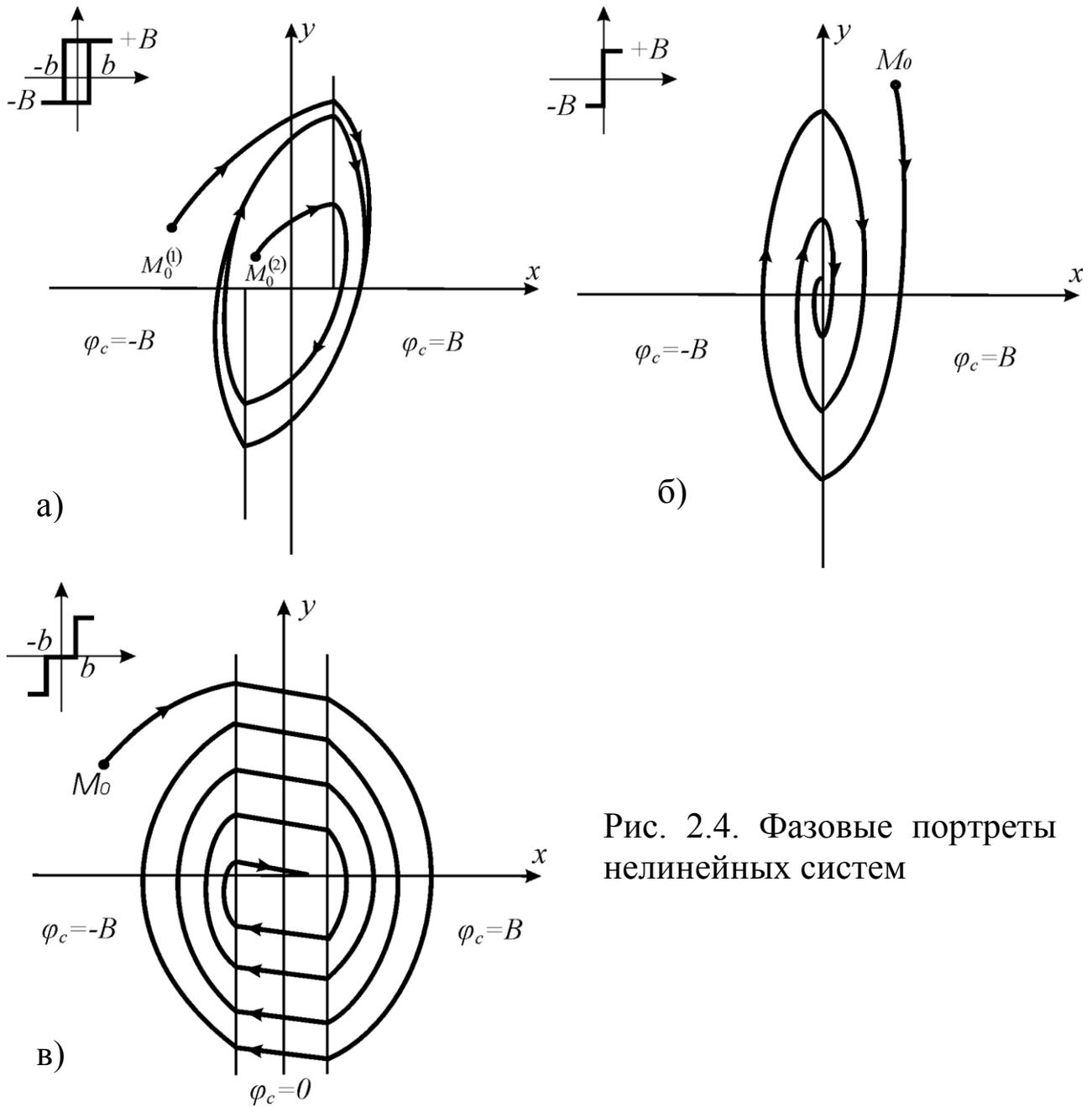


Рис. 2.4. Фазовые портреты нелинейных систем

Построение составной фазовой траектории производится путем интегрирования соответствующего уравнения, при этом для каждого последующего участка начальными условиями являются координаты последней изображающей точки предыдущего участка, находящейся на линии переключения.

Для релейных систем второго порядка этот метод построения фазовой траектории является наиболее удобным.

Пример. Рассмотрим построение фазовой траектории релейной системы автоматического регулирования (САР) (рис. 2.5) методом припасовывания.

Релейная САР предназначена для стабилизации скорости двигателя постоянного тока М1, которая определяется уровнем задающего напряжения U_3 . Двигатель получает питание от электромашинного усилителя (ЭМУ), обмотка управления которого (ОУ) подключена к напряжению U_{Π} потенциометра Π . Движок потенциометра перемещается исполнительным двигателем М2, который подключается к напряжению U_p через реверсирующие контакты (В – вперед, Н – назад) трехпозиционного поляризованного реле (РП). Катушка РП включена в цепь сравнения ЭДС тахогенератора $E_{ТГ}$ и задающего напряжения U_3 . Если действительная скорость М1 равна заданной, то $E_{ТГ} = U_3$ и якорь РП занимает среднее положение. При этом М2 отключен от сети и напряжение U_{Π} неизменно. САР работает в установившемся режиме.

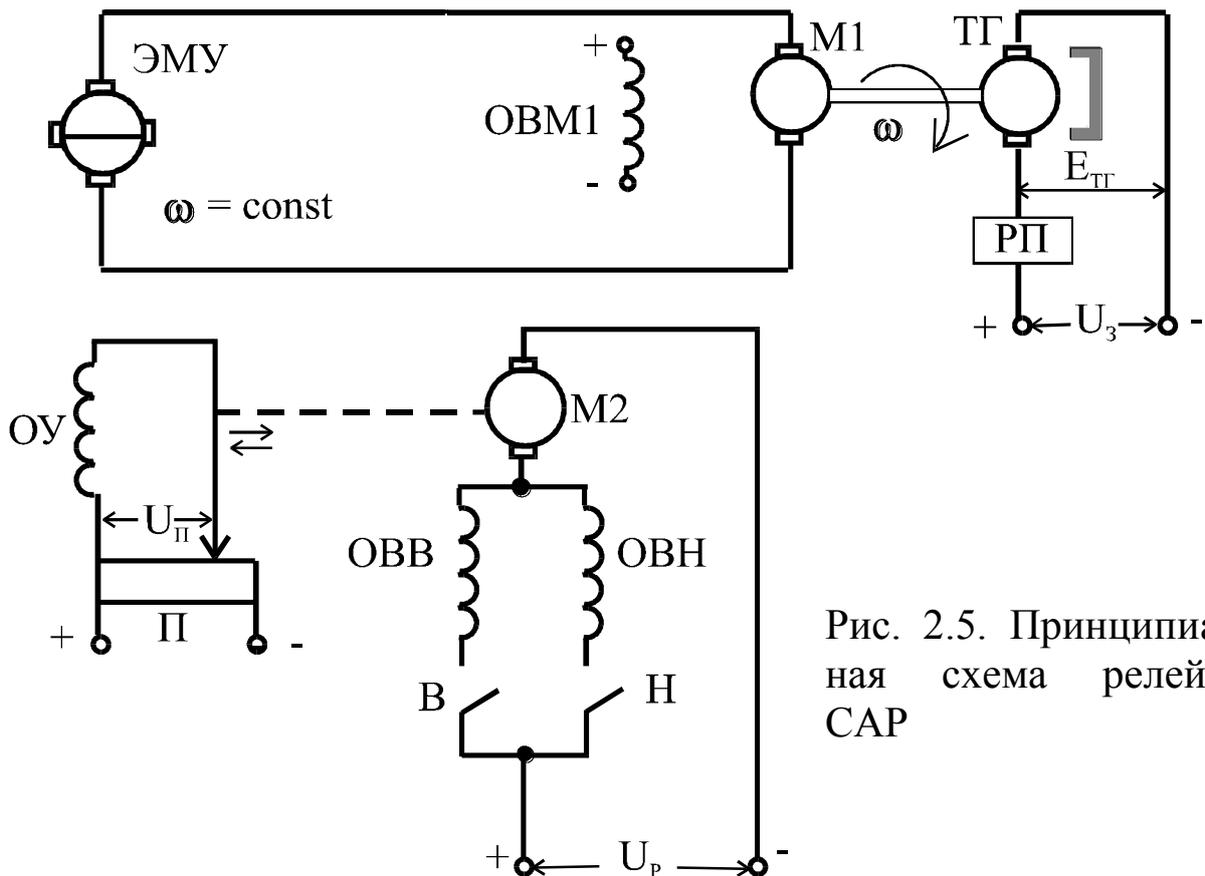


Рис. 2.5. Принципиальная схема релейной САР

При изменении нагрузки у двигателя М1 изменяется частота вращения и пропорционально ей изменяется величина $E_{ТГ}$, следовательно, возникает напряжение рассогласования $\Delta U = U_3 - E_{ТГ}$ и через катушку

РП начинает протекать ток. Если ΔU превысит значение $\pm \Delta U_0$ (зона нечувствительности реле), то в зависимости от полярности напряжения ΔU реле РП замкнет один из своих контактов (В или Н) в цепи якоря двигателя М2. При этом М2 включится и будет изменять напряжение U_{Π} в направлении, при котором величина ΔU будет уменьшаться. Когда ΔU станет меньше некоторого значения $\pm \Delta U_0$, якорь РП займет среднее положение, двигатель М2 отключится и изменение U_{Π} прекратится. Подключение обмоток ОВВ или ОВН исполнительного двигателя М2 задает направление вращения его якоря (ВПЕРЕД или НАЗАД).

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА

Зона нечувствительности реле – $a = \pm 0,2$.

Электромеханическая постоянная времени двигателя М1 – $T_{ЭМ} = 3,0$ с.

Коэффициент передачи двигателя М1 – $k_3 = 1,0$.

$k_1 = 1,1$; $T_{\Pi\Pi} = 1,15$ – постоянная времени звена, состоящего из М2 и Π , определяемая временем перемещения движка Π из одного крайнего положения в другое, и коэффициент передачи этого звена.

$k_2 = 3,2$ – коэффициент передачи ЭМУ.

РЕШЕНИЕ

Составим структурную схему САР на основе принципиальной схемы релейной САР, представленной на рис. 2.5. Представим ММ всех элементов схемы в следующем виде.

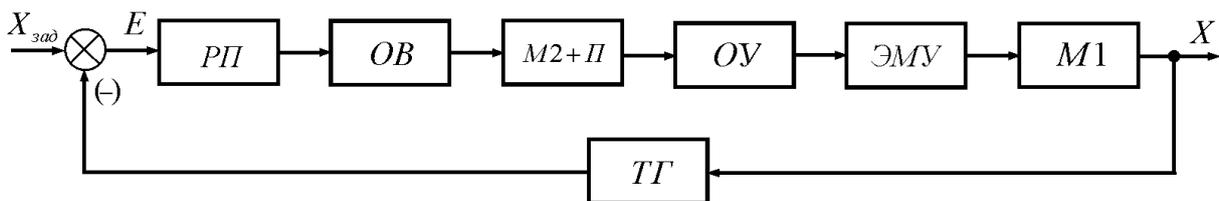
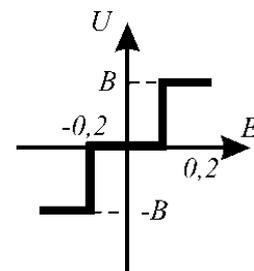


Рис. 2.6. Структурная схема САР

1. Идеальное трехпозиционное реле РП:

$$U = \begin{cases} B; & E > 0,2 \\ 0; & 0,2 \leq E \leq -0,2 \\ -B; & E < -0,2 \end{cases}$$



2. Двигатель М2 с потенциометром П:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi n \Rightarrow n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}; \quad n = K_D U_p \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = K_D 2\pi U_p;$$

$$\varphi = K_D 2\pi \int_0^t U_p dt = K_D 2\pi U_p t; \quad tg\alpha = K = \frac{\varphi_{\max}}{T_{\Pi}};$$

$$\varphi = \frac{\varphi_{\max}}{T_{\Pi}} U_p t; U_{\Pi} = K_{\Pi} \varphi; \quad U_{\Pi} = \frac{k_1 \varphi_{\max} U_p}{T_{\Pi}} \cdot t;$$

$$W_{M2+\Pi}(p) = \frac{k_1}{T_{\Pi} p} = \frac{1,1}{1,15 \cdot p}.$$

3. Электромашинный усилитель:

$$W_{ЭМУ}(p) = \frac{k_2}{T_{ЭМУ} p + 1} = 3,2 \quad (T_{ЭМУ} = 0 \text{ на первоначальном этапе по усло-}$$

вию задачи).

4. Двигатель М1:

$$W_{M1}(p) = \frac{k_3}{T_{ЭМ} T_{Я} p^2 + T_{ЭМ} p + 1} = \frac{1}{3p + 1} \quad (\text{на первом этапе принимаем}$$

$T_{Я} = 0$).

5. Тахогенератор:

$$W_{ТГ}(p) = k_{ТГ} = 1.$$

Постоянными времени обмоток ОВВ, ОВН, ОУ пренебрегаем.

Затем представим структурную схему САР в упрощенном виде (рис. 2.7), разделив ее на линейную часть и релейный элемент.

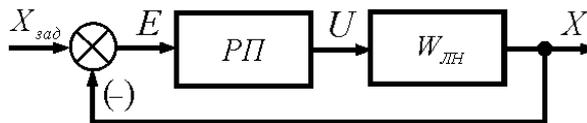


Рис. 2.7. Упрощенная структурная схема САР

Далее запишем ММ линейной части (ЛЧ) системы в виде

$$W_{ЛЧ}(p) = W_{M2+\Pi} \cdot W_{ЭМУ} \cdot W_{M1} = \frac{1,1}{1,15 p} \cdot 3,2 \cdot \frac{1}{3p + 1} = \frac{3,52}{1,15 p (3p + 1)};$$

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{3,52}{1,15 p (3p + 1)}; \quad X(p)[1,15 p (3p + 1)] = 3,52 U(p); \quad p = \frac{d}{dt};$$

$$3,45 \frac{d^2 x}{dt^2} + 1,15 \frac{dx}{dt} = 3,52U \cdot$$

Используя зависимость $y = \frac{dx}{dt}$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3,45 \frac{dy}{dt} = 3,52U - 1,15y; \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases}$$

в которой делим первое уравнение на второе и получаем в окончательном виде

$$3,45 \frac{dy}{dx} = \frac{3,52U - 1,15y}{y}.$$

Решаем данное уравнение для получения уравнения фазовых траекторий:

$$x = 3,45 \int \frac{y \cdot dy}{3,52U - 1,15y}.$$

Для каждого линейного участка нелинейности определяется свое уравнение фазовой траектории, затем эти уравнения поочередно используются для построения составной фазовой траектории (рис. 2.8). Построение фазовой траектории завершается ее приходом на линию переключения и переходом к следующему участку фазовой траектории, при этом последние значения предыдущей фазовой траектории являются начальными для следующей фазовой траектории:

а) $U=B$; $E > 0,2$

$$x = 3,45 \int \frac{y \cdot dy}{3,52B - 1,15y} = -3[y + 3,061B \cdot \ln|3,52B - 1,15y|] + c_1;$$

б) $U=0$; $0,2 \leq E \leq 0,2$

$$x = 3 \int \frac{y \cdot dy}{3,52 \cdot 0 - 1,15y} = -2,61 + c_2;$$

в) $U=-B$; $E < -0,2$

$$x = -3[y - 3,061B \cdot \ln|3,52B + 1,15y|] + c_3.$$

Принимаем $B=2$, выбираем начальные условия, например $x=-0,2$, $y=1,5$, и строим фазовый портрет исследуемой САР (рис. 2.8).

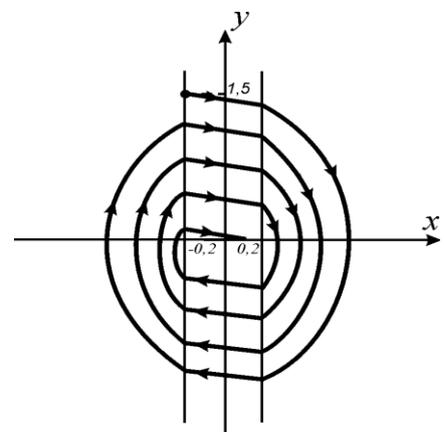


Рис. 2.8. Фазовый портрет САР

2.4. Метод точечных преобразований

Метод предназначен для определения параметров автоколебаний и анализа других, возможных в НСАУ режимов с помощью диаграммы точечных преобразований без построения фазовых траекторий.

Для пояснения метода воспользуемся фазовой траекторией, начальную изображающую точку которой установим на положительной полуоси x с координатой x_0 (рис. 2.9, а). После обхода вокруг начала координат фазовая траектория пересечет положительную полуось x в точке с координатой x_1 . При этом возможны варианты: $x_1 < x_0$ (затухающий процесс), $x_1 > x_0$ (расходящийся процесс), $x_1 = x_0$ (предельный цикл).

Задавая различные значения x_0 , получим соответствующие им значения x_1 , следовательно, значение x_1 может быть выражено как функция значения x_0 через уравнения фазовых траекторий $x_1 = f(x_0)$. На рис. 2.9, б приведен возможный вид этой зависимости, которая называется *диаграммой точечного преобразования*.

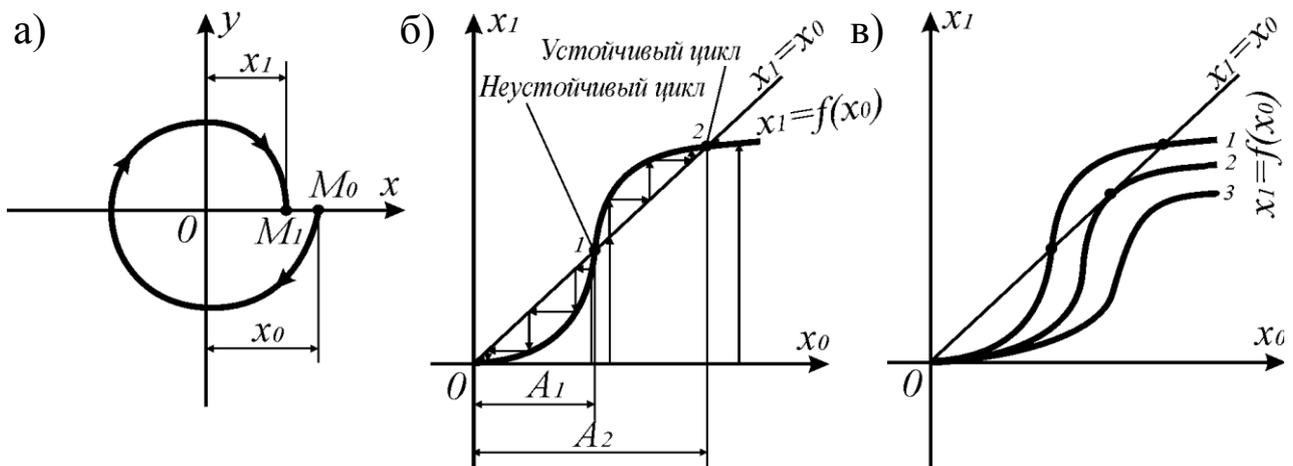


Рис. 2.9. Пояснения к методу точечных преобразований

Расположение участков диаграммы $x_1 = f(x_0)$ относительно биссектрисы координатного угла ($x_1 = x_0$) характеризует режимы НСАУ, соответствующие этим участкам (рис. 2.9, б). Расходящемуся процессу соответствует участок, расположенный выше биссектрисы, а сходящемуся — ниже биссектрисы. Точки пересечения соответствуют предельным режимам. Для наглядности стрелками показаны процессы преобразования точки M_0 в точку M_1 при различных исходных значениях x_0 . Из анализа диаграммы следует, что точка 1 соответствует неустойчивому предельному циклу, так как фазовые траектории с обеих сторон отходят от нее,

а точка 2 соответствует устойчивому предельному циклу – автоколебаниям. Если точек пересечения нет, то в НСАУ предельные циклы отсутствуют.

Главным достоинством этого метода является то, что при изменении параметров НСАУ можно получить совокупность диаграмм (рис. 2.9, в), с помощью которых легко определяются критические (бифуркационные) параметры системы, при переходе через которые *качественно* меняется ее фазовый портрет. Диаграммы на рис. 2.9, в характеризуют следующее:

1 – в НСАУ существует режим автоколебаний, система устойчива “в малом”;

2 – система находится на границе между качественно различными типами фазового портрета;

3 – автоколебания отсутствуют, система устойчива “в целом”.

Точечное преобразование можно осуществить для положительной полуоси y , а также преобразование положительной полуоси в отрицательную. Выбор одного из этих вариантов определяется видом фазового портрета НСАУ. При наличии на нем линий переключения удобнее находить точечное преобразование для этих линий.

Таким образом, методы фазовой плоскости являются простыми и наглядными и позволяют исследовать устойчивость и качество НСАУ в

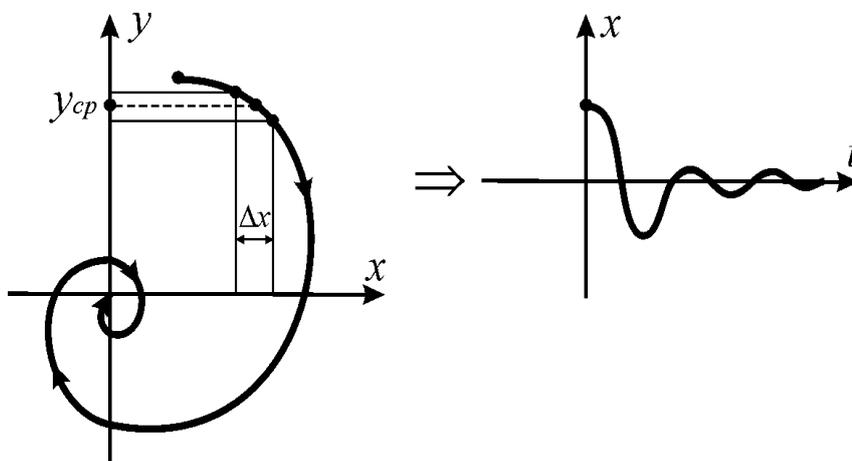


Рис. 2.10. Переход к зависимости $x(t)$

различных режимах, однако область их применения ограничена системами второго порядка. Отсутствие в явном виде времени на фазовых портретах является удобным, но непривычным фактором. При необходимости фазовую траекторию можно “развернуть” во

времени (рис. 2.10). Для этого нужно разделить фазовую траекторию на последовательные отрезки, для которых нужно определить значения Δx_i и y_{spi} , а поскольку $y = dx/dt$, то отсюда $\Delta x_i = \Delta x_i / y_{spi}$. Построение зависимости $x(t)$ на этой основе является сравнительно простой процедурой, которая при необходимости может быть выполнена.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НСАУ

Кроме известных из теории линейных систем методов линеаризации нелинейных статических характеристик, широкое применение при анализе НСАУ получили такие методы, как вибрационная линеаризация, гармоническая линеаризация, статистическая линеаризация и совместная гармоническая и статистическая линеаризация.

Использование различных видов линеаризации позволяет значительно упростить исходную математическую модель НСАУ и получить при анализе системы результаты, приемлемые для практического применения.

3.1. Вибрационная линеаризация

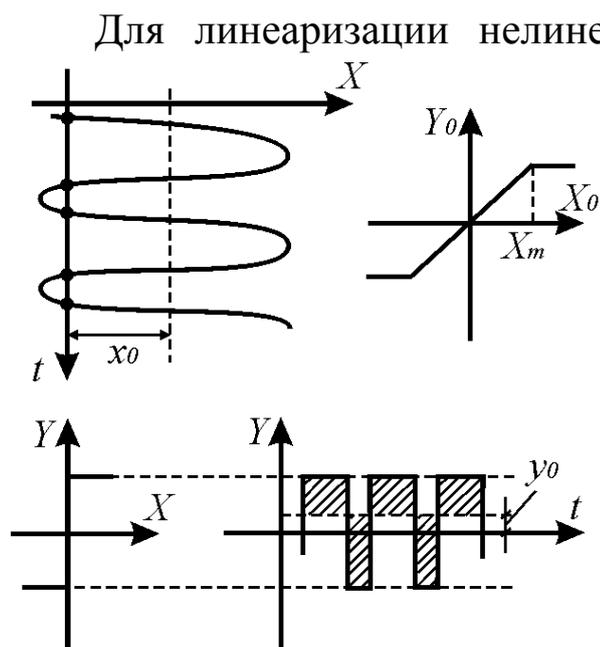


Рис. 3.1. Процесс вибрационной линеаризации

В данном случае происходит широтно-импульсная модуляция, при которой релейный элемент является модулятором, высокочастотное входное воздействие – сигналом несущей частоты, а постоянный (низкочастотный) сигнал x_0 – модулирующим сигналом.

