

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Кузбасский государственный технический  
университет имени Т. Ф. Горбачева»

Кафедра прикладной механики

## СИЛОВОЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Методические указания к практической работе по механике  
для студентов направлений 280700.62, 140100.62, специальности  
130101.65 и по прикладной механике  
для студентов специальности 130400.65

Составители С. В. Герасименко  
М. П. Латышенко  
В. Ю. Садовец

Утверждены на заседании кафедры  
Протокол № 10 от 30.04.2013

Рекомендованы к печати  
учебно-