Из теории информации известно, что для неискаженной передачи низкочастотного сигнала релейным элементом необходимо выполнение условия $f/f_0 \geq 3$, где f и f_0 – соответственно частоты высокочастотного и низкочастотного сигналов. Изменение низкочастотного сигнала, являющегося в данном случае сигналом управления, представляет собой переходный процесс в системе.

Вибрационную линейризацию можно осуществить с помощью специального генератора, создающего вынужденные колебания в системе, путем создания высокочастотных автоколебаний в системе, например, с помощью отрицательной жесткой инерционной местной обратной связи, охватывающей релейный элемент, а также путем создания скользящего режима.

Скользящий режим создается в НСАУ путем введения дополнительно главной гибкой отрицательной корректирующей обратной связи. Для НСАУ с фазовыми портретами, показанными на рис. 2.4, это приведет к наклону линий переключения против часовой стрелки. Наклон будет тем больше, чем больше будет значение коэффициента обратной связи $k_{o.c}$ в корректирующем звене ($W_k(p) = k_{o.c} p$). Трансформированный таким образом один из фазовых портретов приведен на рис. 3.2.

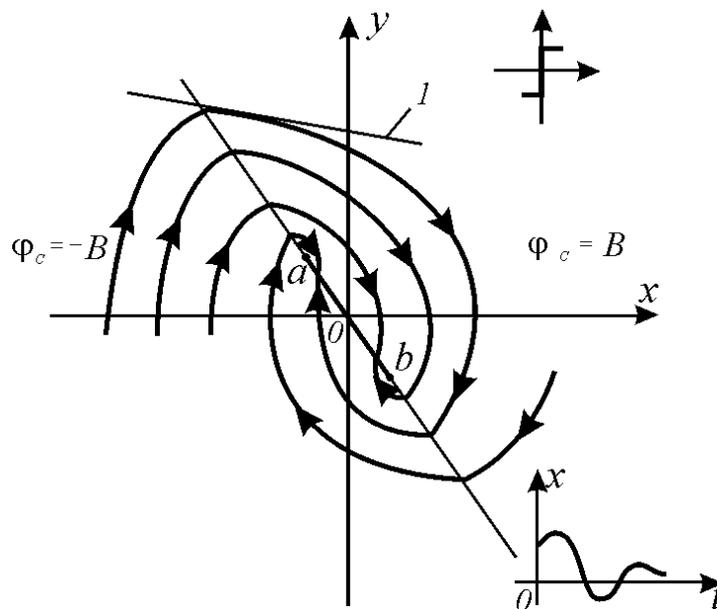


Рис. 3.2. Создание скользящего режима

Уравнения линий переключения на рис. 3.2 имеют вид:

а) $x + k_{o.c} = 0$;

$$б) x = \begin{cases} b - k_{o.c} & \text{при } y > 0; \\ -b - k_{o.c} & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Дополнительное воздействие по скорости выходного сигнала системы привело к наклону линий переключения - появилась зависимость значений x , при которых происходит переключение реле, от скорости изменения этой величины. Это привело к изменению переходного процесса – колебательность уменьшилась, число колебаний стало конечным в связи с появлением на линии переключения участка a – b (рис. 3.2), к которому с обеих сторон подходят фазовые траектории, а отходящих траекторий нет.

Попав на этот участок, изображающая точка скользит по нему в начало координат со скоростью, определенной текущей координатой y , поэтому режим, соответствующий участку a – b , называется *скользящим режимом*. При этом переходной процесс в релейной системе протекает как в системе непрерывного действия, а колебательный переходной процесс заканчивается апериодическим хвостом, что значительно ускоряет переходной процесс.

Участок a – b появляется на линии переключения по следующей причине. Наклон касательной 1 к фазовой траектории в точке пересечения ею линии переключения (рис. 3.2, точка a) увеличивается по мере приближения точки пересечения к началу координат. Когда ее наклон станет равным наклону линии переключения, изображающая точка будет скользить по этой линии в начало координат.

Физически скользящий режим заключается в бесконечно быстрых переключениях реле и изображающая точка движется к началу координат, колеблясь относительно линии переключения. При этом окончание переходного процесса является совокупностью апериодической составляющей и высокочастотных колебаний с незначительной амплитудой.

Скользящий режим возникает также в НСАУ с другими релейными элементами. Например, при наличии релейного элемента с неоднозначностью переходный процесс заканчивается автоколебаниями, амплитуда которых значительно меньше, чем в этой же системе без коррекции, и определяется шириной петли неоднозначности характеристик реле.

Таким образом, применение вибрационной линеаризации не только упрощает математическое описание НСАУ, но и улучшает режимы ее работы.

3.2. Гармоническая линеаризация

Метод предназначен для исследования автоколебаний в НСАУ. Он позволяет определять условия существования и параметры возможных автоколебаний в НСАУ. Основная идея метода заключается в линеаризации нелинейностей системы в режиме автоколебаний, которые на входе нелинейности принимаются синусоидальными. На выходе нелинейного звена сигнал значительно отличается от синусоидального (см. рис. 1.1), но после прохождения через линейную часть системы, являющуюся, как правило, фильтром нижних частот из-за ее инерционности, сигнал вновь становится синусоидальным. В этом заключается *гипотеза фильтра*, которая проверяется лишь после выполнения гармонической линеаризации, когда будут определены параметры автоколебаний. Если окажется, что линейная часть пропускает не только первую, но и вторую, третью и другие гармоники, то результаты анализа

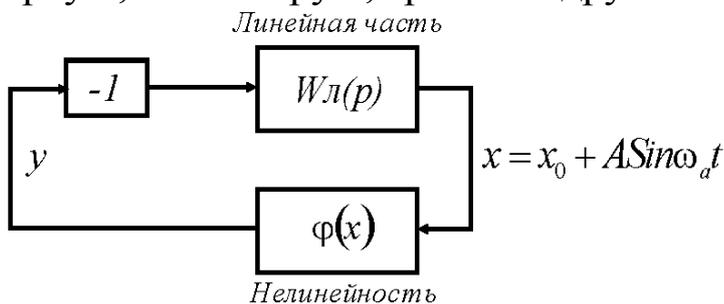


Рис. 3.3. Структура НСАУ

за с помощью этого метода будут неверными.

Для использования данного метода структура НСАУ должна быть приведена к виду, показанному на рис. 3.3. Изначально предполагается, что линейная часть системы

является фильтром низких частот и пропускает только первую гармонику, поэтому будем учитывать только ее на выходе нелинейного звена. Для этого разложим выходной сигнал нелинейного звена в ряд Фурье и отбросим высшие гармоники:

$$y(t) = \varphi(x) = y_0 + C_1 \text{Sin} \omega_a t + C_2 \text{Cos} \omega_a t,$$

$$\text{где } y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) d(\omega_a t); \quad (3.1)$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \text{Sin} \omega_a t \cdot d(\omega_a t);$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) \text{Cos} \omega_a t \cdot d(\omega_a t),$$

где y_0 – постоянная составляющая на выходе нелинейного звена, представляющая реакцию звена на постоянную составляющую на входе – x_0 .

Из зависимости $x = x_0 + A \sin \omega_a t$ определим $\sin \omega_a t = x/A$ и $\cos \omega_a t = px/A\omega_a$ при условии, что в данном случае $x_0 = 0$. Подставим полученные выражения в (3.1) и получим зависимость

$$y = k_{Г0}x_0 + \left(k_{Г} + k'_{Г} p\right) (x - x_0), \quad (3.2)$$

где $k_{Г0} = y_0/x_0$; $k_{Г} = C_1/A$; $k'_{Г} = C_2/A$ – коэффициенты гармонической линеаризации.

Уравнению (3.2) соответствует структура на рис. 3.4, представляющая собой эквивалентное линейное звено, полученное из нелинейного звена в результате гармонической линеаризации.

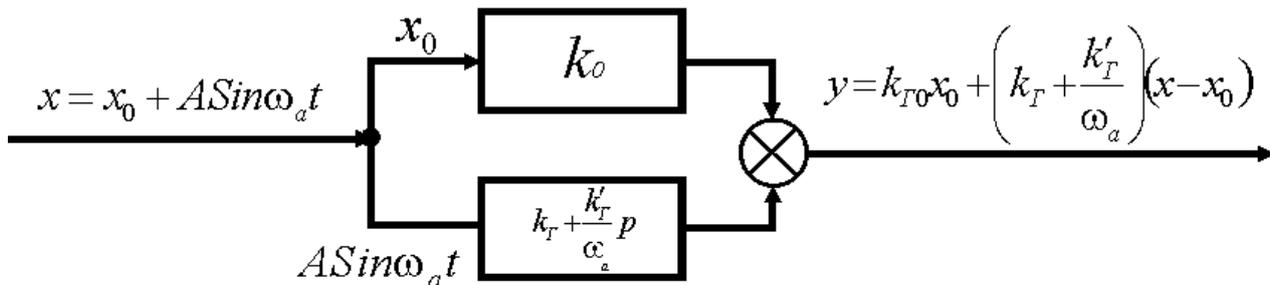


Рис. 3.4. Структура эквивалентного линейного звена

Коэффициенты $k_{Г0}$, $k_{Г}$, $k'_{Г}$ являются функциями постоянной составляющей x_0 , амплитуды A и частоты ω_a автоколебаний на входе нелинейного звена. При фиксированных x_0 , A , ω_a уравнение (3.2) является линейным. Замена нелинейного звена на эквивалентное линейное называется *гармонической линеаризацией*.

Коэффициент $k_{Г0}$ является коэффициентом передачи постоянной составляющей, а $k_{Г}$ и $k'_{Г}$ – коэффициенты передачи синусоидальной составляющей сигнала, причем $k_{Г}$ определяет выходную гармоническую составляющую, совпадающую по фазе с входным гармоническим сигналом, а $k'_{Г}$ – выходную составляющую, сдвинутую по фазе относительно входного сигнала на $\pi/2$ вперед или назад в зависимости от знака $k'_{Г}$, определяемого знаком C_2 . В случае использования неоднозначных характеристик (табл. 1.1) в уравнении (3.2) появляется коэф-

коэффициент $k'_Г$, который будет отрицательным из-за запаздывания при переходе сигнала на другую ветвь.

Если постоянная составляющая y_0 появляется на выходе звена не как результат действия постоянной величины x_0 на входе, а в результате несимметричности статической характеристики нелинейного звена относительно начала координат (рис. 3.5, а), когда при $x=0 \rightarrow y=y_0$, следовательно, $y_0 \neq k_{zo}x_0$. В этом случае описывающее звено выражение преобразуется к виду:

$$y = y_0 + \left(k_Г + \frac{k'_Г}{\omega_a} p \right) (x - x_0). \quad (3.3)$$

Этому выражению соответствует структура эквивалентного линейного звена, представленная на рис. 3.5, б.

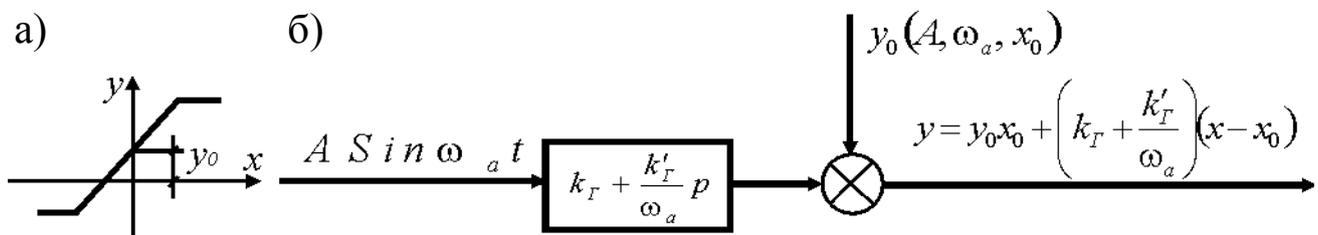


Рис. 3.5. Формирование эквивалентного линейного звена

В приложениях учебников по ТАУ даны формулы для определения коэффициентов $k_{zo}; k_Г; k'_Г; y_0$ (для последнего случая), которые являются довольно громоздкими, поэтому из-за ограниченного объема пособия они здесь не приводятся.

При отсутствии воздействия x_0 и симметричной нелинейной характеристике уравнение (3.2) принимает вид

$$y = \left(k_Г + \frac{k'_Г}{\omega_a} p \right) x = W_{НЛ}(p)x, \quad (3.4)$$

где $W_{НЛ}(p)$ – передаточная функция эквивалентного линейного звена.

Таким образом, при гармонической линейзации нелинейное звено заменяется линейным, эквивалентным для постоянной составляющей входного сигнала и приближенно эквивалентным для его колебательной составляющей.

Поскольку в результате гармонической линейзации НСАУ преобразуется в эквивалентную линейную систему, то для нахождения параметров автоколебаний (A, ω_a) необходимо исследовать условия, при

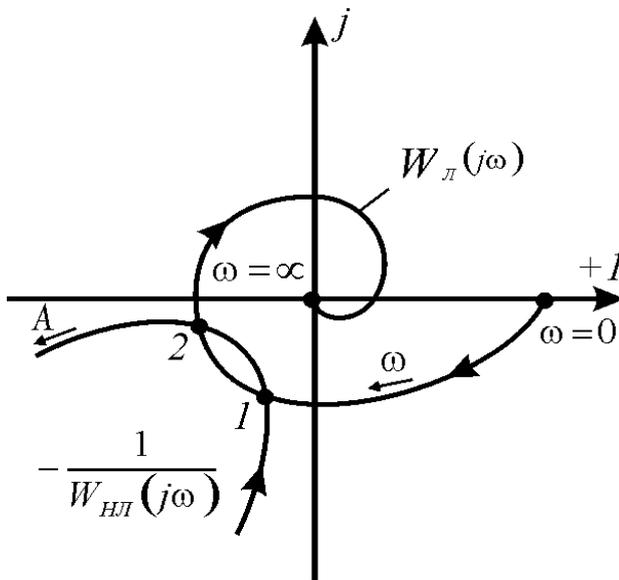
которых линейризованная система находится на границе устойчивости – этот режим соответствует автоколебаниям НСАУ.

Для решения этой задачи можно использовать любой критерий устойчивости из линейной части ТАУ, но удобнее всего воспользоваться критерием Найквиста:

$$W_{Л}(j\omega) \cdot W_{НЛ}(j\omega) = -1 \quad \text{или} \quad W_{Л}(j\omega) = -\frac{1}{W_{НЛ}(j\omega)}$$

При этом на комплексной плоскости нужно построить два годографа:

$$W_{Л}(j\omega) \quad \text{и} \quad -\frac{1}{W_{НЛ}(j\omega)}$$



(рис. 3.6). Точки пересечения годографов (1, 2) соответствуют предельным режимам. Автоколебаниям будет соответствовать одна из этих точек, для которой приращение ΔA по годографу

$$\left(-\frac{1}{W_{НЛ}(j\omega)}\right)$$

полученной при этом точки за пределы годографа $W_{Л}(j\omega)$. Этим

условиям на рис. 3.6 соответствует точка 2, для которой и определяют

$$\left(-\frac{1}{W_{НЛ}(j\omega)}\right)$$

Рис. 3.6. К определению параметров автоколебаний

являются параметры автоколебаний.

Для этой точки по годографу $W_{Л}(j\omega)$ находится значение ω_a , а по годографу $\left(-\frac{1}{W_{НЛ}(j\omega)}\right)$ – значение A .

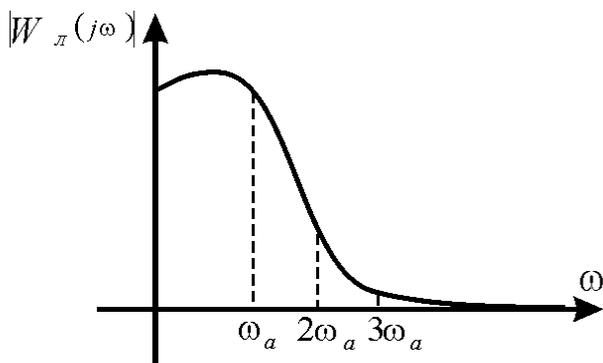


Рис. 3.7. Проверка гипотезы фильтра

Для определения достоверности полученных результатов нужно проверить гипотезу фильтра с использованием амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) линейной части НСАУ (рис. 3.7). Здесь нужно оценить прохождение второй или третьей гармоники через линейную часть. В случае использования не-

четной нелинейной характеристики второй гармоники на выходе нелинейного звена не будет и условие фильтра нужно проверить по третьей гармонике, которая для случая, показанного на рис. 3.7, имеет незначительный уровень по сравнению с первой гармоникой, характеризующей частоту автоколебаний. Если гипотеза фильтра не выполняется, то исследование необходимо проверить каким-либо другим методом.

3.3. Статистическая линеаризация

Исследование стационарных случайных режимов работы НСАУ проводится на основе статистической линеаризации для определения точности системы, которая оценивается математическим ожиданием и дисперсией или среднеквадратичным отклонением выходной величины.

Метод заключается в замене НСАУ линейной, эквивалентной исходной системе в отношении реакции на заданное случайное воздействие. В этом случае возможно применение методов исследования линейных систем.

Статистическая линеаризация является приближенным методом вследствие пренебрежения искажением закона распределения случайного сигнала в нелинейном звене. Проанализируем причину искажения закона распределения (рис. 3.8). Пусть на вход нелинейного звена поступает случайный сигнал с нормальным законом распределения плотности вероятности (рис. 3.8, а, б). После прохождения через нелинейное звено с нелинейностью типа “насыщение” (рис. 3.8, в) в диапазоне $(-b, b)$ закон распределения останется без изменения, так как на линейном участке нелинейной характеристики в данном случае принято, что $k=1$. За пределами этого участка все значения x дают одну и ту же величину $y=b$, с вероятностью появления сигнала, большего b по величине, равной нулю (рис. 3.8, г).

Таким образом, при прохождении через нелинейное звено закон изменения плотности вероятности изменяется вместе с математическим ожиданием и дисперсией. Если же изменять только математическое ожидание входной величины при неизменной ее дисперсии (график $p(x)$ смещается вправо или влево относительно статической характеристики $y(x)$) или при неизменном значении математического ожидания входного сигнала изменять величину дисперсии (график $p(x)$) рас-

ширится или сжимается), то становится очевидным, что при этом будет изменяться не только закон изменения плотности вероятности на выходе нелинейного звена, но и математическое ожидание и дисперсия

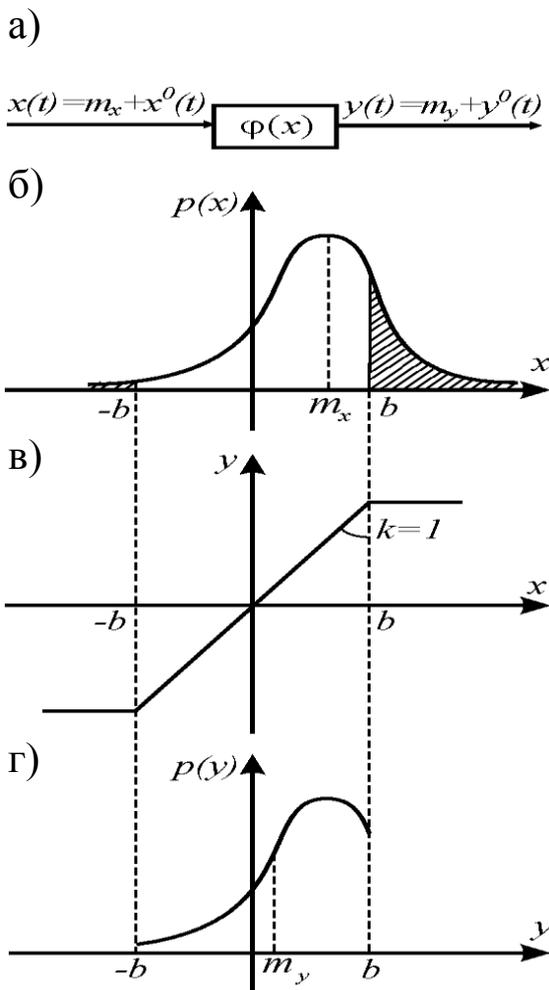


Рис. 3.8. Искажение закона распределения нелинейным звеном

характеризует адекватность нелинейного и эквивалентного звеньев относительно пропускания детерминированной составляющей ($m_x \rightarrow m_y$), а второе характеризует пропускание центрированной составляющей входного сигнала. Поскольку дисперсия не определяет полностью закон распределения случайной величины, то второе условие допускает наличие погрешности при использовании данного метода, следовательно, оценка точности НСАУ с помощью статистической линеаризации является принципиально приближенной.

При рассмотрении данного метода ограничимся рассмотрением лишь НСАУ с безынерционными нелинейными звеньями с однознач-

выходного сигнала. Очевидно, что в данном случае принцип суперпозиции, при котором возможно независимое определение реакции системы на математическое ожидание и дисперсию, неприменим.

Идея статистической линеаризации заключается в замене нелинейного звена эквивалентным линейным, выходной сигнал которого определяется зависимостью

$$y_{\text{э}}(t) = m_{y_{\text{э}}} + y_{\text{э}}^0(t), \quad (3.5)$$

являющейся достаточно близкой к зависимости $y(t)$ на выходе нелинейного элемента.

В качестве критерия для сравнения сигналов $y_{\text{э}}(t)$ и $y(t)$ используем равенство

$$\begin{cases} m_{y_{\text{э}}} = m_y; \\ D_{y_{\text{э}}} = D_y. \end{cases} \quad (3.6)$$

При этом первое условие характеризует адекватность нелинейного и эквивалентного звеньев относительно пропускания детерминированной составляющей ($m_x \rightarrow m_y$), а второе характеризует пропускание центрированной составляющей входного сигнала. Поскольку дисперсия не определяет полностью закон распределения случайной величины, то второе условие допускает наличие погрешности при использовании данного метода, следовательно, оценка точности НСАУ с помощью статистической линеаризации является принципиально приближенной.

ной нечетной статистической характеристикой. С учетом условия (3.6) представим уравнение (3.5) в виде

$$y_9(t) = m_{y_9} + y_9^0(t) = k_{C0}m_x + k_{C1}y^0(t), \quad (3.7)$$

которому соответствует структура на рис. 3.9, представляющая собой

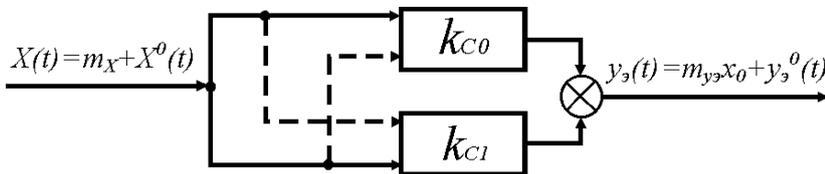


Рис. 3.9. Структура эквивалентного линейного звена

два параллельно включенных безынерционных звена с разными коэффициентами передачи детерминированной (k_{C0}) и случайной (k_{C1}) составляющих

случайного сигнала. Штриховыми стрелками показана зависимость коэффициентов k_{C0} и k_{C1} от обеих составляющих входного сигнала. Коэффициенты k_{C0} и k_{C1} называются *коэффициентами статической линеаризации*.

Из условий (3.6) следует, что $k_{C0} = \frac{m_y}{m_x}$; $k_{C1} = \pm \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Формула для определения k_{C1} получается при возведении в квадрат уравнения $y_9^0 = k_{C1}x^0(t)$ с последующим усреднением для получения равенства $D_{y_9} = k_{C1}^2 \cdot D_x$. Знак k_{C1} определяется линеаризуемой нелинейной функцией: если она возрастает в точке $x = m_x$, то $k_{C1} > 0$, а если убывает, то $k_{C1} < 0$.

Коэффициенты k_{C0} и k_{C1} однозначно определяются статической характеристикой нелинейного звена $y = \varphi(x)$ и законом распределения входной величины:

$$\begin{cases} k_{C0} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \rho(x) dx; \\ k_{C1} = \pm \frac{1}{\sigma_x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \rho(x) dx - m_y^2 \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

В приложениях учебников по ТАУ приведены выражения для определения k_{C0} , k_{C1} для типовых нелинейностей при нормальном законе распределения входной величины.

Полученная в результате линеаризации система является эквивалентной линейной лишь при фиксированных значениях m_x , σ_x , т.е. при стационарном случайном воздействии на систему.

В реальных системах закон распределения на входе нелинейных звеньев заранее неизвестен. Рекомендуется принимать его нормальным, поскольку известно, что при прохождении случайного сигнала через инерционную систему его закон распределения приближается к нормальному.

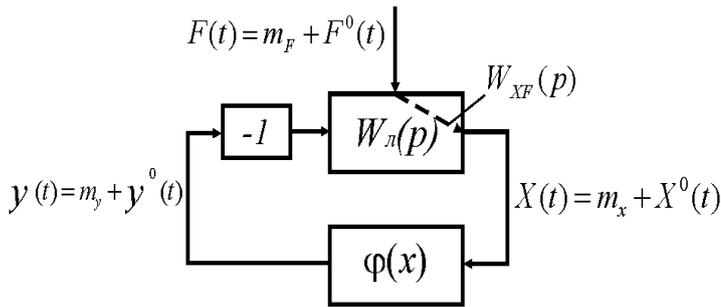


Рис. 3.10. Структура НСАУ

Методикой исследования точности НСАУ методом статистической линеаризации предусматривается приведение исходной системы к виду, показанному на рис. 3.10. При этом математическое ожидание системы можно представить совокупностью двух передаточных функций:

$$W_{30}(p) = \frac{m_x}{m_F} = \frac{W_{XF}(p)}{1 + k_{C0}(m_x, \sigma_x)W_X(p)}; \quad (3.9)$$

$$W_{31}(p) = \frac{x^0(t)}{F^0(t)} = \frac{W_{XF}(p)}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x)W_X(p)}. \quad (3.10)$$

Из (3.9) находится выражение для определения m_x :

$$m_x = W_{30}(0)m_F = \frac{W_{XF}(0)}{1 + k_{C0}(m_x, \sigma_x)W_X(p)} m_F, \quad (3.11)$$

где $p=0$, так как $m_F = const$ для стационарного случайного процесса $F(t)$.

Выражение для определения величины σ_x находим с помощью уравнения (3.10): –

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty A_{31}^2(\omega) S_{F^0}(\omega) d\omega}. \quad (3.12)$$

Здесь использованы известные зависимости: $A_{31}(\omega) = |W_{31}(j\omega)|$ – АЧХ, соответствующая (3.10); $S_{X^0}(\omega) = A_{31}^2(\omega) S_{F^0}(\omega)$ – спектральная плотность входного сигнала нелинейного элемента; $\sigma_{X^0} = \sqrt{D_{X^0}}$;

$D_{X^0} = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty S_{X^0}(\omega) d\omega$ – дисперсия входного сигнала.

Уравнения (3.11) и (3.12) содержат в правых частях обе искомые величины m_x , σ_x в выражениях для коэффициентов $k_{C0}(m_x, \sigma_x)$ и $k_{C1}(m_x, \sigma_x)$.

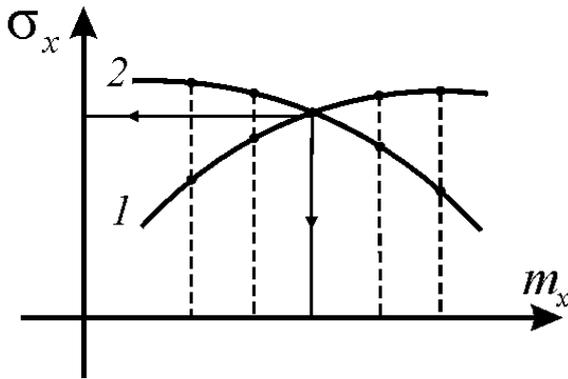


Рис. 3.11. Графическое определение величин m_x и σ_x

Для нахождения m_x , σ_x необходимо совместное решение этих уравнений. Используя метод последовательных приближений, задаются вначале приближенными значениями коэффициентов k_{C0} и k_{C1} и по формулам (3.11) и (3.12) находят m_x , σ_x в первом приближении, по которым уточняют значения k_{C0} и k_{C1} . Затем во втором приближении определяют m_x , σ_x и т.д. до получения приемлемой точности.

Применяется также совместное графическое решение уравнений (рис. 3.11). Вначале задаются рядом значений m_x и строят зависимость $\sigma_x(m_x)$ по уравнению (3.11) – кривая 1. Затем в тех же координатах строят зависимость $\sigma_x(m_x)$, находя σ_x по уравнению (3.12) путем подстановки в его правую часть значений m_x , σ_x , соответствующих кривой 1. В результате получится кривая 2. Точка пересечения кривых 1 и 2 даст искомые значения m_x , σ_x , по которым будут определены коэффициенты k_{C0} и k_{C1} .

Получив эквивалентную линейную систему, дальнейшее ее исследование проводят с помощью известных методов линейных систем. Как и в случае применения гармонической линеаризации, здесь также возможен анализ НСАУ, если статическая характеристика нелинейного элемента несимметрична относительно начала координат, а также при наличии в системе нескольких нелинейных звеньев.

Возможна также совместная статистическая и гармоническая линеаризация НСАУ, в которой существуют автоколебания и подается случайное воздействие. Коэффициенты линеаризации для этого случая также приведены в приложениях учебников по ТАУ.

Таким образом, рассмотренные способы линеаризации позволяют упростить математическое описание НСАУ и в результате производить ее анализ с использованием методов теории линейных систем.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ, КАЧЕСТВА И КОРРЕКЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Как было отмечено в п. 1.3, в НСАУ отсутствует понятие устойчивости системы вообще, поэтому нужно исследовать устойчивость отдельных режимов, в которых поведение системы может быть совершенно различным. Напомним, что в ТАУ под устойчивостью понимается внутреннее свойство системы, оцениваемое ее реакцией на изменение начальных условий, а не на внешние воздействия.

Кроме рассмотренных ранее методов фазовой плоскости, для НСАУ единственным известным строгим аппаратом аналитического исследования устойчивости является прямой метод Ляпунова. Широкое распространение получили также критерий абсолютной устойчивости Попова, гармоническая линеаризация и использование моделирования систем на АВМ и ЦВМ.

4.1. Прямой метод Ляпунова

Этот метод еще называется *вторым методом Ляпунова*, а его первым методом является метод исследования устойчивости линеаризованных систем при бесконечно малых отклонениях от установившегося режима, хорошо известный из теории линейных систем.

Прямой метод Ляпунова является наиболее общим методом исследования устойчивости любых НСАУ. Идея метода заключается в использовании специальной функции Ляпунова, производная которой вдоль фазовых траекторий для системы, устойчивой в данном режиме, будет отрицательной. Для пояснения этой идеи воспользуемся фазовым пространством (рис. 4.1). Пусть в этом пространстве находится замкнутая поверхность V , описываемая уравнением

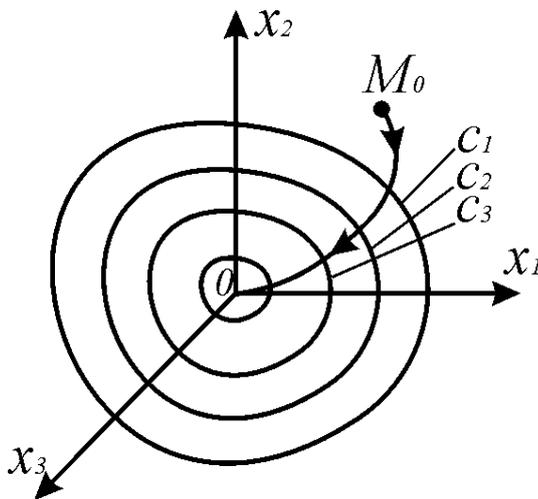


Рис. 4.1. Пояснение идеи метода

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C, \quad (4.1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — координаты системы;

C – параметр, определяющий величину функции.

При дискретном изменении параметра C получим в фазовом пространстве совокупность вложенных друг в друга поверхностей. При $C \rightarrow 0$ поверхность стягивается в начало координат, а достаточным признаком устойчивости в этом случае является движение изображающей точки фазовой траектории только внутрь поверхности C . Аналитически такой характер движения изображающей точки означает, что *НСАУ будет устойчивой, если вдоль фазовых траекторий производная функции $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отрицательна.*

В изложении А. И. Ляпунова условие устойчивости формулируется следующим образом: *возмущенное движение асимптотически устойчиво, если можно указать такую знакоопределенную функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, производная которой по времени dV/dt , определенная на основании дифференциальных уравнений системы, тоже является знакоопределенной функцией, но противоположного знака.* Знакоопределенная функция при всех значениях переменных имеет один знак, а в начале координат обращается в нуль.

Выражение для dV/dt наряду с переменными x_1, x_2, \dots, x_n содержит их первые производные, для нахождения которых нужно *уравнения системы представить в форме Коши:*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.2)$$

Для определения устойчивости системы по отрицательности производной dV/dt вдоль фазовых траекторий, описываемых уравнениями (4.2), необходимо подставить эти уравнения в выражение dV/dt и определить границы изменения значений переменных и параметров системы, при которых dV/dt будет отрицательной. Так, без решения уравнений системы и построения фазовых траекторий находятся условия устойчивости.

Основная трудность в использовании прямого метода Ляпунова заключается в отсутствии общих правил отыскания *функции Ляпунова* $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для ряда конкретных НСАУ разработаны методы определения вида функции Ляпунова, но в общем случае главным здесь является опыт и интуиция разработчика.

Прямой метод Ляпунова дает только *достаточные условия* устойчивости при заданной функции Ляпунова, т.е. из полной области устойчивости с его помощью можно определить лишь ее часть. Для нахождения полной информации об устойчивости всех режимов, воз-

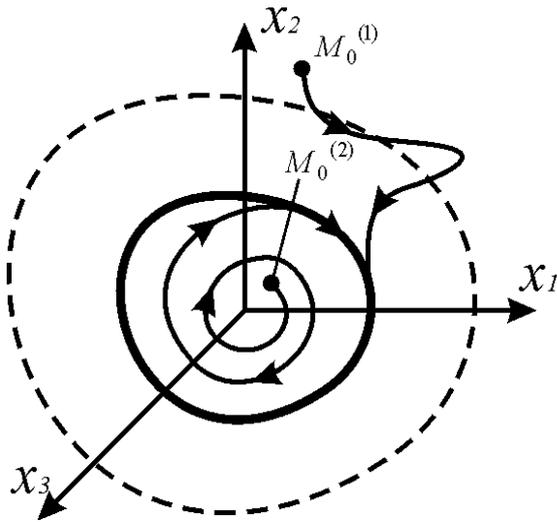


Рис. 4.2. Наличие в НСАУ различных режимов

можных в НСАУ (рис. 4.2), на практике приходится использовать для различных режимов разные функции Ляпунова, однако для систем с асимптотической устойчивостью и фазовой траекторией, показанной на рис. 4.1, достаточно нахождения одной функции Ляпунова.

Таким образом, прямой метод Ляпунова является очень простым и надежным в использовании, но только при условии, что удастся отыскать нужную функцию Ляпунова (или совокупность функций), соответствующую виду фазовой траектории системы.

4.2. Критерий абсолютной устойчивости Попова

Абсолютная устойчивость – это асимптотическая устойчивость “в целом” при задании нелинейности областью в виде угла, в котором

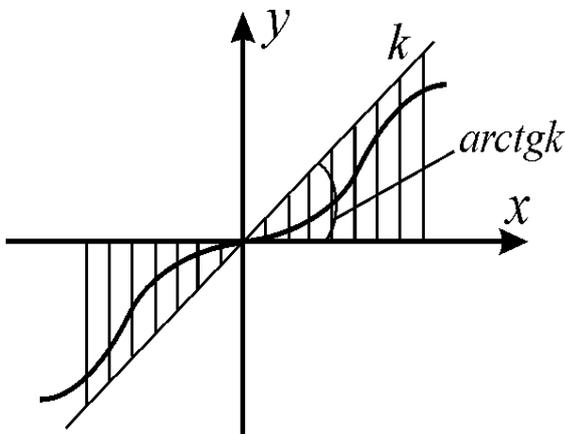


Рис. 4.3. Расположение статической характеристики в угле $(0, k)$

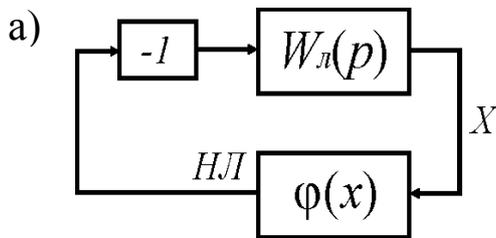
она должна находиться (рис. 4.3). При этом условии конкретная статическая характеристика нелинейного звена может быть любой, лишь бы она была однозначной и находилась внутри угла, ограниченного заштрихованной областью на рис. 4.3. Это упрощает описание нелинейности и условий устойчивости, а также позволяет проводить исследование устойчивости, когда вид нелинейности известен не точно или может изменяться в заданном диапазоне $(0, k)$ в процессе работы системы.

Для использования критерия Попова структуру НСАУ нужно представить в виде, показанном на рис. 4.4, а, т.е. нужно разделить си-

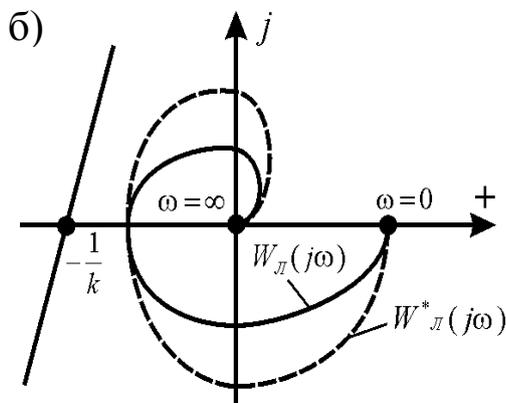
стему на линейную и нелинейную части. Сформулируем критерий Попова для двух случаев.

1. Линейная часть НСАУ устойчива. Система абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части системы через точку $(-1/k, j0)$ можно провести хотя бы одну прямую линию, не пересекающуюся с характеристикой $W_{Л}^*(j\omega)$, построенной по выражению

$$W_{Л}^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_{Л}(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W_{Л}(j\omega).$$



ной, не пересекающуюся с характеристикой $W_{Л}^*(j\omega)$, построенной по выражению



На рис. 4.4, б показан случай, когда НСАУ абсолютно устойчива. При этом характеристика $W_{Л}^*(j\omega)$ отличается от характеристики $W_{Л}(j\omega)$ тем, что все ее ординаты умножаются на текущее значение частоты.

Если характеристика $W_{Л}^*(j\omega)$ слева выпукла, достаточное условие устойчивости НСАУ совпадает с условием устойчивости линейной системы при замене нелинейной характеристики на линейную с коэффициентом передачи k .

Рис. 4.4. Критерий Попова при устойчивой линейной части

2. Линейная часть НСАУ неустойчива. Система абсолютно устойчива, если через точку $\left(-\frac{1}{k-k_{\Phi}}, j0\right)$ можно провести прямую линию, не пересекающуюся с характеристикой $W_{Л}^*(j\omega)$.

Здесь k_{Φ} – коэффициент передачи линейного фиктивного корректирующего звена, которым нужно охватить неустойчивую линейную часть системы, чтобы сделать ее устойчивой. Схема включения в НСАУ двух фиктивных звеньев показана на рис. 4.5, а. При такой схеме процессы в НСАУ не изменяются, но зато можно использовать критерий Попова.

Полученную с помощью фиктивных звеньев систему можно описать следующими зависимостями:

$$W_{л.ф}(p) = \frac{W_{л}(p)}{1 + k_{\phi} W_{л}(p)}; \quad \varphi(x) = \varphi(x) - k_{\phi} x.$$

Ограничения, накладываемые при этом на статическую характеристику нелинейности, показаны на рис. 4.5, б.

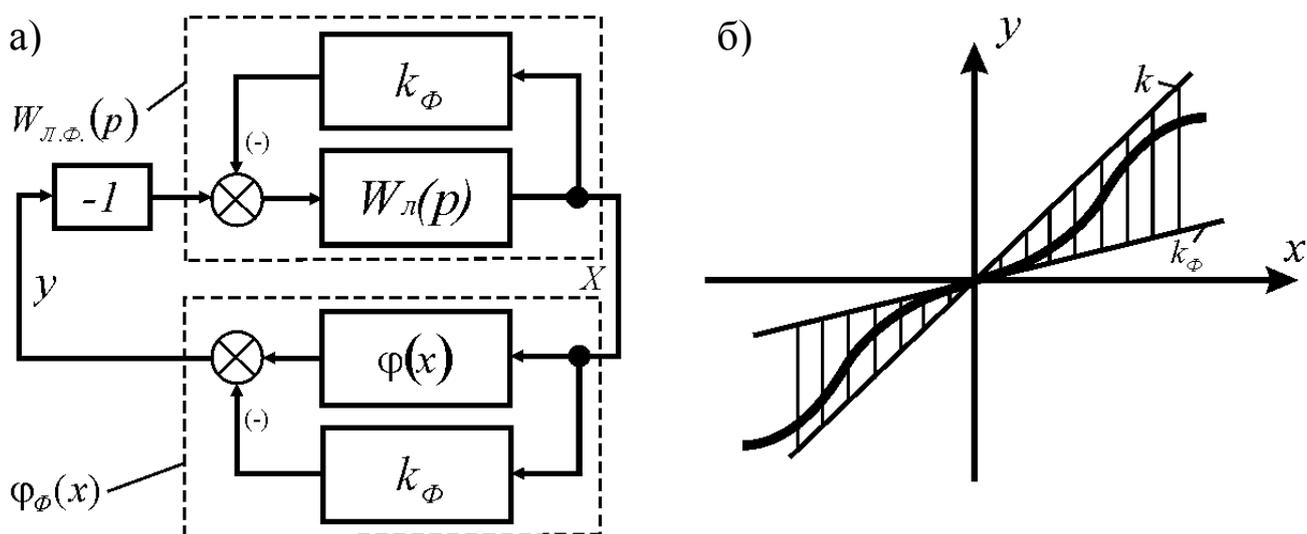


Рис. 4.5. Критерий Попова при неустойчивой линейной части

Если с помощью фиктивного звена линейную часть не удастся сделать устойчивой, то это означает, что абсолютная устойчивость системы отсутствует.

Критерий Попова является *достаточным*, т.е. он дает только часть полной области устойчивости и его невыполнение не означает неустойчивость системы. В этом случае для исследования устойчивости нужно воспользоваться другими методами.

4.3. Оценка качества нелинейных систем

Для оценки качества НСАУ используются те же показатели переходных процессов, что и в теории линейных систем: время переходного процесса, максимальное отклонение, колебательность и др. Однако принципиальным отличием является зависимость показателей качества в НСАУ от величины воздействия, вызвавшего переходный процесс.

Наиболее простым способом оценки качества НСАУ является ориентировочный анализ качества при замене нелинейности на линей-

ные звенья, если это возможно, с получением показателей качества и последующим оцениванием влияния неучтенных нелинейностей на динамику НСАУ. Для этого могут быть использованы методы численного интегрирования или моделирование на АВМ или ЦВМ, а также метод гармонической линеаризации.

Для НСАУ второго порядка качество переходных процессов легко определяется по фазовому портрету системы.

Длительность переходных процессов может быть приближенно определена по степени их устойчивости η с помощью прямого метода Ляпунова или критерия абсолютной устойчивости Попова путем сравнения длительности переходных процессов $x(t)$ в НСАУ с длительностью затухающего экспоненциального процесса $e^{-\eta t}$, для которого длительность принимается равной трем постоянным времени этой экспоненты, т.е. $t_{II} \approx 3/\eta$.

4.4. Коррекция в нелинейных системах

При синтезе НСАУ выбор корректирующих звеньев чрезвычайно широк. Применяются линейные, нелинейные (непрерывные и дискретные) звенья и их различные комбинации, а также звенья, в которых кроме функциональных зависимостей выполняются логические и вычислительные операции.

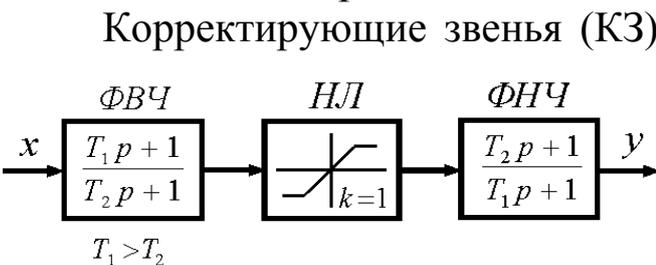


Рис. 4.6. Структура нелинейного динамического корректирующего звена

Корректирующие звенья (КЗ) включаются в НСАУ для устранения или уменьшения отрицательного влияния на ее работу какой-либо нелинейности (деформация статических характеристик, уменьшение влияния нелинейности и т.д.), повышения качества САУ путем устранения противоречия между быстродействием и колебательностью, управления процессами форсировки и др.

Различают два типа нелинейных КЗ: включаемые последовательно или параллельно с основными звеньями системы и переключающие КЗ, которые при изменении состояния системы или внешних воздействий релейно изменяют настройку или структуру НСАУ. Нелинейные

КЗ используются для подавления автоколебаний, улучшения качества процессов управления и повышения точности в НСАУ.

На рис. 4.6 показана структура нелинейного динамического корректирующего звена, состоящего из двух линейных и одного нелинейного звеньев. При малых входных сигналах, когда НЛ не входит в насыщение, общая передаточная функция этой структуры равна единице и она не будет влиять на работу НСАУ. При больших входных сигналах, когда НЛ войдет в насыщение, вся структура будет вести себя как динамическое звено со спадающей с ростом частоты АЧХ, степень спада которой в соответствии с зависимостью $A(\omega)=y(\omega)/x(\omega)$ при $y(\omega)=const$ зависит от величины входного сигнала. Фазовый сдвиг при этом будет практически неизменным. Такая коррекция применяется в НСАУ для ее защиты от больших воздействий.

Интересными свойствами обладают также *псевдолинейные корректирующие звенья*, в которых не существует жесткой связи между АЧХ и фазочастотной характеристикой (ФЧХ) в отличие от линейных звеньев и систем.

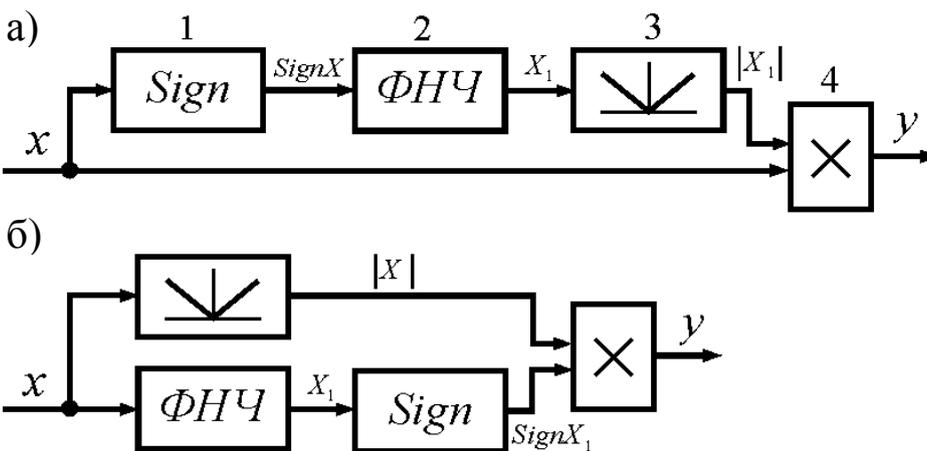


Рис. 4.7. Структуры псевдолинейных звеньев

звеньев и систем.

Псевдолинейные звенья представляют собой нелинейные корректирующие звенья, эквивалентные АЧХ и ФЧХ которых не зависят от амплитуды входного сигнала и могут формироваться независимо друг от друга

во всем диапазоне частот, создавая тем самым новые возможности повышения устойчивости и качества нелинейных систем.

На рис. 4.7, а показана структура псевдолинейного звена для формирования АЧХ, не зависящей от амплитуды входного сигнала x . Сигнал X_1 не зависит от амплитуды сигнала x из-за наличия релейного звена 1, выходной сигнал которого $SignX$ преобразуется в X_1 в соответствии с выбранной АЧХ фильтра нижних частот (ФНЧ). Звено 3 (выпрямитель) дает абсолютное значение (модуль) выходного значения X_1 , которое поступает в множительное звено 4, где перемножается с вход-

ным сигналом x . Таким образом, в данном псевдолинейном звене формируется АЧХ, близкая к АЧХ фильтра ФНЧ при отсутствии существенного фазового запаздывания.

Процесс формирования фазовой характеристики ФЧХ виден из структуры псевдолинейного звена, показанного на рис. 4.7, б. Здесь верхняя ветвь передает на выход модуль входного сигнала $|X|$, а нижняя – формирует фазу в соответствии с настройкой фильтра верхних частот (ФВЧ). Поскольку с увеличением номера гармоники уменьшается время периода колебаний, то сигнал $SignX_1$ будет опережать по фазе входной сигнал x и иметь постоянную величину, не зависящую от амплитуды и частоты входного сигнала.

Рассмотренные схемы включаются последовательно с основными звеньями системы и в каналы обратной связи. Существует большое разнообразие псевдолинейных звеньев, например звенья с АЧХ как у линейного интегрирующего звена, но вдвое меньшим фазовым сдвигом, псевдолинейные дифференцирующие звенья и др.

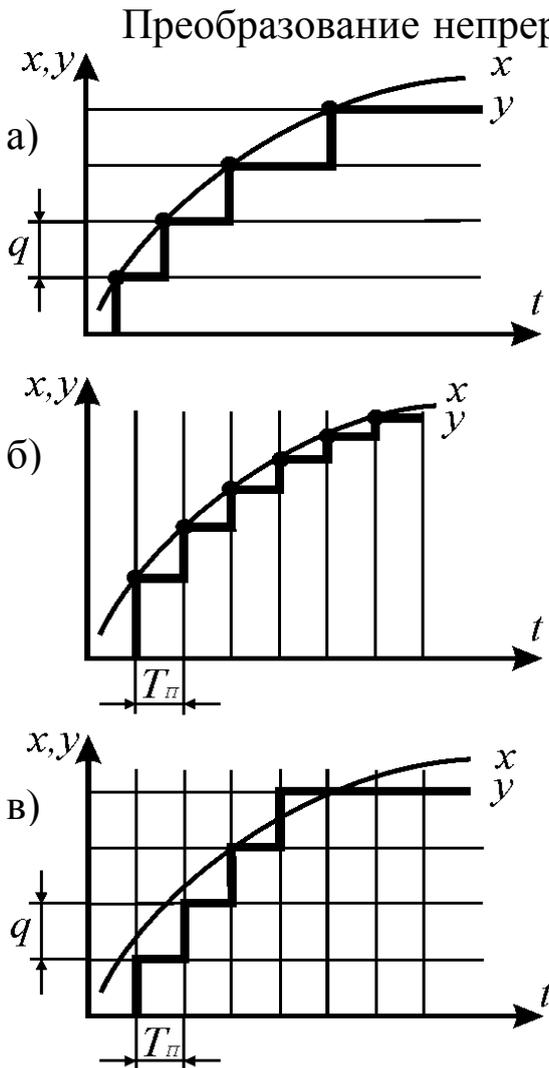
Применяются также *переключающие корректирующие звенья*, которые корректируют динамические свойства системы с помощью дискретных изменений ее структуры или параметров основных или корректирующих звеньев в функции каких-либо переменных системы или внешних возмущающих воздействий. Особенно полезна такая коррекция при значительных изменениях свойств объекта управления или больших возмущающих воздействиях для защиты системы от недопустимых режимов. Переключающие корректирующие звенья придают системе свойство самоорганизации, позволяющее ей автоматически выбирать целесообразные для конкретных случаев режимы работы.

В цифровых САУ, где основным компонентом управляющего устройства является ЦВМ, коррекция может быть реализована алгоритмически без использования специальных корректирующих устройств или в сочетании с ними.

Очевидно, что возможностей у нелинейной коррекции несоизмеримо больше, чем у линейной, однако она выбирается, как правило, для конкретных режимов, а для других режимов, возможных в НСАУ, она может принести не пользу, а вред. Кроме того, к настоящему времени нет общей методики выбора нелинейных корректирующих устройств, поэтому при синтезе НСАУ используют метод последовательных приближений и метод проб и ошибок.

5. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

В дискретных САУ хотя бы один сигнал является дискретным (изменяется скачком во времени). Существуют дискретные системы, состоящие только из звеньев дискретного типа, все сигналы которых являются дискретными. Однако в большинстве дискретных систем присутствуют звенья непрерывного и дискретного действия, а также звенья, преобразующие непрерывные сигналы в дискретные и наоборот.



квантованием сигнала. Различают квантование *по уровню* (рис. 5.1, а), *по времени* (рис. 5.1, б) и одновременное квантование по уровню и по времени (рис. 5.1, в).

Квантованный по уровню сигнал может принимать только конкретные значения, равные заданным заранее уровням, отстоящим друг от друга, как правило, на постоянную величину q . Выходной сигнал y формируется при достижении входной величиной x следующего уровня.

Квантованный по времени сигнал формируется через промежутки времени, равные периоду квантования $T_{п}$, при этом уровень сигнала y остается в течение периода равным сигналу x в начале периода повторения.

При комбинированном квантовании выходной дискретный сигнал формируется через промежутки времени, равные периоду квантования $T_{п}$ с уровнем, который является ближайшим к значению сигнала x в начале каждого периода повторения.

Рис. 5.1. Виды квантования

который является ближайшим к значению сигнала x в начале каждого периода повторения.

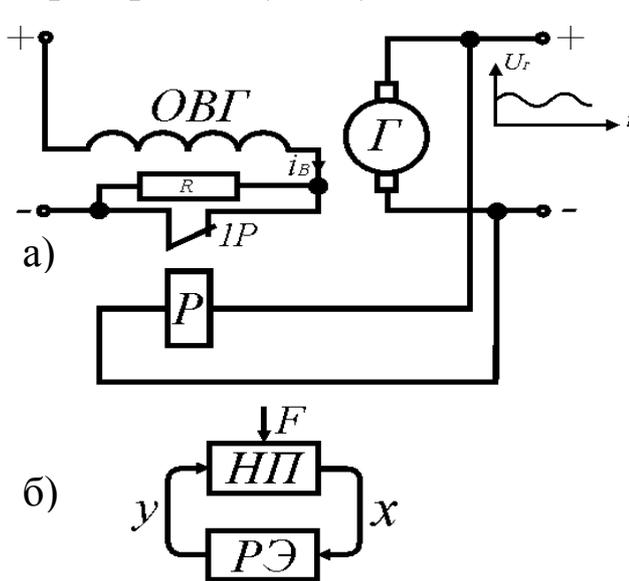
Системы с квантованием по уровню называются *релейными*, с квантованием по времени – *импульсными*, а с комбинированным квантованием – *цифровыми САУ*.

5.1. Релейные системы

Релейные системы автоматического управления (РСАУ) могут содержать один или несколько релейных элементов, входящих в любую часть системы. На практике чаще всего встречаются системы с одним релейным элементом, который для упрощения исследований представляют в виде типовой нелинейности (см. табл. 1.1, п. 4-7). Релейными могут быть элементы любой физической природы (электрические, гидравлические, механические и др.), описываемые релейными характеристиками.

На рис. 5.2, а приведена наиболее простая из РСАУ – двухпозиционная система регулирования напряжения генератора постоянного тока, которая представляет собой вибрационный регулятор напряжения и работает следующим образом.

Например, при уменьшении нагрузки выходное напряжение генератора U_G будет увеличиваться до тех пор, пока не включится реле P



и своим контактом IP подключит последовательно с обмоткой возбуждения ОВГ сопротивление R . Ток возбуждения i_B при этом будет уменьшаться и вызывать соответствующее уменьшение напряжения генератора до тех пор, пока реле не отключится, зашунтировав своим нормально замкнутым контактом сопротивление R . При этом ток возбуждения и напряжение генератора возрастают. Установившийся режим работы системы – колебательный – ток возбуждения и напряжение генератора колеблются относительно

Рис. 5.2. Двухпозиционная релейная САУ

некоторых своих средних значений. Из-за влияния инерционностей генератора колебание напряжения на его выходе невелико. При измене-

нии нагрузки устанавливается новый устойчивый вибрационный режим с другой скважностью импульсов тока цепи возбуждения генератора.

Основными достоинствами релейных систем являются простота, экономичность, высокая надежность и максимально возможное быстрое действие из-за предельной форсировки выходного сигнала, которую могут обеспечивать релейные элементы.

Для исследования РСАУ производят их разделение на непрерывную часть НП и релейный элемент РЭ (рис. 5.2, б), который описывается статической характеристикой.

Для исследования динамики систем второго порядка используют *методы фазовой плоскости*. Особенно удобен для этих целей метод припасовывания (п. 2.3). Для систем более высокого порядка применяют *вибрационную линеаризацию* (п. 3.1) и *гармоническую линеаризацию* (п. 3.2), а также моделирование на ЭВМ.

Для исследования точности релейных систем при случайных воздействиях применяют *метод статистической линеаризации* (п. 3.3).

5.2. Импульсные системы

Импульсные системы автоматического управления (ИСАУ) характеризуются наличием импульсного элемента (ИЭ), осуществляющего квантование непрерывного сигнала в дискретный, который, проходя через инерционную непрерывную часть, сглаживается и становится непрерывным. Квантование непрерывного сигнала в ИЭ называется импульсной модуляцией. Различают три вида импульсной модуляции (рис. 5.3): амплитудно-импульсная (АИМ), широтно-импульсная (ШИМ) и времяимпульсная (ВИМ), которая подразделяется на фазоимпульсную (ФИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ).

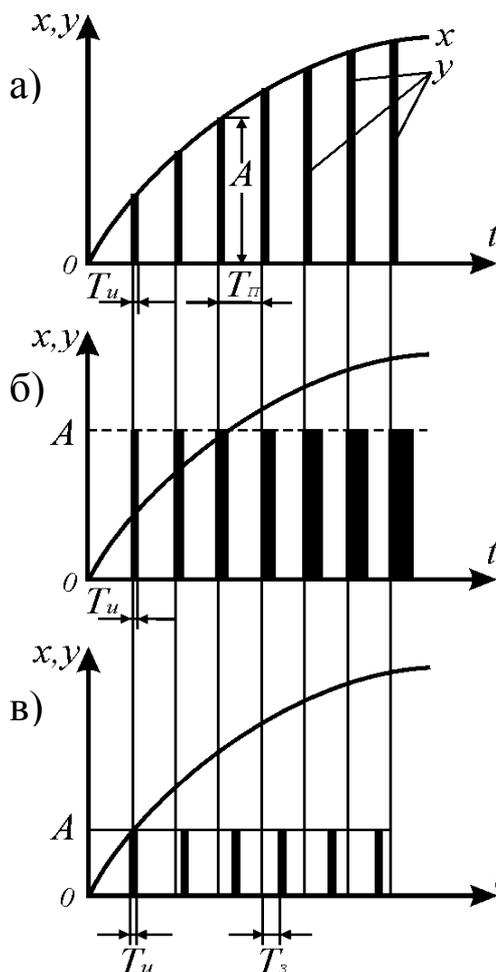
В случае АИМ модулируемым параметром является амплитуда импульсов ИЭ, которая определяется значением входного сигнала X в начале каждого периода повторения импульсов T_{II} . При ШИМ модулируемым параметром является ширина импульса $T_{И}$, а при ФИМ – запаздывание импульса относительно начала периода в функции значения входного сигнала в начале каждого периода повторения импуль-

сов. В случае ЧИМ модулируемым параметром является частота следования импульсов.

При этом в функции входного сигнала изменяется только модулируемый параметр, а остальные параметры остаются неизменными.

По виду используемой модуляции ИСАУ подразделяются на амплитудно-импульсные, широтно-импульсные и фазоимпульсные САУ. Первые две системы получили наибольшее распространение, например в регулируемых электроприводах с полупроводниковыми преобразователями используется ШИМ.

Импульсные системы допускают возможность поочередного по-



следовательного управления несколькими объектами от одного управляющего устройства. При этом промежуток между соседними управляющими импульсами, поступающими на какой-либо объект, используется для обмена управляющими импульсами и сигналами обратных связей с другими объектами (*многоточечное управление*). Возможно также многократное использование одной связи для обмена дискретными сигналами управляющего устройства с несколькими объектами. При этом применяют временное или частотное разделение информационных каналов в этой линии связи.

Рис. 5.3. Виды импульсной модуляции

Еще одним важным достоинством ИСАУ является повышенная помехозащищенность, обусловленная возможностью

передачи информации короткими импульсами, в промежутке между которыми система разомкнута и не реагирует на возмущения.

Так же, как и в РСАУ, для получения математического описания импульсную систему представляют в виде совокупности непрерывной

части, играющей роль фильтра нижних частот и импульсного элемента. При высокой частоте работы ИЭ система может рассматриваться как непрерывная, а дискретность работы ИЭ проявляется в выходном сигнале в виде высокочастотного фона.

В отличие от релейных систем, ИСАУ могут быть как нелинейными, так и линейными. Линейными являются системы, у которых непрерывная часть описывается линейными уравнениями и ИЭ имеет линейную статистическую характеристику. *Статистическая характеристика ИЭ* – это зависимость модулируемого параметра от входного модулирующего сигнала.

Для получения математического описания линейной амплитудно-импульсной системы реальный импульсный элемент представляют в виде совокупности идеального ИЭ и формирующего элемента (рис. 5.4), а внешнее возмущающее воздействие f переносят обычным пересчетом на вход импульсного элемента ($F_{\text{ИЭ}} = W_{\text{ИЭ}}(p)f$). Описание ли-

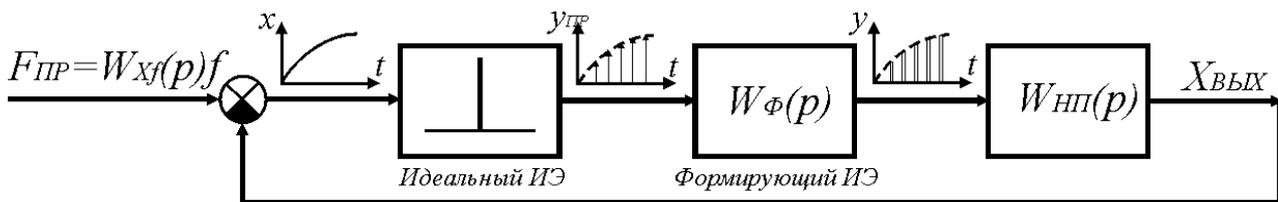


Рис. 5.4. Структура ИСАУ

нейной непрерывной части ИСАУ представляется передаточной функцией $W_{\text{ИП}}(p)$. Идеальный ИЭ формирует на своем выходе условно идеальные мгновенные импульсы, отличающиеся от δ -импульсов тем, что при бесконечно малой длительности и бесконечно большой высоте они имеют не единичную, а конечную площадь, численно равную входному сигналу x в начале периода повторения. На рис. 5.4 эти импульсы условно показаны стрелками, длина которых соответствует площади импульса.

Формирующий ИЭ преобразует импульсы идеального ИЭ в импульсы, соответствующие импульсам реального ИЭ. Для получения передаточной функции формирующего ИЭ воспользуемся формулами, известными из линейной теории систем:

$$W(p) = L\{\omega(t)\}; L\{I(t)\} = \frac{1}{p}.$$

Поскольку на входе формирующего ИЭ поступают δ -импульсы от идеального ИЭ, то его передаточная функция может быть записана в виде

$$W_{\Phi}(p) = L\{y_u(t)\},$$

где $y_u(t)$ – выражение для импульса единичной высоты на выходе ИЭ.

Импульс прямоугольной формы длительностью T_u можно представить разностью единичных функций, сдвинутых на время T_u :

$$y_u(t) = k_u [1(t) - 1(t - T_u)],$$

где $k_u = \frac{a}{x}$ – коэффициент линейного ИЭ, у которого x – входной сигнал

в начале очередного периода повторения импульсов T_{II} и a – высота выходного импульса в том же периоде. Запишем для этого случая передаточную функцию формирующего ИЭ:

$$W_{\Phi}(p) = k_u \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-T_u p} \right) = \frac{k_u (1 - e^{-T_u p})}{p}.$$

Структурная схема формирующего ИЭ при прямоугольной форме импульсов показана на рис. 5.5.

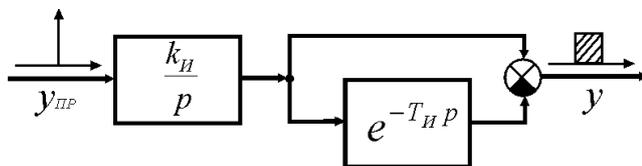


Рис. 5.5. Структурная схема формирующего ИЭ

Таким образом, формирующий элемент представлен в виде структуры, состоящей из типовых динамических звеньев. В результате ИСАУ можно рассматривать как систему, состоящую из непрерывной части, в которую входит формирующий элемент, и идеального ИЭ, периодически размыкающего и замыкающего систему.

Для анализа процессов и свойств ИСАУ математическое описание непрерывной части нужно представить в дискретном виде.

5.2.1. Дискретная форма математического описания ИСАУ

Наличие импульсного элемента и приведение математического описания всех элементов ИСАУ к общему виду требует замены действующих в непрерывной части системы непрерывных сигналов на фиктивные дискретные сигналы. При этом дифференциальные уравнения заменяются на разностные уравнения и вместо обычного преобра-

зования Лапласа используется дискретное преобразование Лапласа с последующим переходом от обычных передаточных функций к дискретным передаточным функциям.

Поскольку выходной сигнал идеального ИЭ определяется его входным сигналом только в дискретные моменты времени в начале каждого периода повторения импульсов, то все существующие в ИСАУ непрерывные сигналы можно заменить дискретными функциями, значения которых в начале каждого периода совпадают со значениями соответствующих непрерывных функций, а в остальное время они равны нулю. Такая дискретная функция называется *решетчатой функцией* $x[nT_{\Pi}]$, а при переходе к относительному времени $\bar{t} = t/T_{\Pi}$, т.е.

при измерении времени числом периодов T_{Π} решетчатая функция записывается в *нормированной форме* – $x[n]$ (рис. 5.6).

Пример. Пусть требуется представить решение уравнения $T \frac{dy}{dt} + y(t) = U(t)$ в виде решетчатой функции.

В общем виде решение уравнения запишется как сумма свободной и вынужденной составляющей: $y(t) = y_c(t) + y_b(t)$. При этом $y_b(t) = U(t)$; $y_c(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$ и, следовательно, $y(t) = U(t) + C \cdot e^{-\frac{t}{T}}$. Найдем значение постоянной C при $t=0$: $y(t) \rightarrow y[n]$; $U(t) \rightarrow U[n]$. Отсюда следует, что $y[n] = U[n] + C$; $C = y[n] - U[n]$; $y(t) = U[n] + (y[n] - U[n])e^{-\frac{t}{T}}$.

При $t = T_{\Pi}$ получим

$$y[n+1] = U[n] + (y[n] - U[n]) \cdot e^{-\frac{T_{\Pi}}{T}} \quad \text{или}$$

$$y[n+1] = y[n] \cdot e^{-\frac{T_{\Pi}}{T}} + U[n] \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

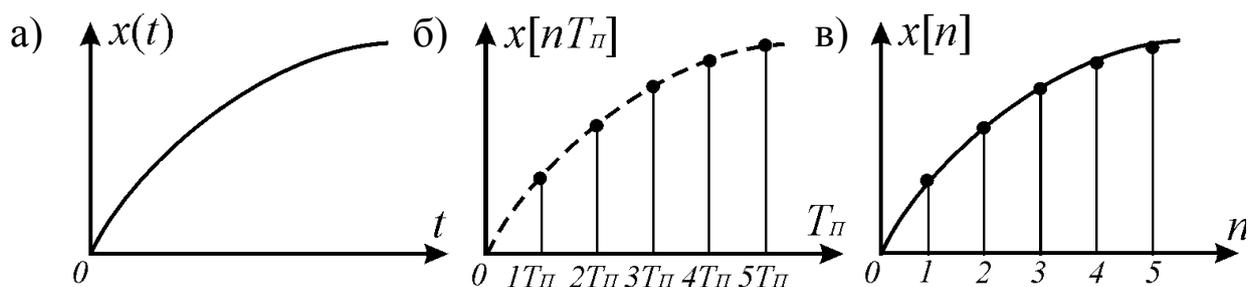


Рис. 5.6. Замена непрерывной функции (а) на решетчатую (б, в)

Обратный переход от решетчатой функции к непрерывной является неоднозначным, поскольку через отмеченные на графиках точки можно провести бесконечное множество огибающих кривых. Для уменьшения потерь информации при переходе к решетчатым функциям величину T_{Π} нужно уменьшить, причем T_{Π} должно быть тем меньше, чем выше скорость изменения сигнала $x(t)$. Из теоремы Котельникова следует, что потерь информации при дискретизации не будет, если $T_{\Pi} = \pi/\omega_{\text{макс}}$, где $\omega_{\text{макс}}$ характеризует высокочастотную составляющую сигнала $x(t)$.

При замене дифференциальных уравнений на разностные дифференциалы заменяются на прямые и обратные разности (рис. 5.7 и табл. 5.1).

Таблица 5.1

Получение прямых и обратных связей

Дифференциалы	Прямые разности	Обратные разности
$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$	$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$	$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$
$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t+\Delta t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}}{\Delta t}$	$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n]$	$\nabla^2 x[n] = \nabla x[n] - \nabla x[n-1]$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
$\frac{d^i x}{dt^i} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{d^{i-1}x(t+\Delta t)}{dt^{i-1}} - \frac{d^{i-1}x(t)}{dt^{i-1}}}{\Delta t}$	$\Delta^i x[n] = \Delta^{i-1} x[n+1] - \Delta^{i-1} x[n]$	$\nabla^i x[n] = \nabla^{i-1} x[n] - \nabla^{i-1} x[n-1]$

Известное уравнение, связывающее выходной сигнал $y(t)$ с неизменными управляющим $g(t)$ и возмущающим $f(t)$ сигналами, можно записать в виде следующего разностного уравнения:

$$a_0 \Delta^n y[n] + a_1 \Delta^{n-1} y[n] + a_{m-1} \Delta y[n] + a_m \Delta y = g[n] + f[n] \cdot$$

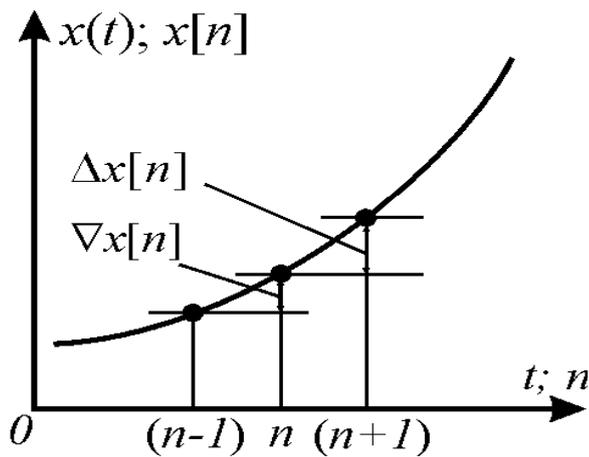


Рис. 5.7. Получение разностей

При изменяющихся сигналах $g(t)$ и $f(t)$ правая часть уравнения может быть записана по аналогии с левой частью. Аналогично можно получить разностное уравнение на основе обратных разностей.

Варианты дискретного преобразования Лапласа в сравнении с непрерывным преобразованием Лапласа имеют вид:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt \text{ — непрерывное преобразование;}$$

$$X^*(p) = D\{x[nT_{\Pi}]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_{\Pi}] \cdot e^{-pnT_{\Pi}} \text{ — дискретное преобразование;}$$

$$X^*(q) = D_H\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot e^{-qn} \text{ — дискретное преобразование для нормированной функции } (q = pT_{\Pi});$$

$$X^*(Z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot Z^{-n} \text{ — } Z\text{-преобразование } (Z = e^q).$$

Наибольшее распространение получило Z -преобразование. После замены непрерывной функции времени $x(t)$ на соответствующую ей решетчатую функцию $x[n]$ находят по таблицам дискретного преобразования Лапласа дискретное изображение функции $X^*(Z)$.

Дискретная передаточная функция разомкнутой системы $W^*(Z)$, состоящая из идеального ИЭ и непрерывной части с формирующим элементом (рис. 5.4), связывает дискретное изображение $Z^*(z)$ на выходе импульсного элемента. Аналогично определению передаточной функции в непрерывных системах через весовую функцию дискретная передаточная функция разомкнутой системы равна Z -преобразованию решетчатой весовой функции $\omega[t]$, соответствующей исходной весовой функции непрерывной части системы:

$$W^*(Z) = Z\{\omega[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega[n] \cdot Z^{-n}.$$

Передаточная функция замкнутой дискретной системы, например, по возмущению, приведенному ко входу ИЭ (рис. 5.4), запишется на основании зависимости

$$X_{вых}^*(z) = W_3^*(z) \cdot F_{np}^*(z)$$

в виде

$$W_3^*(z) = \frac{X_{вых}^*(z)}{F_{np}^*(z)} = \frac{W_\Phi^*(z) \cdot W_{HP}^*(z)}{1 + W_\Phi^*(z) \cdot W_{HP}^*(z)} .$$

Иногда вместо идеального ИЭ с δ -импульсами удобнее использовать идеальный импульсный элемент с прямоугольными импульсами конечной ширины. В этом случае нет необходимости введения специального формирующего элемента.

Импульсные САУ с ШИМ и ФИМ являются нелинейными, однако при малой длительности импульсов для ШИМ или малом фазовом сдвиге для ФИМ оба импульсных элемента могут быть линеаризованы и сведены в результате к эквивалентному ИЭ с АИМ. Предполагается, что изменение площади импульса при изменении его высоты (АИМ) или длительности (ШИМ) одинаково скажется на выходном сигнале непрерывной части системы.

Если линеаризация ИСАУ не представляется возможной, то ее необходимо исследовать как нелинейную с использованием разностных уравнений и дискретного преобразования Лапласа.

5.2.2. Частотные характеристики линейных систем с АИМ

Особенностью частотных характеристик ИСАУ является их периодичность. На рис. 5.8, а показана АЧХ непрерывной системы, а на рис. 5.8, б и в – АЧХ импульсной системы с той же непрерывной частью и идеальным ИЭ для двух значений частоты повторения импульсов $\bar{\omega}_{HP}$. Здесь $\bar{\omega}_{HP}$ – полоса пропускания непрерывной части системы. При этом $z = e^{j\bar{\omega}}$, где $\bar{\omega} = T_{HP}\omega$ – относительная частота ($q = p \cdot T_{HP} = j\omega T_{HP} = j\bar{\omega}$). Частотные характеристики ИСАУ представляют собой бесконечно повторяющуюся с частотой $\bar{\omega}_{HP}$ частотную характеристику непрерывной части системы. Причиной тому является процесс импульсной модуля-

ции в ИЭ, при котором образуются спектры боковых частот. Бесконечно узкий импульс содержит бесконечное число гармоник.

Для полного описания процессов в ИСАУ достаточно иметь частотные характеристики в диапазоне относительных частот ($0 < \bar{\omega} < +\pi$), а в диапазоне абсолютных частот – ($0 < \omega < 0,5\omega_{\Pi}$).

Условие эквивалентности ИСАУ непрерывной системы определяется при рассмотрении частотных характеристик рис. 5.8 и представляется следующими неравенствами:

$$\begin{cases} \omega_{\Pi} \geq 2\omega_{НП} ; \\ \omega_f \leq (\omega_{\Pi} - \omega_{НП}) . \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь ω_f – наибольшая частота внешнего воздействия, приведенного ко входу ИЭ.

При выполнении первого неравенства боковые частоты, существующие на выходе ИЭ, не пройдут на выход непрерывной части, являющейся фильтром нижних частот, поэтому в пределах полосы пропускания непрерывной части частотные характеристики непрерывной и импульсной систем совпадают и ИСАУ будет реагировать на низкочастотные внешние воздействия так же, как непрерывная система (рис. 5.8, б).

Если условие $\omega_{\Pi} \geq 2\omega_{НП}$ не выполняется, то АЧХ в пределах полосы пропускания непрерывной части системы искажается (рис. 5.8, в), поэтому при исследовании ИСАУ в этом случае необходимо учитывать импульсный характер ее работы с переходом к дискретной передаточной функции.

Второе неравенство требует, чтобы частотный спектр внешнего воздействия в пределах полосы пропускания непрерывной части был таким

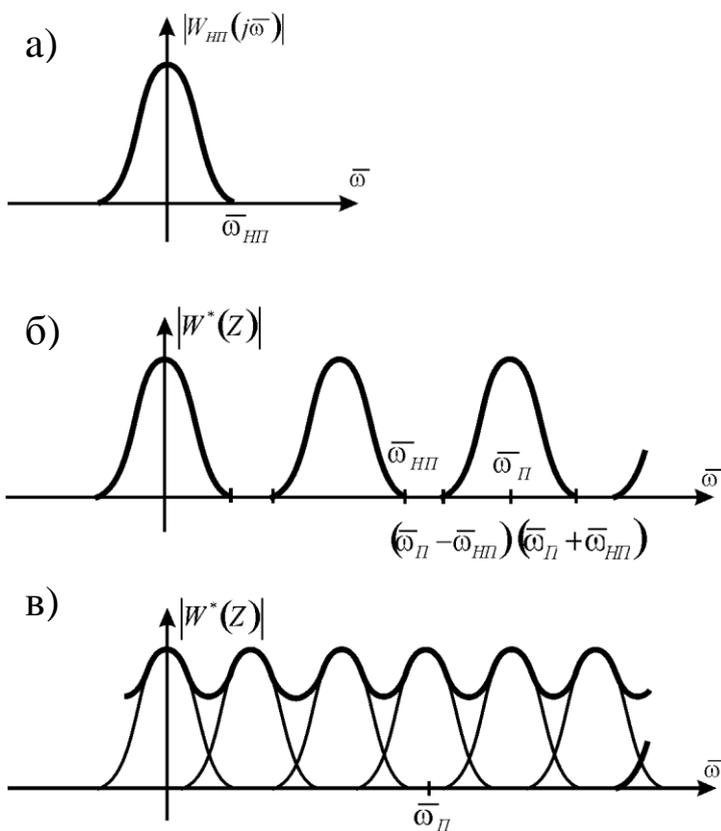


Рис. 5.8. Амплитудные частотные характеристики

же, как и при отсутствии ИЭ, т.е. не давал боковых частот. При невыполнении этого условия при работе ИЭ на выходе ИСАУ появятся низкочастотные составляющие, отсутствующие в непрерывной системе.

Для ИСАУ с ШИМ или ФИМ условия эквивалентности системы непрерывного действия заключаются при выполнении следующих неравенств:

$$\begin{cases} \omega_{\Pi} \geq 3\omega_{\text{НП}} ; \\ \omega_f \leq (\omega_{\Pi} - 2\omega_{\text{НП}}) . \end{cases} \quad (5.2)$$

Ужесточение условий эквивалентности по сравнению с (5.1) связано с тем, что в этом случае из-за более сложного спектрального состава к боковым частотам ($k\omega_{\Pi} \pm \omega_{\text{НП}}$), как при АИМ, добавляются боковые частоты ($k\omega_{\Pi} \pm 2\omega_{\text{НП}}$).

Первое неравенство вытекает из условия ($f/f_0 \geq 3$), рассмотренного в п. 3.1 при вибрационной линеаризации релейного элемента, где режим соответствует ШИМ. Уровень составляющей сигнала от дополнительных боковых частот резко уменьшается при уменьшении длительности (ШИМ) и фазового сдвига (ФИМ) импульсов.

При выполнении условий (5.1) и (5.2) ИСАУ сводится к непрерывной системе и ее исследование может быть произведено известными методами, а если эти условия не выполняются, то исследование должно проводиться с учетом квантования и использования дискретной формы описания системы.

5.2.3 Методы исследования ИСАУ

Устойчивость линейных ИСАУ определяется с помощью известных критериев устойчивости линейных систем, модифицированных для дискретных процессов. В случае устойчивой ИСАУ нули дискретной передаточной функции замкнутой системы должны находиться в левой полуплоскости комплексной переменной q в диапазоне от $-\pi$ до $+\pi$ вдоль действующей оси (рис. 5.9, а), поскольку дискретная передаточная функция является периодической функцией мнимой части q с периодом 2π ($e^q = e^{\bar{\alpha} \pm j\bar{\omega}} = e^{\bar{\alpha} \pm j(2k\pi + \bar{\omega})}$).

При переходе от переменной q к переменной $Z = e^q$ условию устойчивости соответствует нахождение нулей характеристического многочлена внутри единичной окружности (рис. 5.9, б).

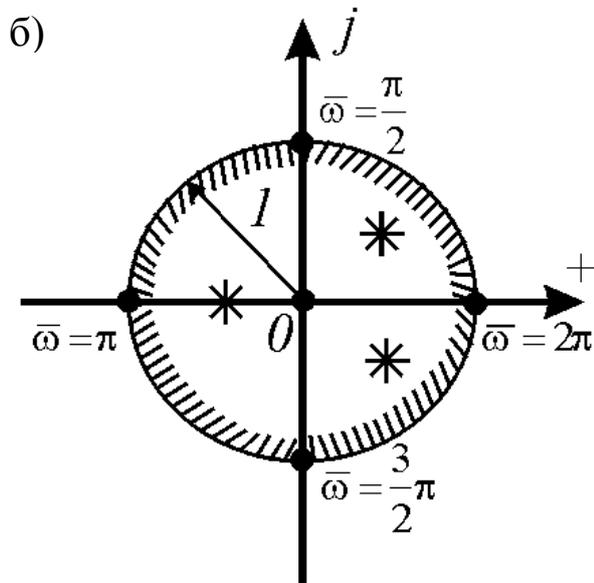
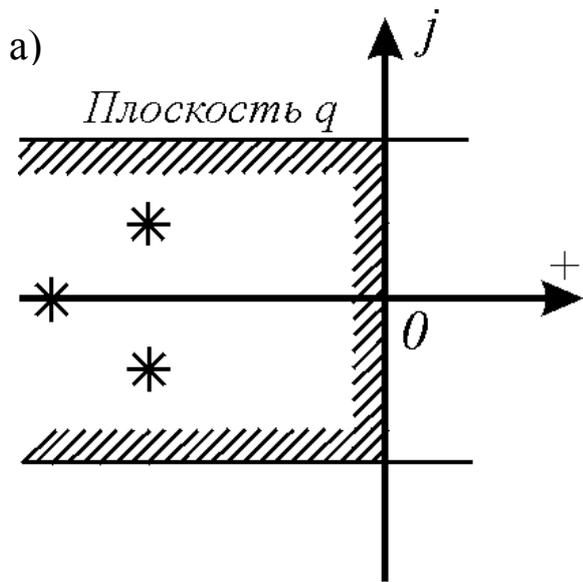


Рис. 5.9. Расположение полюсов устойчивой ИСАУ

Модифицированный критерий Михайлова для импульсных систем заключается в том, чтобы для устойчивой системы годограф $D^*(Z)$, определяющийся знаменателем дискретной передаточной функции замкнутой ИСАУ $W_3^*(Z)$, начинаясь на положительной плоскости q и охватывая начало координат, последовательно проходил $2n$ квадрантов и заканчивался на действительной оси (рис. 5.10, а). Здесь n – порядок характеристического полинома.

Формулировка модифицированного критерия Найквиста остается прежней, но при этом амплитудно-фазочастотные характеристики (АФЧХ) заканчиваются не в начале координат, а на действительной оси (рис. 5.10, б), поскольку они строятся в диапазоне относительных частот $\bar{\omega}$ от 0 до π .

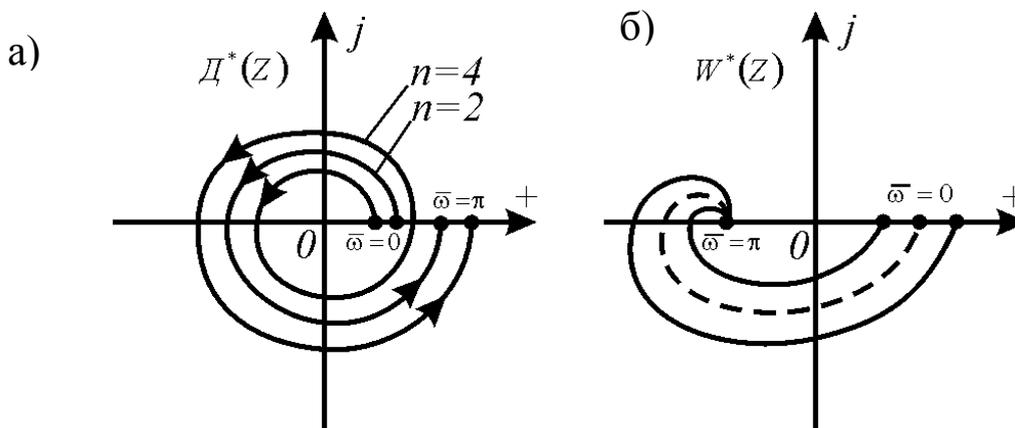


Рис. 5.10. Модифицированные критерии Михайлова (а) и Найквиста (б)

Синтез и исследование точности и качества переходных процессов линейных ИСАУ производится с помощью методов и критериев, используемых для непрерывных САУ. Нелинейные ИСАУ исследуются с помощью общих методов исследования нелинейных САУ, рассмотренных выше.

5.3. Цифровые системы

Цифровые системы (ЦСАУ) применяются для регулирования и управления самыми различными объектами и процессами, и сфера их использования непрерывно расширяется. Они являются наилучшей основой для создания оптимальных и адаптивных систем. В состав управляющего устройства входит цифровая вычислительная машина, использующая информацию в виде цифрового кода.

ЦСАУ отличаются высокой точностью управления, а также возможностью реализации очень сложных алгоритмов управления. Поскольку одновременно с квантованием по времени в ЦСАУ осуществляется квантование по уровню, то она является принципиально нелинейной. Однако при уменьшении шага квантования q и соответственно числа разрядов цифрового кода ЦСАУ по своим свойствам приближается к ИСАУ. Получаемая таким образом из цифровой при $q \rightarrow 0$ система называется *предельной ИСАУ*.

Особенностью динамики ЦСАУ является наличие фиксированного временного запаздывания в управляющем устройстве, необходимого для проведения цикла расчетов в ЦВМ, а также возможность существования автоколебаний из-за зоны нечувствительности системы, равной шагу квантования. Однако амплитуда автоколебаний при этом достаточно мала.

Структура ЦСАУ, представленная на рис. 5.11, показывает преобразования информации в системе совокупностью необходимых для этого компонентов. Математическое описание ЦСАУ осуществляется, как и в ИСАУ, с помощью разностных уравнений и дискретного преобразования Лапласа. Однако из-за наличия в ЦСАУ квантования по уровню, наряду с импульсными элементами, в схему вводят *квантователи* $K1$ и $K2$, являющиеся нелинейными звеньями. Квантователи описываются многоступенчатой релейной характеристикой.

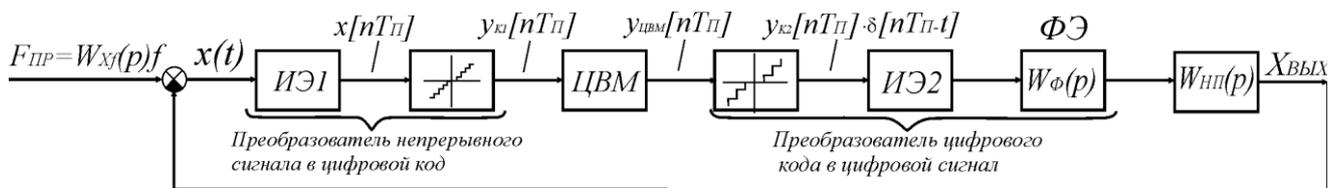


Рис. 5.11. Структура импульсной системы

Для представления схемы в стандартном виде внешнее воздействие f путем обычного пересчета через передаточную функцию приведено ко входу импульсного элемента ИЭ1, который преобразует непрерывный сигнал $x(t)$ в решетчатую функцию. Далее квантователь $K1$ осуществляет квантование по уровню каждого значения функции $x[nT_{\text{П}}]$ в дискретную величину в виде ближайшего целого числа уровней q (см. рис. 5.1, в) с последующим представлением полученной дискретной величины в виде кода, который вводится в ЦВМ.

После цикла вычислений в ЦВМ в соответствии с заложенной программой через период $T_{\text{П}}$ на квантователь $K2$ поступает очередной результат $y_{\text{ЦВМ}}[nT_{\text{П}}]$ в виде числа. Число уровней квантования $K1$ обычно значительно больше, чем у квантователя $K2$, и определяется необходимой точностью обработки информации и числом разрядов ЦВМ. В некоторых случаях допустимо заменять ступенчатую характеристику $K1$ линеаризующей ее прямой линией, упрощая тем самым математическое описание. Число уровней $K2$ определяется инерционностью непрерывной части системы и требованиями статики и динамики и обычно бывает небольшим – вплоть до релейного управления.

Выходная величина ЦВМ может быть выражена через входную с помощью разностного уравнения, которое может быть линейным, и тогда ЦВМ может быть описана дискретной передаточной функцией.

Формирующий элемент ФЭ является экстраполятором, создающим сигнал на выходе ЦВМ в течение периода $T_{\text{П}}$, когда производится вычисление следующего результата. Применяются экстраполяторы нулевого периода, когда выходной сигнал удерживается неизменным (рис. 5.5), первого порядка – сигнал изменяется по линейному закону, второго порядка – сигнал изменяется по квадратичной параболе и т.д.

Существующие методы исследования нелинейных систем мало пригодны для ЦСАУ, поэтому на практике применяют упрощение исходной структуры с приведением цифровой системы к линеаризованной ИСАУ с последующим учетом влияния квантования по уровню, например в виде дополнительных шумов квантования.

6. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

6.1. Основные понятия

Оптимальными называются системы, в которых обеспечивается при заданных условиях наилучшее значение какого-либо показателя качества работы САУ, называемого *критерием оптимальности*. В качестве критерия оптимальности может быть использован один из показателей качества переходного процесса (точность, длительность, перерегулирование и т.д.), потребляемая мощность и др.

Выбор критерия оптимальности и представление его в математической форме является одним из наиболее важных вопросов, решаемых при синтезе оптимальных САУ. Обычно для его определения требуется интегрировать во времени некоторую функцию, зависящую от текущего состояния объекта управления, т.е. критерий оптимальности в общем виде является *функционалом*, который определяется видом функции. Как правило, функционал представляется в таком виде, чтобы условием оптимальности системы был *минимум* этого функционала для случаев максимума или минимума требуемого показателя качества.

В общем случае функционал зависит от координат выходного сигнала $y_i(t)$, управления $u_i(t)$, возмущения $f_i(t)$ и может быть представлен в виде интеграла

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n; u_1, u_2, \dots, u_n; f_1, f_2, \dots, f_n) dt$$

или в векторной форме

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(Y, U, F) dt, \quad (6.1)$$

где Y, U, F – векторы координат выходного сигнала, управления и возмущения соответственно; $[t_1, t_2]$ – интервал времени, на котором производится управление.

Функционал, минимум которого необходимо найти, может быть представлен в виде любой желаемой комбинации различных качеств создаваемой системы. Из-за противоречивости требований к различным свойствам системы на практике часто возникают трудности при выборе критерия оптимальности. Например, в быстродействующих си-

стемах трудно обеспечить точность, и наоборот, высокоточные системы имеют невысокое быстродействие.

Если заложить в конструкцию функционала большое количество требований к системе, то он может оказаться чрезвычайно громоздким и возникнут проблемы при технической реализации управления по такому критерию. Поэтому только основные требования к системе закладывают в функционал, а остальные задают в виде *ограничений*, в пределах которых допускаются изменения при работе системы.

В виде ограничений может использоваться в оптимальной САУ информация об ограниченной мощности каких-либо элементов системы, заданных пределах технологического оборудования и т.д. Ограничения рассматриваются совместно с уравнениями динамики САУ.

Оптимизацию САУ можно осуществлять двумя способами:

1. При известной структуре системы находят оптимальные значения ее параметров, обеспечивающих минимум критерия качества.
2. Изначально структура САУ неизвестна. Требуется определить структуру и ее параметры, которые бы обеспечивали оптимальность системы для принятого критерия оптимальности.

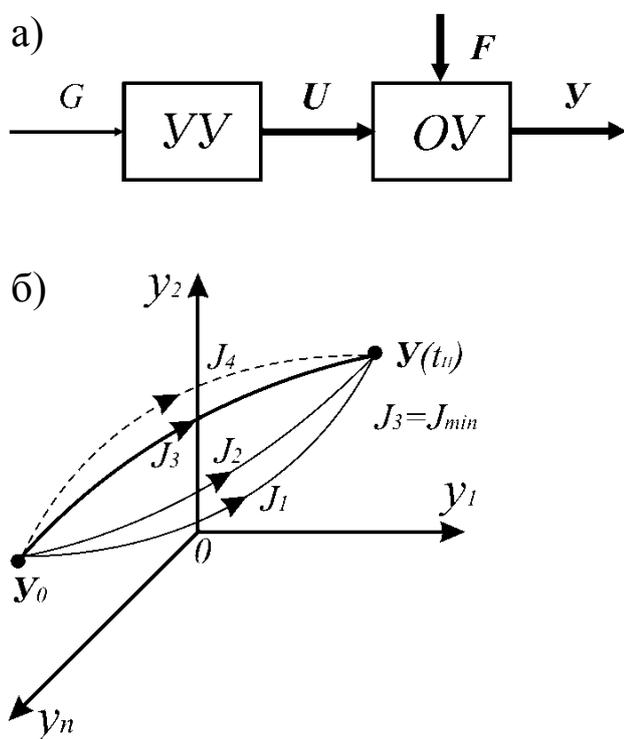


Рис. 6.1. К понятию оптимального управления

Если математическое описание объекта уравнения не задано, то эта задача является первой при анализе оптимальности САУ. При этом объект должен быть управляемым (рис. 6.1).

Объект является управляемым, если существует хотя бы одно управление, удовлетворяющее заданным ограничениям и переводящее объект из заданного начального в заданное конечное состояние за заданный промежуток времени.

В общем случае объект управления описывается зависимостью выходных величин Y от входных - управления U и возмущения F :

$$Y = A_0(U, F, t),$$

где A_0 – оператор (описание) объекта, определяющий всю совокупность математических операций, с

помощью которых по множеству входных функций U, F находится множество выходных функций Y , представленных в виде вектора (рис. 6.1, а).

Если для реального объекта управления зависимости неизвестны, то для нахождения математической модели используют методы идентификации, основанные на анализе характеристик объекта, полученных в результате эксперимента. Методы идентификации будут рассмотрены ниже.

Описание объекта управления должно быть дополнено заданием *граничных условий* (рис. 6.1, б), т.е. начального состояния объекта U_0 при $t=0$ и конечного его состояния $Y(t_{\Pi})$. Здесь t_{Π} – время перехода из начального в конечное состояние.

Задачу синтеза оптимальности САУ можно модернизировать следующим образом: *при заданных цели управления, оператора и граничных условиях объекта управления, ограничениях на переменные и параметры, возмущениях и критерии оптимальности требуется отыскать оператор управляющего устройства, обеспечивающий такое управление объектом, при котором цель управления будет достигнута при минимальном значении критерия оптимальности и выполнении всех имеющихся ограничений.*

Оператор управляющего устройства A_{yy} определяет зависимость управления U от задающего воздействия G , векторов выходных сигналов Y и возмущающих воздействий F :

$$U = A_{yy}(G, Y, F, t)\psi.$$

На рис. 6.1, б с помощью фазового пространства показано, что критерий оптимальности будет минимальным $J_3 = J_{\min}$ при одной из реализаций оператора управляющего устройства из некоторой их совокупности.

6.2. Методы нахождения экстремумов функционалов

Для нахождения экстремумов функционалов используется вариационное исчисление: классические вариационные методы, динамическое программирование и принцип максимума.

Динамическое программирование – метод решения вариационных задач, предложенный американским ученым Р. Беллманом, в основе которого лежит следующий принцип оптимальности: *любой конеч-*

ный участок оптимальной траектории также является оптимальной траекторией.

Этот принцип справедлив только для систем, у которых оптимальное управление (траектория) не зависит от предыстории самой системы и целиком определяется ее текущим состоянием.

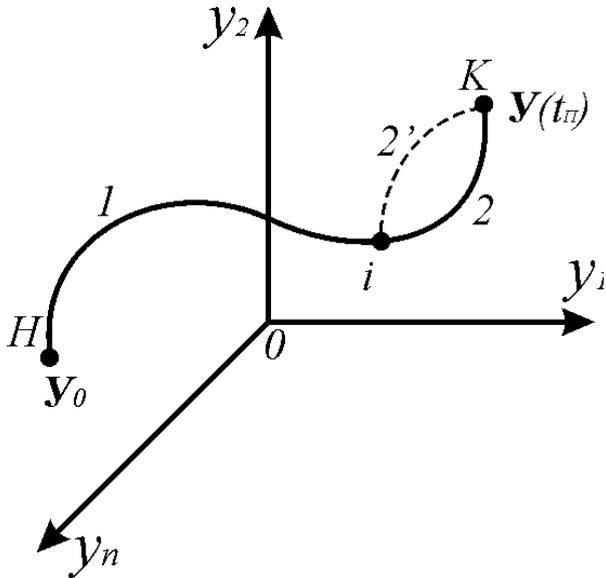


Рис. 6.2. Иллюстрация принципа оптимальности

На рис. 6.2 показана оптимальная траектория, состоящая из участков 1 и 2. Если допустить, что некоторый участок 2' является оптимальной траекторией, а не участок 2, то из этого следует, что тогда оптимальной будет траектория, состоящая из участков 1 и 2', а этого не может быть, так как изначально было задано, что оптимальной является траектория, состоящая из участков 1 и 2. Таким образом, оптимальным будет любой конечный отрезок этой траектории от произвольной точки i до конечной K .

Предположим, что движение по оптимальной траектории представляет собой последовательность шагов за фиксированные интервалы времени. Требуется найти закон управления $U(t)$ заданным объектом с учетом ограничений, переводящий объект из состояния $Y(0)$ в состояние $Y(t_{II})$ фазового пространства с выполнением условия минимума критерия оптимальности в виде функционала (6.1) с пределами интегрирования $(0, t_{II})$. Для дискретной системы с квантованием по времени интеграл (6.1) заменяется суммой функций дискретных величин:

$$J = \sum_{n=0}^m \varphi\{Y[n], U[n], F[n]\}. \quad (6.2)$$

Здесь введено относительное время, так что n - это текущий номер шага по времени, равного периоду квантования. Уравнение объекта управления записывается в конечных разностях. Управление $U[n]$ в данном случае определяется в виде последовательности значений $U[0], U[1], \dots$, минимизирующих (6.2) при заданном операторе объекта управления и заданных ограничениях. При этом каждое из значений $U[i]$ может иметь одно из l -дискретных значений.

Использование метода динамического программирования предполагает пошаговое отыскание оптимальной траектории при движении изображающей точки от ее конечного положения к начальному в относительном времени с момента $n=t$. Вначале находится и запоминается оптимальное значение управляющего воздействия в начале последнего интервала для каждого возможного дискретного значения $U[m-1]$ в пределах заданных ограничений этого сигнала и соответствующие этим управлениям значения приращений критерия оптимальности на данном шаге ΔJ_{m-1} . В результате находим оптимальные значения ΔJ_{m-1} и $U[m-1]$ как функции $Y[m-1]$.

Далее переходим к началу $(m-2)$ -го шага и находим минимум приращения на этом шаге и суммарное приращение уже за два шага и соответствующее оптимальное значение $U[m-2]$ как функцию выходной величины $Y[m-2]$ в этот момент. Минимальное значение приращения ΔJ_{m-2} на $(m-2)$ -м шаге определяем варьированием $U[m-2]$ для конкретного значения $Y[m-2]$. Аналогично производятся шаги с необходимыми вычислениями до попадания в начальную точку $Y[0]$. При этом будет найдено оптимальное управление $U[n]$, оптимальный процесс $Y[n]$ и суммарная величина критерия оптимальности.

Таким образом, оптимизация функционала $J = \int_0^{t_2} \varphi(Y, U, F)$, зави-

сящего от отыскиваемой функции $U[n]$, выполняется в виде последовательности m оптимизаций значительно более простой функции ΔJ_{m-i} одной переменной $U[m-i]$. Такое упрощение позволяет методом динамического программирования решать задачи оптимизации, которые не могут быть решены путем оптимизации исходного функционала.

Метод динамического программирования может применяться не только для оптимизации управления – он является общим методом решения любых многошаговых задач.

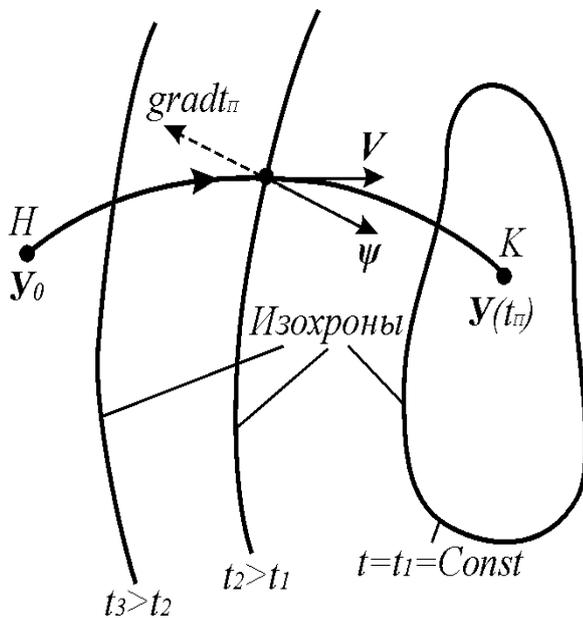
Принцип максимума является методом решения задач оптимального управления и представляет собой расширение классического вариационного исчисления на случай, когда управляющие воздействия ограничены и описываются кусочно-непрерывными функциями. Метод разработан российским ученым Л.С. Понтрягиным.

Задачей оптимизации является определение оптимальных управлений и оптимальной траектории из условия нахождения экстремума функционала критерия качества для заданных уравнений объекта при

начальных и конечных значениях $Y[n]$ и $Y[T_{II}]$ в заданном интервале времени с учетом ограничений $Y[t] \in M$ и $U[t] \in U$.

Содержание и использование принципа максимума приводится в специальной литературе, а здесь мы рассмотрим геометрическую интерпретацию метода с помощью фазового пространства (рис. 6.3). Пусть требуется перевести изображающую точку за минимальное время из некоторого начального положения H в заданное конечное положение K .

Каждой точке фазового пространства соответствует оптимальная



траектория перехода в конечную точку K с минимальным временем перехода. Вокруг точки K можно построить поверхности с одинаковым минимальным временем перехода с поверхности в точку K – *изохроны*. В случае произвольного критерия оптимальности эти поверхности называются *изоповерхностями*.

Очевидно, что оптимальная траектория с позиций быстрогодействия при переходе из точки H в точку K должна быть максимально близка нормалям к изохронам при учете заданных ограничений на координаты объекта и управление.

Рис. 6.3. Геометрическая интерпретация метода

Принцип максимума представляет собой условие оптимальности со следующей математической формулировкой: на протяжении всей траектории скалярное произведение вектора скорости $V = dY/dt$ на вектор, обратный градиенту времени перехода в конечную точку, должно быть максимально:

$$H = \Psi V = \sum_{i=1}^n \Psi_i V_i = \max,$$

где H – функция Понтрягина; $\psi = \text{grad} t_{II}$; ψ_i , V_i – координаты векторов $\psi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ и $V(V_1, V_2, \dots, V_n)$.

Другими словами, условием оптимальности является максимум проекции вектора V на направление ψ . Принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности только для ли-

нейных систем, а для нелинейных САУ он является только необходимым.

6.3. Оптимальные по быстродействию релейные системы

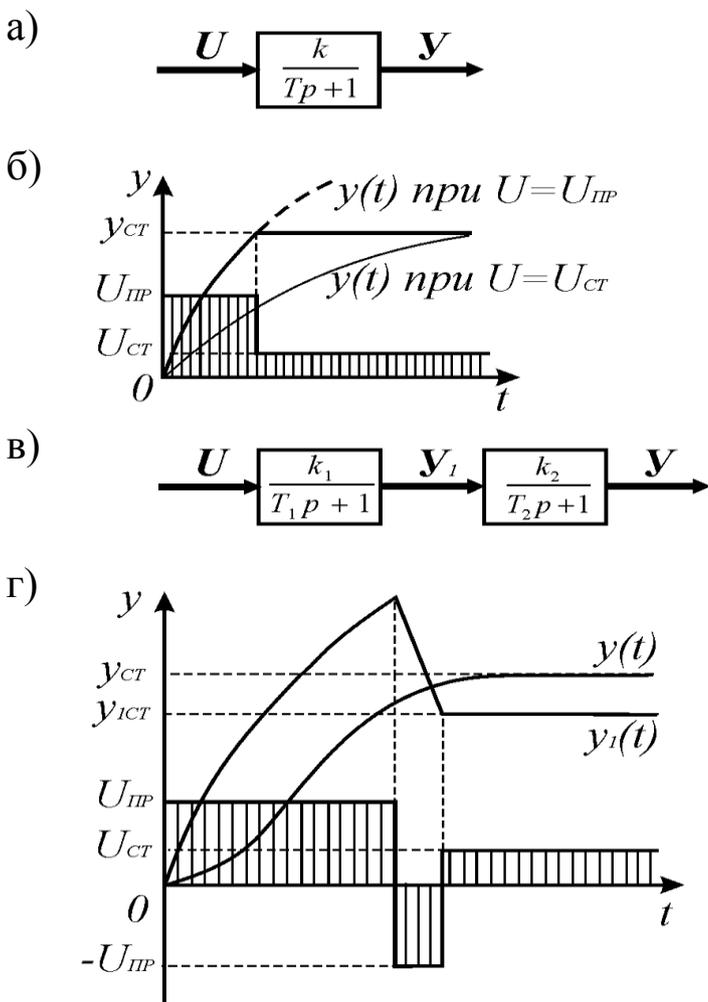


Рис. 6.4. Оптимальное по быстродействию управление

заданного значения y_{cr} , управляющий сигнал U следует мгновенно уменьшить до величины U_{cr} , которой соответствует заданное значение выходного сигнала по окончании разгона y_{cr} . Из рис. 6.4, б следует, что данное управление позволит разогнать двигатель до заданной скорости значительно быстрее, чем в случае $U=U_{cr}$.

Длительность разгона двигателя t_{II} зависит от постоянной времени T , величины ограничения $U_{пр}$ и от заданных начального и конечного значений выходной величины. При $U_{пр} \rightarrow \infty$ время $t_{II} \rightarrow 0$ – этот случай

Релейные системы из-за предельной форсировки входного сигнала имеют наибольшее быстродействие. Рассмотрим пример формирования управляющего воздействия U для максимально быстрого разгона двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, описываемого одноомкостным звеном, до определенной скорости (рис. 6.4, а и б). Сигнал U ограничен по величине некоторым предельным значением $U_{пр}$, которому соответствует предельное напряжение, подаваемое на якорь двигателя.

Начальные условия будем считать нулевыми. Для возможно быстрого изменения выходного сигнала y нужно входной сигнал U мгновенно изменить от нуля до $U_{пр}$. Как только выходная величина достигнет

соответствует компенсации инерционности одноемкостного звена введением дополнительного воздействия по производной.

При наличии линейного объекта второго порядка (рис. 6.4, в) оптимальное по быстродействию управление будет релейным разнополярным (рис. 6.4, г). Вначале устанавливается на входе первого звена управление $U=U_{\text{ПР}}$ на промежутке времени, за которое выходная величина $Y(t)$ почти достигает своего установившегося значения $Y_{\text{СТ}}$. Поскольку данный объект является инерционным, для эффективного замедления величины $Y(t)$ с последующей ее фиксацией на уровне $Y_{\text{СТ}}$ необходимо управляющий сигнал мгновенно переключить с $+U_{\text{ПР}}$ на $-U_{\text{ПР}}$ с последующей задержкой на уровне $U=-U_{\text{ПР}}$ до осуществления необходимого замедления $Y(t)$ с последующим переключением управления на уровень $U=U_{\text{СТ}}$. На этом переходный процесс заканчивается.

В общем случае для устойчивого линейного объекта n -го порядка оптимальное по быстродействию управление при наличии ограничения управляющего воздействия состоит из n интервалов, в каждом из которых управляющий сигнал принимает свое предельное значение, а в конце каждого интервала происходит изменение знака управляющего сигнала.

Такое управление является релейным, а знак сигнала в начале процесса управления определяется требуемым направлением изменения выходного сигнала Y . При отличных от нулевых начальных условиях число интервалов будет меньше n .

6.4. Особенности синтеза оптимальных систем

При детерминированных воздействиях оптимальное управление объектом осуществляется при каждой реализации процесса управления. Это обеспечивается за счет использования управляющим устройством полной информации о состоянии объекта и внешних воздействиях.

Синтез разомкнутых оптимальных систем заключается в разработке оптимальной программы управления $U(t)$, которая затем вводится в программное устройство. Синтез оптимальной замкнутой системы заключается в нахождении оператора управляющего устройства в виде зависимости (6.2), обеспечивающей оптимальный процесс $Y(t)$ при заданных начальных условиях и внешних воздействиях. При этом зави-

симось $U(Y)$ должна быть инвариантной относительно всего множества внешних воздействий, в противном случае структуру системы дополняют комбинированным управлением с измерением отдельных внешних воздействий.

На практике получить оптимальную систему довольно затруднительно, поэтому обычно разрабатывают близкие к оптимальным системы, т.е. *квазиоптимальные*. Существуют два основных пути синтеза квазиоптимальных систем:

1. *Упрощение предварительно найденного оптимального оператора управляющего устройства*. Этот способ хорош тем, что имеется возможность в процессе эксплуатации сравнивать при необходимости соответствие реализуемых управлений оптимальным.

2. *Синтез оптимального оператора управляющего устройства для предварительно упрощенного объекта и упрощающих ограничений*. Этот способ проще первого, так как упрощенное описание объекта требует создания менее сложного управляющего устройства, однако в этом случае невозможно оценить степень отклонения реального управления от оптимального.

При синтезе квазиоптимального управляющего устройства используют также ограничения класса его оператора, например, путем замены их функций аппроксимирующими рядами.

6.5. Оптимальные системы при случайных воздействиях

При невозможности получения всей необходимой для управления информации о состоянии объекта (его параметрах, значениях выходных величин и их производных) и внешних воздействиях используют их статистическое представление и, следовательно, осуществляют в этом случае оптимизацию только в статистическом смысле – не для каждого отдельного процесса управления, а в среднем для множества его реализаций с переходом от действительных значений критерия оптимальности к его математическому ожиданию.

В качестве критерия оптимальности при оптимизации по быстродействию берут величину $M[t_{II}] \rightarrow \min$. При необходимости минимизации ошибки управления в качестве статистического критерия оптимальности используют дисперсию $M\{[Y(t) - G(t)]^2\} \rightarrow \min$.

Все статистические критерии могут быть обобщены с получением критерия, называемого *критерием среднего риска*:

$$\rho(A) = M[l(G, Y)] \rightarrow \min,$$

где $\rho(A)$ – средний риск, представляющий собой среднее значение некоторой функции $l(G, Y)$ от задания G и сигнала Y на выходе системы; A – оператор системы, связывающий Y и G .

Функция $l(G, Y)$ называется *функцией потерь*, а ее вид определяется задачей системы (расход, энергия, время процесса и др.).

Минимизация среднего риска осуществляется выбором варьируемой части управляющего устройства – в этом заключается задача синтеза статистически оптимальной САУ.

Величина среднего риска ρ , найденная для одного определенного задающего сигнала G , называется *условным риском*:

$$\rho(A/G) = M[l(G, Y)/G] \rightarrow \min,$$

который представляет собой среднее значение функции потерь при многократной реализации системой одного и того же сигнала G .

Решение задачи оптимизации при использовании критерия минимального риска предполагает априорное знание вероятностных характеристик всех приложенных к системе воздействий.

Для случаев, когда распределение G неизвестно и следует ожидать, что самыми вероятными будут самые неблагоприятные ситуации, используют *минимаксный критерий* оптимальности:

$$\max_G \rho(A/G) \rightarrow \min,$$

где \max – “максимум по G ” – означает максимальное значение $\rho(A/G)$ из всех его значений, соответствующих всем возможным задающим воздействиям G .

Здесь предполагается минимизация максимального значения условного риска из всех значений, соответствующих различным G , т.е. получение наилучшего результата в наихудшей ситуации. Этот критерий дает в среднем по всем значениям G неоптимальный вариант, но зато в случае самого неблагоприятного сигнала G функция потерь будет наименьшей. В условиях организованного противодействия, когда возмущающие воздействия являются предельно неблагоприятными для системы (различные аварийные ситуации, полное отсутствие данных о законе распределения внешних воздействий, противодействие подсистем в системе “нападение - защита” и т.п.), использование минималь-

ного критерия дает лучший результат, чем при минимизации среднего риска.

Статистически оптимальные системы, работа которых основана на использовании минимального критерия, называются *минимально-оптимальными* или *игровыми*.

В общем случае информация, необходимая для работы системы, может содержать детерминированную и случайную части. Синтез оптимальных САУ в этом случае производится последовательным решением различных этапов задачи. Вначале синтез производят на основании детерминированной части информации без учета случайной части или учитывают ее приближенно. После этого, используя статистические критерии оптимальности, уточняют решения.

При этом для первого этапа все переменные принимаются равными средним значениям.

Траектория движения будет оптимальной только в том случае, когда значения всех переменных будут совпадать с их автоматическими ожиданиями, а если такого совпадения не будет, то траектории будут случайными и отличными от оптимальной. На втором этапе управление заключается в сжатии совокупности случайных траекторий и максимально возможном приближении полученной таким образом результирующей траектории к оптимальной, соответствующей выбранному статистическому критерию оптимальности.

В игровых системах, когда внешние воздействия изменяются не случайно, а предельно неблагоприятно, в детерминированном и случайном этапах решения задачи используется минимаксный критерий.

Очевидно, что в статистических оптимальных системах качество управления будет хуже, чем в детерминированных оптимальных САУ, однако на практике необходимая информация о достоверном состоянии объекта управления и внешних воздействиях часто отсутствует, поэтому и приходится использовать статистические характеристики этих величин и оптимизацию проводить только в статистическом смысле.

7. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

7.1. Основные понятия

Адаптивными называются системы, в которых автоматически обеспечивается необходимое качество управления путем изменения параметров или структуры управляющего устройства при изменяющихся внешних воздействиях и свойствах объекта управления.

Качество управления определяется критерием качества J , представляющим собой функцию или функционал и зависящим от выходных и входных величин системы. Критерием качества может быть любой показатель качества переходного процесса, производительность, экономичность и т.д. Критерий качества в отличие от критерия оптимальности может при работе системы не стремиться к минимуму, а стремиться к любой заданной величине или изменяться заданным образом.

При стремлении критерия качества к минимуму система будет являться *адаптивной оптимальной системой*, основное отличие которой от обычной оптимальной системы заключается в том, что цель управления здесь достигается не только формированием оптимального оператора управляющего устройства, но и изменением параметров и структуры управляющего устройства, т.е. *адаптивные системы автоматически приспосабливаются к изменениям внешних условий и свойств объекта управления, обеспечивая необходимое качество управления.*

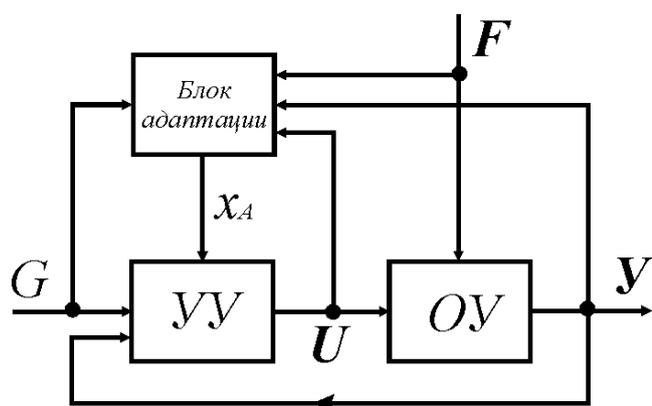


Рис. 7.1. Структура адаптивной системы

На рис. 7.1 показана упрощенная структура адаптивной системы, представляющая собой обыкновенную САУ с управлением по отклонению и контур адаптации. Принцип управления основной части системы может быть любым.

Областью применения адаптивных систем являются условия работы с изменяющимися в широких пределах внешними возмущающими воздействиями и наличие объекта с переменными или неиз-

вестными параметрами. В последнем случае блок адаптации может подключаться к системе только для настройки ее управляющего устройства.

Блок адаптации является как бы внешним управляющим устройством основной системы, состоящей из объекта управления ОУ и управляющего устройства УУ, связанных отрицательной обратной связью. При этом блок адаптации управляет основным управляющим устройством, изменяя его оператор, т.е. параметры (*самонастраивающаяся САУ*) или структуру (*самоорганизующаяся САУ*). Выходной сигнал блока адаптации, в общем случае вектор X_A , формируется в результате некоторой вычислительной процедуры, определяющей отклонение текущего значения критерия качества, полученного на основе измеренных значений величин G, U, Y, F , от его заданного значения, и воздействует на УУ таким образом, чтобы устранить это отклонение.

7.2. Самонастраивающиеся и самоорганизующиеся системы

Различают самонастраивающиеся системы со стабилизацией и оптимизацией статистических и динамических режимов. На рис. 7.2 показана структура системы со стабилизацией динамических свойств.

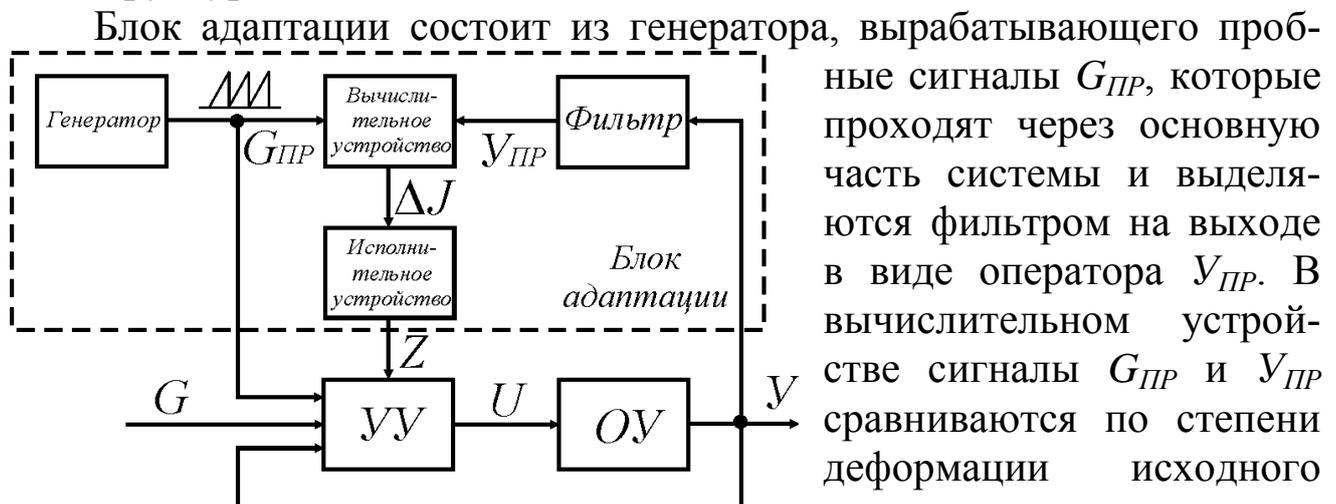


Рис. 7.2. Структура самонастраивающейся системы

Затем исполнительное устройство воздействует на настроечные параметры УУ таким образом, чтобы $\Delta J \rightarrow 0$.

При этом пробные сигналы не должны мешать работе основной части САУ, а быстродействие контура самонастройки должно быть

выше скорости изменения стабилизируемых динамических свойств системы.

На практике большое распространение получила структура самонастраивающихся САУ с *эталонной моделью*, которая имеет динамические характеристики, являющиеся эталонными для настраиваемой под нее системы. В этом случае структура самонастраивающейся системы остается неизменной (рис. 7.2), но значительно упрощается вычислительное устройство, в котором теперь не проводится вычисление текущего значения критерия качества, а величина ΔJ определяется в виде разности сигналов на выходе эталонной модели и $U_{ПР}$.

В качестве пробных сигналов применяются ступенчатый, импульсный, гармонический и другие виды сигналов. Выбор вида пробного сигнала определяется видом критерия качества или динамическими характеристиками системы, которые требуется контролировать.

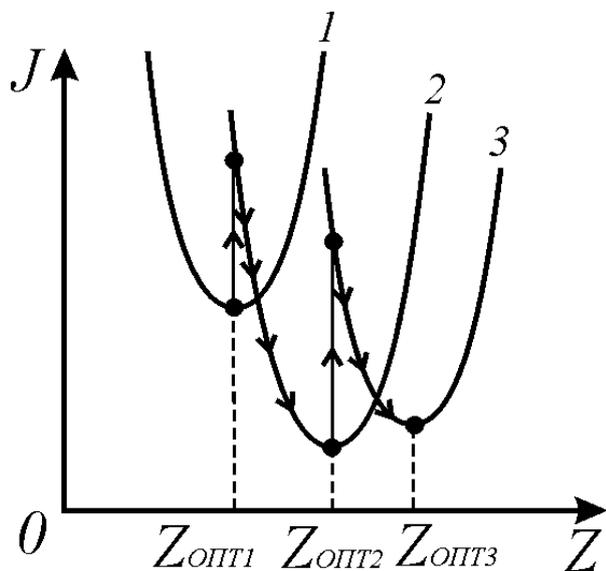


Рис. 7.3. Процесс слежения за экстремумом функции $J(t)$

Если на выходе исполнительного устройства установить сумматор и подать на него сигнал с генератора “качания”, то тогда появляется возможность определять отклонение J от заранее неизвестного его экстремального значения, в результате чего система самонастройки будет осуществлять автоматическое слежение за экстремумом J (рис. 7.3) для определения направления изменения настроечных параметров Z корректирующих звеньев в управляющем устройстве основной части системы.

Зависимость $J(Z)$ для трех последовательных моментов времени показана в виде кривых 1, 2, 3. Изменение возмущений или свойств объекта управления вызывает смещение экстремума J , и система самонастройки изменяет значение настроечного параметра Z таким образом, чтобы критерий J вновь стремился к экстремуму (показано стрелками).

Существуют также *беспоисковые* (аналитические) самонастраивающиеся САУ, работа которых основана на знании и использовании оператора объекта управления. Определение оптимальной настройки

системы в этом случае производится аналитически. В случае изменяющегося в процессе работы оператора объекта управления необходимо предварительно производить *оперативную идентификацию объекта*, т.е. определение его оператора (например, с помощью пробных сигналов) в реальном времени.

Под реальным временем здесь подразумевается, что продолжительность процесса идентификации позволяет отслеживать требуемое изменение контролируемых параметров объекта. В таких системах обязательным является использование цифровых вычислительных машин. Поиск оптимальной настройки может также осуществляться на модели, и найденная настройка затем переносится на основную часть САУ.

Самонастраивающиеся САУ с оптимизацией статических режимов были исторически первыми адаптивными системами. Эти системы называются еще *системами экстремального регулирования*. В них поддерживается оптимальное значение критерия качества, который характеризует работу объекта в статическом режиме, т.е. обеспечивается работа в точке экстремума статической характеристики объекта.

Объекты с такими характеристиками называются *экстремальными объектами*. К их числу относятся различные топки, двигатели внутреннего сгорания, выпарные аппараты в химической промышленности, отсадочные и флотационные машины на обогатительных фабриках и т.д. Анализ различных технологических процессов показывает, что экстремальная статическая характеристика существует в тех случаях, когда одновременно в объекте протекает несколько процессов, ведущих к противоположным результатам. Например, температура в топке определяется количеством и качеством сжигаемого топлива, температурой и количеством подаваемого воздуха. При некотором соотношении этих показателей температура в топке будет максимальной.

Принцип действия экстремальной системы регулирования тот же, что и у контура самонастройки в САУ при оптимизации динамических режимов, однако пробные сигналы здесь не нужны, так как критерием качества является статическая функция настроечных параметров, которая определяется в статическом режиме. Генератор “качания” для поиска экстремума характеристики используется, но применяются и беспойсковые экстремальные системы с аналитическим отысканием экстремума.

Адаптивные системы, в которых при адаптации происходит изменение структуры управляющего устройства, называются *самооргани-*

зующимися. В этих системах сигнал Z_i является дискретным и каждому его значению соответствует определенный оператор управляющего устройства. Изменение структуры УУ может осуществляться релейными элементами, включающими различные корректирующие звенья по сигналам блока адаптации.

Наиболее эффективными являются системы, в которых сочетаются свойства самонастраивающихся и самоорганизующихся систем, а наивысшим уровнем управляемых систем являются *адаптивные системы с самообучением*, в которых может быть реализована идея самоусовершенствования алгоритма работы и самого критерия качества управления.

7.3. Методы нахождения экстремума критерия качества

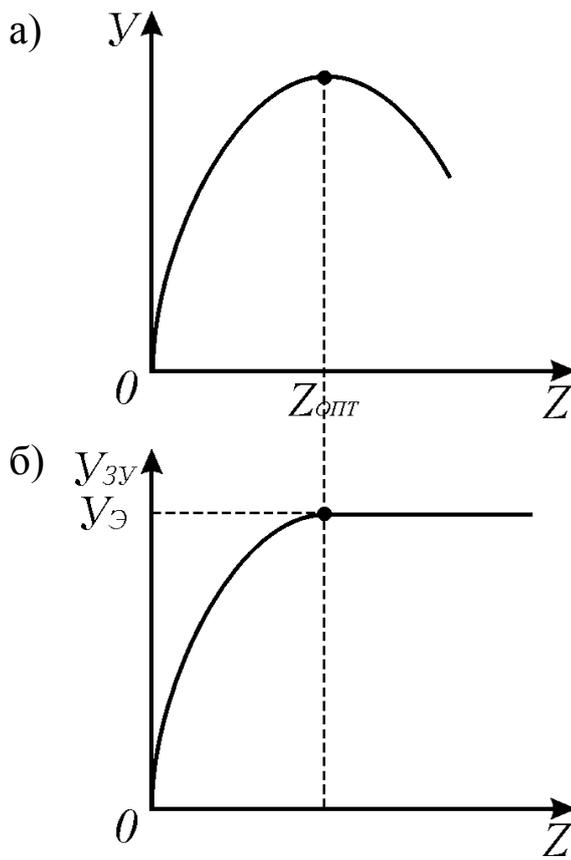
В однопараметрических экстремальных системах, когда используется один управляющий параметр, применяются следующие методы поиска экстремума: измерение производной, запоминание экстремума, использование периодического поискового сигнала, применение шаговых алгоритмов.

Метод измерения производной основан на том, что производная dJ/dZ меняет свой знак при прохождении критерия (статической характеристики) через экстремум. Для определения производной dJ/dZ можно найти вначале производные dJ/dt и dZ/dt и разделить первую на вторую.

Метод запоминания экстремума заключается в использовании разности между текущим и экстремальным значением критерия качества для определения момента реверса процесса формирования приращения настроечного параметра. Для определения экстремума используется запоминающее устройство, включенное так, что на его вход поступают только положительные (при поиске максимума) или отрицательные (при поиске минимума) приращения показателя качества.

На рис. 7.4 показана статическая характеристика объекта $Y(Z)$ и соответствующая ей диаграмма выхода запоминающего устройства $Y_{3Y}(Z)$. Для формирования управляющего воздействия используется разность $\sigma = -Y_{3Y}(Z) + Y(Z)$. Если система движется к экстремуму, то $Y_{3Y}(Z) = Y(Z)$ и $\sigma = 0$. После достижения экстремума система продолжает движение в том же направлении. При этом $[Y_{3Y}(Z) = Y_3] > Y(Z)$. Разность становится отличной от нуля, и производится реверс процесса

формирования приращения величины Z . В момент реверса информация о значении экстремума в запоминающем устройстве стирается.



Процесс настройки продолжается аналогично. Установившемуся режиму соответствуют автоколебания параметра Z относительно $Z_{опт}$, соответствующего экстремуму критерия качества.

В общем случае, когда число настроечных параметров равно n и $J(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ является функцией n переменных, направление движения к экстремуму определяется градиентом, т.е. вектором

$$\text{grad}J = \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial J}{\partial Z_i},$$

где k_i ($i=1, 2, \dots, n$) – единичные векторы (орты) координатных осей Z_i .

Рис. 7.4. К методу запоминания экстремума

В точке экстремума $\text{grad}J=0$, т.е. $\frac{dJ}{dZ_i}=0$. Этот метод называется *методом градиента*.

Процедура определения градиента по этому методу сопряжена со значительными вычислительными затратами. Для более быстрого нахождения экстремума критерия качества на практике используются следующие методы: метод наискорейшего спуска, метод Гаусса-Зейделя, метод случайного поиска.

Метод наискорейшего спуска при отыскании минимума критерия качества управления заключается в следующем (рис. 7.5, путь 2). В начальной точке H находятся направленные векторы $\text{grad}J$ и организуется движение в этом направлении до обращения в нуль производной от J по данному направлению. Этому моменту будет соответствовать касание траектории с линией $J=J_2$. В точке касания вновь определяется направление вектора $\text{grad}J$ и организуется движение по этому направлению до момента изменения знака приращения J и т.д. до достижения экстремума ($J=J_{min}$). В этом методе требуется меньше вычислительных затрат, чем в методе градиента (рис. 7.5, путь 1), поскольку требуется определение направления $\text{grad}J$ лишь в некоторых точках траектории.

Метод Гаусса-Зейделя заключается в поочередности изменения каждого настроечного параметра до момента обращения в нуль соответствующей частной производной $\partial J/\partial Z_i$ (рис. 7.5, путь 3). Этот метод проще метода наискорейшего спуска, так как здесь процедура поиска функции нескольких переменных сводится к последовательному нахождению экстремума этой функции поочередно от каждого настроечного параметра Z_i .

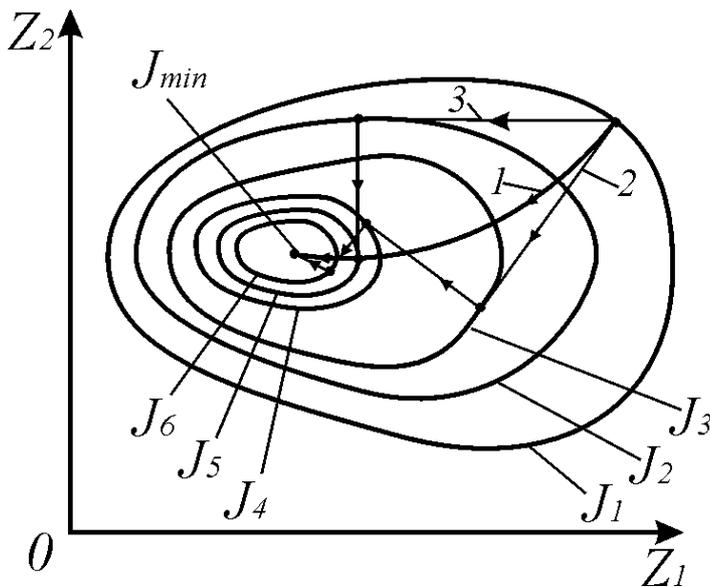


Рис. 7.5. Иллюстрация методов поиска J_{min}

Метод случайного поиска (вслепую) заключается в придании настроечным параметрам некоторых случайных значений с последующим определением приращения критерия J . Если $\Delta J > 0$ (при поиске минимума), то производится возврат в исходную точку и делается новый случайный шаг. Эта процедура продолжается до достижения $J=J_{min}$.

Используют также различные комбинации перечисленных методов, например *метод статистического градиента*, когда для нескольких пробных шагов из начальной точки определяют соответствующие им величины ΔJ , находят направление наиболее интенсивного уменьшения J и делают в этом направлении рабочий шаг, и *метод статистического наискорейшего спуска*, когда в найденном направлении делается не один шаг, а организуется движение до тех пор, пока ΔJ не изменит знак.

Метод случайного поиска и его комбинация с другими методами при трех и более настроечных параметрах превосходят по скорости достижения экстремума J все остальные методы.

По сравнению с другими методами метод случайного поиска позволяет при наличии нескольких экстремумов найти глобальный.

8. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

8.1. Общие сведения

В широком смысле под *идентификацией* объекта управления понимают определение или уточнение структуры и параметров его математической модели (ММ), адекватность которой реальному объекту удовлетворяет заданным требованиям. Под *параметрами* здесь подразумеваются коэффициенты дифференциальных уравнений ММ объекта.

ММ объекта может быть получена *аналитически* при известных закономерностях протекающих в объекте процессов или *по результатам экспериментальных исследований* входных и выходных переменных объекта.

Последний способ получил наибольшее распространение на практике из-за малого объема требуемой априорной (полученной до начала опыта) информации об объекте. Как правило, уровень априорных сведений должен быть достаточным лишь для выбора структуры ММ и условий проведения экспериментов.

Процесс идентификации обычно состоит из трех этапов:

1. Выбор *структуры* ММ по результатам изучения объекта или по имеющимся априорным сведениям.
2. Выбор *критерия подобия* модели и объекта.
3. Определение *параметров модели* по экспериментальным данным исходя из выбранного критерия.

Эффективность идентификации в значительной степени зависит от правильности выбора структуры ММ, который основывается на анализе физических процессов в объекте, на совокупности результатов предварительных наблюдений за поведением объекта и использовании предположений о структуре ММ.

Идентификации объекта по результатам экспериментальных исследований предшествует предварительное изучение его с позиций конструкции, возможных режимов и особенностей работы, наличия ограничений, накладываемых на входные и выходные величины, и т.д. Все это позволяет сделать выводы о линейности объекта, его инерционности, стационарности, сосредоточенности параметров и др. Если это допустимо, то модель объекта линеаризуют. В качестве критерия подобия в подавляющем большинстве случаев используется критерий

минимума среднеквадратичного отклонения, являющегося частным случаем критерия минимума среднего риска, когда функция потерь представляет собой квадрат разности между выходными сигналами объекта и модели (см. п. 6.5).

Процесс определения параметров модели называется *параметрической идентификацией*. Методы параметрической идентификации подразделяются на активные и пассивные, детерминированные и статистические, оперативные и ретроспективные, с описанием во временной или частотной области. При этом системы идентификации могут быть разомкнутого и замкнутого типа.

Активные методы идентификации основаны на использовании тестовых сигналов, подаваемых на объект, по деформации которых судят о параметрах модели. При использовании *пассивных* методов параметры модели определяются по результатам статистической обработки наблюдений входных и выходных сигналов объекта, полученных в процессе его эксплуатации. Здесь применяются статистические методы корреляционного и регрессионного анализов, стохастической аппроксимации и др. Основным недостатком пассивных методов – значительные затраты времени на накопление и обработку информации об объекте.

Использование *детерминированных* или *статистических* методов определяется характером анализируемых сигналов. Детерминированные методы могут быть использованы только при активной идентификации и детерминированных сигналах на входе и выходе объекта, но в реальных условиях эти сигналы из-за влияния помех имеют составляющие в виде случайного шума, поэтому детерминированные методы в этом случае дополняются статистическим усреднением (сглаживанием) полученных результатов.

Разделение идентификации на оперативную и ретроспективную производится по признаку привязки к текущему времени. *Оперативная идентификация* позволяет определять изменяющиеся параметры объекта в реальном времени непосредственно в процессе его работы. Для этих целей применяют рекуррентные (пошаговые) алгоритмы обработки данных на ЦВМ со скоростью, близкой к скорости протекания реальных процессов в объекте. *Ретроспективная идентификация* использует ранее накопленные экспериментальные данные и изменяется в тех случаях, когда параметры объекта постоянны или изменяются сравнительно медленно.

Существует большое разнообразие методов и с использованием непрерывного и дискретного времени, применяемых для широкого спектра задач идентификации. Для *непараметрической идентификации*, когда ММ объекта, связывающая выходные сигналы с входными, содержит неизвестные функции, требуется большой объем необходимого экспериментального материала с информацией о непрерывных множествах входных и выходных величин. Введение некоторой сетки для получения дискретных значений этих величин приводит к замене непараметрической идентификации на параметрическую, где в качестве вектора параметров выступают множества значений функции в узлах сетки пространства аргументов.

При непараметрической идентификации основными методами являются метод частотных характеристик, метод временных характеристик и метод корреляционных функций.

Параметрическая идентификация осуществляется с помощью многочисленных методов и алгоритмов, которые укрупненно можно подразделить на прямые методы (например, метод сумм произведений, метод наименьших квадратов), беспоисковые и поисковые алгоритмы с адаптивной моделью, а также алгоритмы идентификации, основанные на *теории оценивания* параметров. Последние получили наибольшее распространение для идентификации электромеханических объектов, осуществляемой в реальном времени с помощью определения текущих значений их параметров и состояний. *Состояние объекта* – это переменная или совокупность переменных (вектор), которая вместе с входным сигналом объекта полностью определяет его дальнейшее поведение. Для электромеханических преобразователей состояние может характеризоваться мгновенными значениями токов, потокосцеплений, частоты вращения ротора и т.д.

8.2. Методы оценивания

Идентификация, особенно в процессе работы объекта, осуществляется при наличии возмущений и различных погрешностей измерительной системы на некотором конечном интервале наблюдения за входными сигналами, поэтому невозможно точное определение корреляционных функций или спектральных плотностей контролируемых

процессов, следовательно, вместо точных значений параметров моделей исследуемых объектов можно найти лишь *оценки*.

В математической статистике под оцениванием понимается обработка данных, полученных при измерениях величин с целью уменьшения влияния случайных факторов. Задача оценивания должна рассматриваться как задача стохастической оптимизации с минимизацией ошибки.

На рис. 8.1 представлена модель объекта идентификации. Здесь введены следующие обозначения:

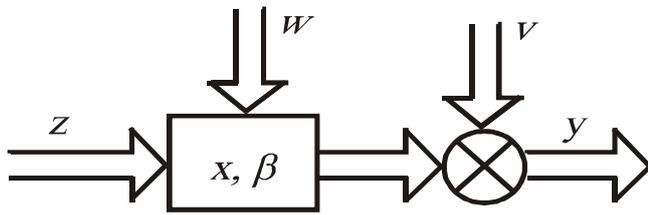


Рис. 8.1. Модель объекта идентификации

$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ – вектор входных величин; $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$ – вектор состояния системы; $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_m]^T$ – вектор параметров системы; $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m]^T$ – вектор возмущающих воздействий; $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_l]^T$ – вектор выходных величин; $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_l]^T$ – вектор погрешности измерения.

Основными методами оценивания являются следующие:

1. Метод наименьших квадратов (МНК) и его модификации.
2. Марковские оценки.
3. Метод максимального правдоподобия.
4. Фильтр Калмана.

Эти методы здесь упорядочены по возрастанию требуемого объема априорной информации об объекте. В МНК не требуется никакой априорной информации, поскольку предполагается, что динамика объекта аппроксимируется выбранной моделью. Марковские оценки требуют знания ковариационной матрицы шума измерительной части, определяемого различного рода погрешностями, внешними воздействиями и помехами. Для вычисления оценок методом максимального правдоподобия необходимо знание плотности вероятности измеряемого случайного сигнала.

В случае гауссовского аддитивного шума марковские оценки и оценки по методу МНК эквивалентны оценкам по методу максимального правдоподобия. Методы 1-3, в свою очередь, являются частными

случаями байесовских оценок, только с меньшим объемом априорной информации. Байесовские оценки используют знание априорных плотностей вероятности неизвестных параметров, совместной плотности вероятности параметров и вектора выходных величин, а также знание потерь, связанных с численной величиной оценки вектора параметров. При использовании фильтра Калмана требуется знание ковариационных матриц погрешности измерения и возмущения. Перечисленные методы оценивания рассмотрены с позиций требований к априорной информации о случайной составляющей процесса.

Выбор конкретного метода определяется физической природой объекта и условиями, при которых требуется реализация метода. Для электромеханических объектов наиболее предпочтительными являются МНК (не требуется априорной информации) и фильтр Калмана, который позволяет одновременно оценивать параметры и состояние объекта, а вся априорная информация может быть получена в реальных условиях работы. Особенности представления информации для применения этих методов рассмотрены ниже, подробное описание методов оценивания приведено в специальной литературе, например в [9, 21].

Метод наименьших квадратов позволяет решить задачу оценки параметров с минимизацией ошибки по среднеквадратичному критерию. Для применения этого метода необходимо математическую модель исходного объекта привести к виду

$$Y = Z\beta + v,$$

где $Z = \begin{bmatrix} z(t)^T & z(t+T_k)^T & z(t+2T_k)^T & \dots & z(t+sT_k)^T \end{bmatrix}^T$ – матрица входных величин размерностью $s \times m$; $Y = \begin{bmatrix} y(t)^T & y(t+T_k)^T & y(t+2T_k)^T & \dots & y(t+sT_k)^T \end{bmatrix}^T$ – вектор выходных величин размерностью s ; T_k – период дискретизации.

Следует отметить, что величины Y и Z должны быть известны. Для оценки вектора параметров β методом наименьших квадратов используют также следующее матричное уравнение:

$$\hat{\beta} = [Z^T Z]^{-1} Z^T Y, \quad (8.1)$$

где $\hat{\beta}$ – оценка вектора параметров размерностью m .

Для того чтобы уравнение (8.1) имело решение, необходимо выполнение условия $s \geq m$.

Рекуррентный метод наименьших квадратов с “забыванием” позволяет отслеживать в реальном времени изменения параметров. Ис-

ходная математическая модель такая же, как и в предыдущем случае. Представим матрицу Z в виде

$$Z = \begin{bmatrix} z_1(0) & \dots & z_n(0) \\ \vdots & & \vdots \\ z_1(k) & \dots & z_n(k) \\ \text{-----} \\ z_1(k+1) & \dots & z_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(k) \\ \text{-----} \\ z^T(k+1) \end{bmatrix},$$

тогда оценка вектора параметров в момент времени $(k+1)$ будет определяться уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{(k+1)} &= \hat{\beta}_{(k)} + \gamma_{(k)} P_{(k)} z_{(k+1)} (y_{(k+1)} - z_{(k+1)}^T \hat{\beta}_{(k)}); \\ P_{(k+1)} &= \rho^{-1} (P_{(k)} - \gamma_{(k)} P_{(k)} z_{(k+1)} z_{(k+1)}^T P_{(k)}); \\ \gamma_{(k)} &= (z_{(k+1)}^T P_{(k)} z_{(k+1)} + \rho)^{-1}, \end{aligned}$$

где ρ – весовой коэффициент, который выбирают в диапазоне $0 < \rho \leq 1$; P – ковариационная матрица ошибок оценки параметров.

Фильтр Калмана представляет собой рекурсивный линейный оптимальный алгоритм обработки измерительной информации в реальном времени, предназначенный для оценки параметров и состояния линейных или линеаризованных динамических объектов с известной структурой при наличии помех, которые должны относиться к классу белого гауссовского шума.

При дискретном описании объекта математическая модель разбивается на две части:

1) модель, описывающая состояние системы:

$$x_{(k+1)} = F_{(k+1,k)} x_{(k)} + B_{(k+1,k)} z_{(k)} + w_{(k)}, \quad (8.2)$$

где F – переходная матрица состояния; B – переходная матрица управления;

2) модель, описывающая цепь измерения системы:

$$y_{(k)} = H_{(k)} x_{(k)} + G_{(k)} z_{(k)} + v_{(k)}, \quad (8.3)$$

где H , G – матрицы коэффициентов системы уравнений, описывающих систему измерения.

Для одновременной оценки состояния и параметров системы фильтр Калмана расширяют, добавляя к вектору состояния x вектор параметров θ . При этом для случая, когда параметры системы неизменны или медленно изменяются во времени, расширенное уравнение состояния примет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{(k+1)} \\ \theta_{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{(k+1,k)}(\theta) \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{(k)} \\ \theta_{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{(k+1,k)}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + w_{(k)},$$

где I – единичная матрица.

Следует отметить, что при переходе к расширенному фильтру Калмана линейные уравнения (8.2) и (8.3) становятся нелинейными по параметрам и будут выглядеть следующим образом:

$$x_{e(k+1)} = f(x_{e(k)}, z_{(k)}) + w_{(k)}; \quad (8.4)$$

$$y_{(k)} = h(x_{e(k)}, z_{(k)}) + v_{(k)}; \quad (8.5)$$

$$x_e = [x \ \theta].$$

Алгоритм работы расширенного фильтра Калмана можно разделить на два этапа. На *первом этапе* производится оценка состояния системы по предварительным данным (предсказание состояния): $\hat{x}_{e(k+1|k)} = f(\hat{x}_{e(k|k)}, z_{(k)})$, а также предсказание измеряемой величины на основании полученных данных о состоянии: $\hat{y}_{(k+1|k)} = h(\hat{x}_{e(k+1|k)}, z_{(k)})$. На *втором этапе* производится уточнение предсказанного состояния с использованием ошибки измерения $\hat{x}_{e(k+1|k+1)} = \hat{x}_{e(k+1|k)} + K_{(k+1)}(y_{(k+1)} - \hat{y}_{(k+1|k)})$, где K – матрица передачи Калмана, которая зависит от величины ошибки состояния и измерения. В дискретной модели эту ошибку можно вычислить по следующим зависимостям:

$$\tilde{x}_{e(k+1|k)} = F_{e(k)} \tilde{x}_{e(k|k)} + w_{(k)}; \quad \tilde{y}_{(k+1|k)} = H_{e(k+1)} \tilde{x}_{e(k+1|k)} + v_{(k+1)},$$

где $\tilde{x}_e = x_e - \hat{x}_e$ и $\tilde{y}_e = y_e - \hat{y}_e$ – ошибка состояния и ошибка измерения соответственно; F_e и H_e – переходные матрицы этих ошибок.

Для линеаризации уравнений (8.4) и (8.5) используется разложение их в ряд Тейлора, из которого оставляются члены при первых производных. В результате получаются матрицы вида

$$F_{e(k)} = \left. \frac{\partial f_{(k)}(x_{e(k)}, z_{(k)})}{\partial x_e} \right|_{x_e = \hat{x}_e};$$

$$H_{e(k)} = \left. \frac{\partial h_{(k)}(x(t), z(t))}{\partial x_e} \right|_{x_e = \hat{x}_e}.$$

Для определения коэффициента передачи Калмана в матричном виде используется алгоритм последовательной обработки следующих формул:

$$\begin{aligned}
K_{(k+1)} &= P_{e(k+1|k)} H_{(k+1)}^T P_{y(k+1|k)}^{-1}; \\
P_{e(k+1|k)} &= F_{(k)} P_{e(k|k)} F_{(k)}^T + Q_{(k)}; \\
P_{y(k+1|k)} &= G_{(k+1)} P_{e(k+1|k)} G_{(k+1)}^T + R_{(k)}; \\
P_{e(k+1|k+1)} &= P_{e(k+1|k)} - K_{(k+1)} P_{y(k+1|k)} K_{(k+1)}^T,
\end{aligned}$$

где P_e – матрица ошибок предсказания состояния; P_y – матрица ошибок предсказания измерения; Q и R – ковариационные матрицы шума состояния и шума измерения, соответственно, которые определяются как $E(w_j w_k^T) = Q \delta_{jk}$, $E(v_j v_k^T) = R \delta_{jk}$, при этом E обозначает математическое ожидание; δ_{jk} - символ Кронекера.

Реализация фильтра Калмана предполагает использование вычислительных средств высокой производительности.

Пример: Рассмотрим использование расширенного фильтра Калмана для оценки активного сопротивления и потокосцепления статора асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором (АД), работающего со статической нагрузкой.

Математическая модель состояния

В качестве математической модели состояния возьмем известное из теории электропривода [7] уравнение равновесия для статорной цепи АД, представленной в виде обобщенной электрической машины, и запишем его для неподвижных координатных осей α, β :

$$\left. \begin{aligned}
\dot{\psi}_{1\alpha} &= u_{1\alpha} - R_1 i_{1\alpha}; \\
\dot{\psi}_{1\beta} &= u_{1\beta} - R_1 i_{1\beta}.
\end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где $\dot{\psi}_{1\alpha}, \dot{\psi}_{1\beta}$ – составляющие первой производной вектора потокосцепления статора ψ по осям α, β ; $u_{1\alpha}, u_{1\beta}$ – составляющие вектора напряжения, подведенного к обмотке статора, по осям α, β ; R_1 – актив-

ное сопротивление обмотки статора; $i_{1\alpha}$, $i_{1\beta}$ – составляющие вектора тока статора по осям α , β .

После преобразования дифференциальных уравнений (8.6) в разностные, а также расширения вектора состояния добавлением в него активного сопротивления R_1 получим расширенную дискретную математическую модель состояния статора:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1\alpha(k+1)} &= \psi_{1\alpha(k)} + (u_{1\alpha(k)} - R_{1(k)}i_{1\alpha(k)})T_k; \\ \psi_{1\beta(k+1)} &= \psi_{1\beta(k)} + (u_{1\beta(k)} - R_{1(k)}i_{1\beta(k)})T_k; \\ R_{1(k+1)} &= R_{1(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

где T_k – период дискретизации.

Запишем полученные дискретные уравнения в соответствии с (8.4):

$$\left. \begin{aligned} x_{e(k+1)} &= f(x_{e(k)}, z_{(k)}) + w_{(k)}; \\ f(x_e, z) &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1\alpha} + (u_{1\alpha} - R_1 i_{1\alpha})T_k \\ \psi_{1\beta} + (u_{1\beta} - R_1 i_{1\beta})T_k \\ R_1 \end{bmatrix}; \\ x_e &= [\psi_{1\alpha} \ \psi_{1\beta} \ R_1]. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, разностные уравнения состояния статорной обмотки АД представлены в виде, необходимом для использования расширенного фильтра Калмана.

Математическая модель цепи измерения

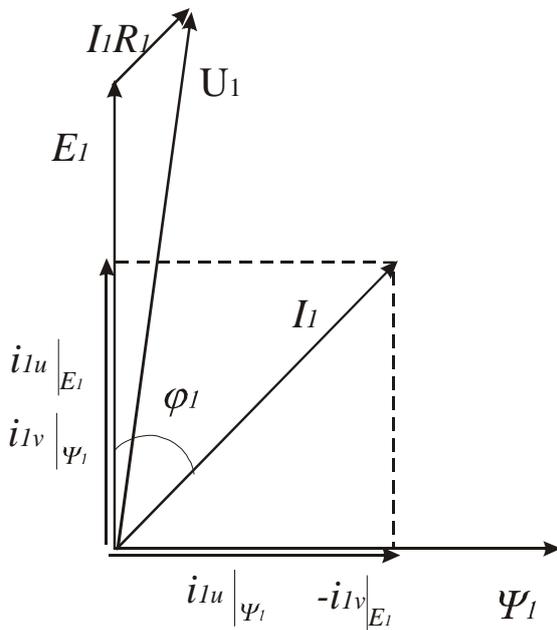


Рис. 8.2. Векторная диаграмма статорных переменных

Для получения математической модели цепи измерения рассмотрим векторную диаграмму АД (рис. 8.2), которая отражает векторы электрических и магнитных величин в осях координат, вращающихся с частотой вращения поля АД, работающего в установившемся режиме. Эти векторы можно разложить по осям u и v , вращающимся с частотой магнитного поля обобщенной двухфазной машины.

Из рис. 8.3 видно, что $\cos \varphi_1$ можно представить как

$$\cos \varphi_1 \Big|_{E_1} = \frac{i_{1u} \Big|_{E_1}}{I_1} \text{ при привязке оси } u \text{ к}$$

вектору ЭДС статора E_1 или как $\cos \varphi_1 \Big|_{\Psi_1} = \frac{i_{1v} \Big|_{\Psi_1}}{I_1}$ при привязке оси u к вектору потокосцепления статора Ψ_1 . Из этих зависимостей можно получить равенство:

$$i_{1u} \Big|_{E_1} = i_{1v} \Big|_{\Psi_1}. \quad (8.8)$$

Подставим в (8.8) уравнения прямого преобразования координат [5]:

$$\left. \begin{aligned} x_u &= x_\alpha \cos \varphi_k + x_\beta \sin \varphi_k; \\ x_v &= -x_\alpha \sin \varphi_k + x_\beta \cos \varphi_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

В случае ориентации оси u по вектору Ψ_1 , как это показано на рис. 8.3, получим соотношения:

$$\cos \varphi_k \Big|_{\Psi_1} = \frac{\Psi_{1\alpha}}{\Psi_1}; \quad \sin \varphi_k \Big|_{\Psi_1} = \frac{\Psi_{1\beta}}{\Psi_1},$$

где $\Psi_1 = \sqrt{\Psi_{1\alpha}^2 + \Psi_{1\beta}^2}$ – модуль вектора потокосцепления статора.

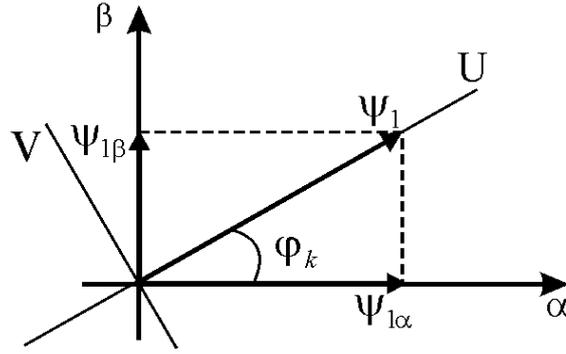


Рис. 8.3. Пояснение к прямому преобразованию координат при ориентации оси u по вектору потокосцепления статора

По аналогии при ориентации оси u по вектору E_1 получим

$$\cos \varphi_k \Big|_{E_1} = \frac{e_{1\alpha}}{E_1}; \quad \sin \varphi_k \Big|_{E_1} = \frac{e_{1\beta}}{E_1},$$

где $e_{1\alpha}$, $e_{1\beta}$ – составляющие ЭДС статора по осям α , β ; $e_{1\alpha} = u_{1\alpha} - i_{1\alpha}R_1$; $e_{1\beta} = u_{1\beta} - i_{1\beta}R_1$; $E_1 = \sqrt{e_{1\alpha}^2 + e_{1\beta}^2}$ – модуль вектора ЭДС статора.

Подставив (8.9) в (8.8) с учетом того, что в (8.9) $x = i_1$, получим уравнение:

$$i_{1\alpha} \frac{u_{1\alpha} - i_{1\alpha}R_1}{E_1} + i_{1\beta} \frac{u_{1\beta} - i_{1\beta}R_1}{E_1} = i_{1\beta} \frac{\Psi_{1\alpha}}{\Psi_1} - i_{1\alpha} \frac{\Psi_{1\beta}}{\Psi_1}.$$

Преобразовав это уравнение, получим

$$(i_{1\alpha}u_{1\alpha} + i_{1\beta}u_{1\beta}) = \frac{E_1}{\Psi_1} (i_{1\beta}\Psi_{1\alpha} - i_{1\alpha}\Psi_{1\beta}) + (i_{1\alpha}^2 + i_{1\beta}^2)R_1.$$

Произведем в полученном уравнении замены:

$$i_{1\alpha}u_{1\alpha} + i_{1\beta}u_{1\beta} = P_1;$$

$$(i_{1\alpha}^2 + i_{1\beta}^2)R_1 = \Delta P_{R_1};$$

$$i_{1\beta}\Psi_{1\alpha} - i_{1\alpha}\Psi_{1\beta} = \frac{2}{3}M$$

и в результате получим выражение:

$$P_1 = \frac{2ME_1}{3\Psi_1} + \Delta P_{R_1}, \quad (8.10)$$

где P_1 – активная мощность, подводимая к статору; ΔP_{R_1} – мощность, рассеиваемая на активном сопротивлении статора; M – электромагнитный момент двигателя, определенный по формуле в [7].

Перепишем уравнение (8.10) в соответствии с (8.5):

$$y_{(k)} = h(x_{e(k)}, z_{(k)}) + v_{(k)},$$

где $y = P_1$; $h(x_e, z) = \frac{2}{3} \frac{ME_1}{\Psi_1} + \Delta P_{R_1}$.

Таким образом, получено уравнение, описывающее систему измерения в виде, необходимом для использования в фильтре Калмана для оценки активного сопротивления и потокосцепления статора, где в качестве измеряемой величины выступает активная мощность, подводимая к статору.

Настройка фильтра Калмана

Для выполнения критерия минимума среднеквадратичной ошибки при оценке состояния системы необходима правильная настройка фильтра Калмана, которая включает в себя определение ковариационных матриц Q и R векторов ошибки состояния w и ошибки измерения v соответственно.

Так как составляющие векторов ошибок измерения не коррелированы между собой и имеют нулевые математические ожидания, их корреляционные матрицы будут диагональными с элементами, определяемыми выражениями:

$$q_{ij} = E(w_i^2) \Big|_{i=j}; \quad r_{ij} = E(v_i^2) \Big|_{i=j}.$$

Рассмотрим каждый из элементов векторов w и v . Составляющие ошибок в векторе состояния получим из первого уравнения системы (8.7):

$$\begin{aligned} \psi_{1\alpha(k+1)} = & (\psi_{1\alpha(k)} + \Delta\psi_{1\alpha(k)}) + (u_{1\alpha(k)} + \Delta u_{1\alpha(k)}) - \\ & -(i_{1\alpha(k)} + \Delta i_{1\alpha(k)})(R_1 + \Delta R_1), \end{aligned} \quad (8.11)$$

где индекс “ Δ ” означает погрешность в соответствующей переменной.

Из (8.11) получим

$$w_1 = \Delta\psi_{1\alpha(k)} + \Delta u_{1\alpha(k)} - (i_{1\alpha(k)}\Delta R_1 + \Delta i_{1\alpha(k)}R_1 + \Delta R_1\Delta i_{1\alpha(k)}). \quad (8.12)$$

Составляющие ΔR_1 и $\Delta\psi_{1\alpha}$ зависят только от вычислительной погрешности, которая при использовании, например, формата чисел extended составляет 10^{-20} , что гораздо меньше измерительной погрешности токов и напряжений, в связи с чем их можно не учитывать. Из (8.3) с учетом приведенных допущений получим первый член ковариационной матрицы:

$$q_{11} = E(\Delta u_{1\alpha}^2) + E(\Delta u_{1\alpha} \Delta i_{1\alpha}) R_l + E(\Delta i_{1\alpha}^2) R_l.$$

По аналогии

$$q_{22} = E(\Delta u_{1\beta}^2) + E(\Delta u_{1\beta} \Delta i_{1\beta}) R_l + E(\Delta i_{1\beta}^2) R_l; \quad q_{33} = E(\Delta R_l).$$

Математические ожидания измерительных погрешностей токов, напряжений и их произведений можно рассчитать по экспериментальным данным, полученным путем измерений шума в измерительной системе при отключенном двигателе.

В качестве измеряемой величины здесь была принята активная мощность, подводимая к двигателю, которая, в свою очередь, рассчитывается с использованием токов и напряжений статора, а значит, включает в себя как измерительную, так и расчетную погрешности и определяется соотношением

$$\begin{aligned} v = \Delta P_1 = & \Delta i_{1\alpha} \Delta u_{1\alpha} + \Delta i_{1\beta} \Delta u_{1\beta} + \\ & + \Delta i_{1\alpha} u_{1\alpha} + i_{1\alpha} \Delta u_{1\alpha} + i_{1\beta} \Delta u_{1\beta} + \Delta i_{1\beta} u_{1\beta}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Из (8.13) получим ковариацию:

$$\begin{aligned} r_{11} = & E(\Delta i_{1\alpha}^2) u_{1\alpha}^2 + E(\Delta i_{1\beta}^2) u_{1\beta}^2 + E(\Delta u_{1\alpha}^2) i_{1\alpha}^2 + E(\Delta u_{1\beta}^2) i_{1\beta}^2 + \\ & + E(\Delta u_{1\alpha}^2 \Delta i_{1\alpha}^2) + E(\Delta u_{1\beta}^2 \Delta i_{1\beta}^2). \end{aligned}$$

Таким образом можно получить диагональные элементы ковариационных матриц, необходимые для оценки активного сопротивления и потокосцепления статора с использованием расширенного фильтра Калмана.

Экспериментальная проверка метода

Описанный метод оценки активного сопротивления и потокосцепления статора был проверен на двигателе 4AX90L4Y3 мощностью 2,2 кВт. В качестве исходных данных использовались токи и напряжения статора, измеренные при работе двигателя на холостом ходу с установившейся скоростью.

Результат определения потокосцепления показан на рис. 8.4, определения R_l – на рис. 8.5, откуда видно, что для выхода определяемых величин на истинную траекторию требуется менее одного периода сетевого напряжения, после чего отклонений не происходит.

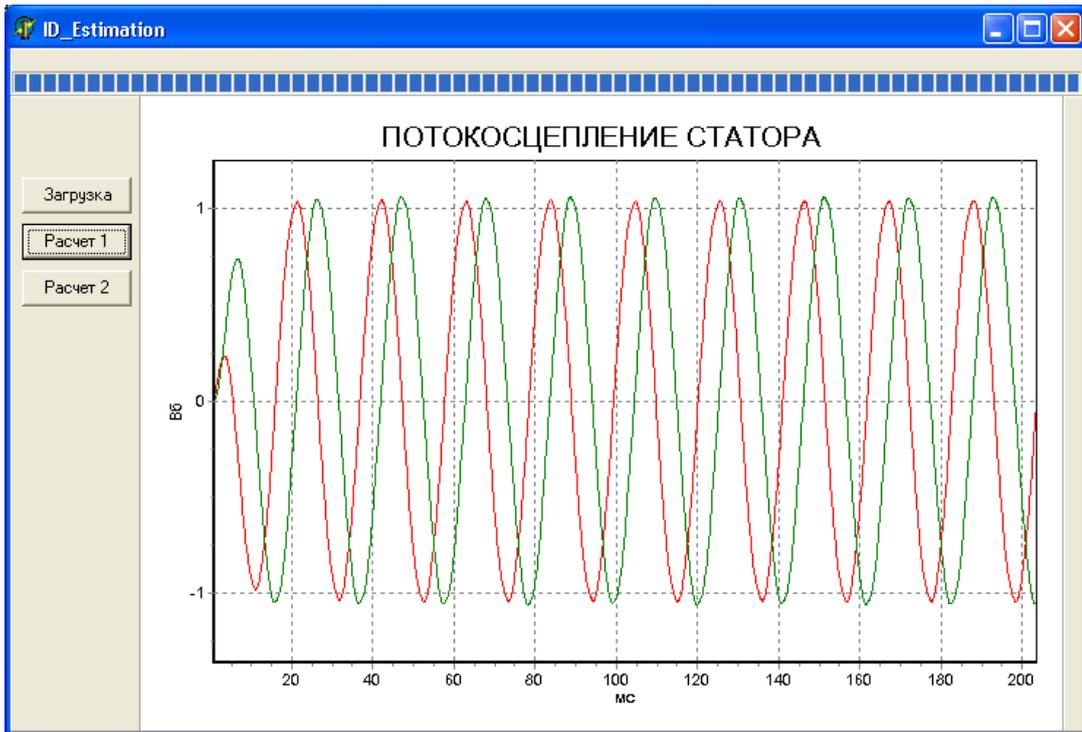


Рис. 8.4. Процесс определения потокоцепления статора

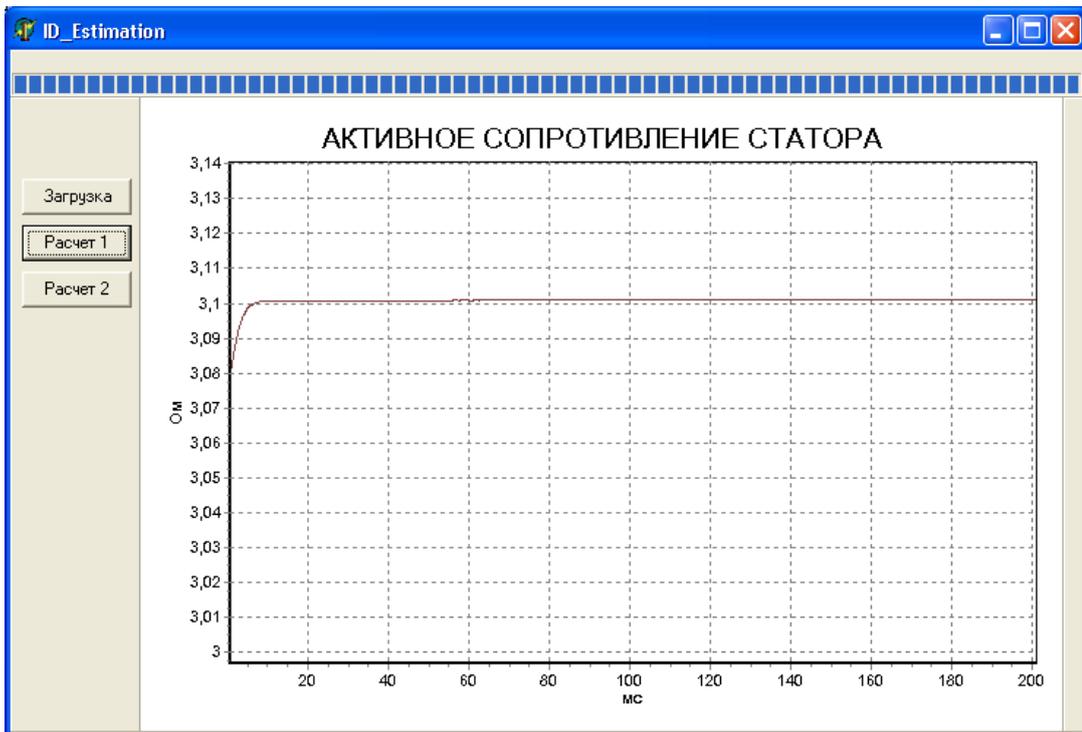


Рис. 8.5. Процесс определения активного сопротивления статора

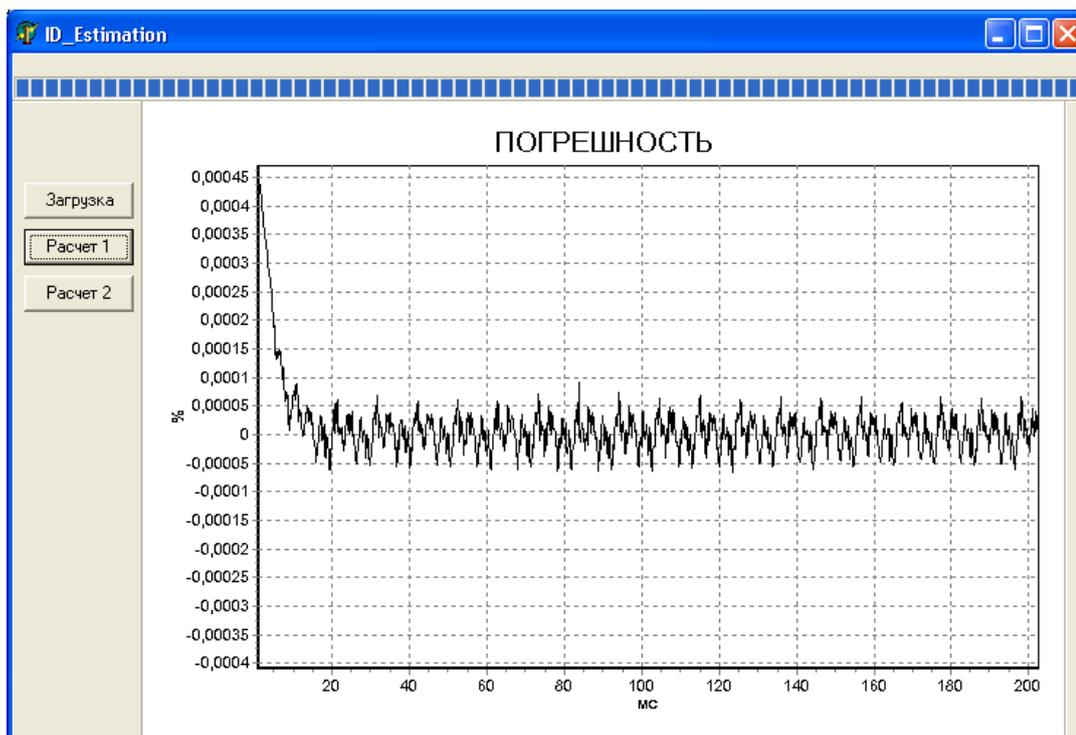


Рис. 8.6. Относительная погрешность вычислений

О достоверности полученных результатов можно судить по относительной погрешности, представленной на рис. 8.6, которая получена как разность между мощностью измеренной и рассчитанной по (8.10) относительно номинальной мощности двигателя. На начальном участке зависимости прослеживается большая величина погрешности, что вызвано несоответствием заданных начальных условий истинным значениям в начальный момент времени. Менее чем за один период частоты сети оцененные величины приближаются к истинным, а погрешность приближается к нулю.

Из-за ограниченного объема пособия структура и алгоритмы вычислительной части процедуры определения параметров и состояния здесь не приводятся.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования/ В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
2. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления/ А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин. – М.: Высш. шк., 1977. – 519 с.
4. Иванов А.А. Теория автоматического управления и регулирования. – М.: Недра, 1970. – 352 с.
5. Каширских В.Г. Теория автоматического управления. Ч. 1. Линейные системы: учеб. пособие [эл. ресурс]. – Кемерово: 2011. – 148 с. – 1 электрон. опт. диск.
6. Ключев В.И. Теория электропривода. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 560 с.
7. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
8. Математические основы теории автоматического регулирования: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высш. шк., 1971. – 808 с.
9. Медич Д.Ж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
10. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учеб.: В 3 т./ Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
11. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы: Учеб. пособие/ Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Высш. шк., 1991. – 255 с.
12. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
13. Певзнер Л.Д. Математические основы теории систем: учеб. пособие / Л.Д. Певзнер, Е.П. Чураков. – М.: Высш. шк., 2009. – 503 с.

14. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А. Бесекерского. – 5-е изд., перераб. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

15. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

16. Сю Д. Современная теория управления и ее приложения/ Д. Сю, А. Мейер. – М.: Машиностроение, 1972. – 544 с.

17. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. В 2 ч. Ч. 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин и др.; Под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 504 с.

18. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов: В 2 ч./ Под ред. А.В. Нетушила. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1976. – 432 с.

19. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: Учеб. пособие для втузов. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.

20. Топчеев Ю.И. Задачник по теории автоматического управления: Учеб. пособие для вузов/ Ю.И. Топчеев, А.П. Цыпляков. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.

21. Ту Ю. Современная теория управления. – М.: Машиностроение, 1971. – 472 с.

22. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977. – 560 с.

23. Чаки Ф. Современная теория управления. – М.: Наука, 1971. – 396 с.

24. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 687 с.

25. Юревич Е.И. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1975. – 416 с.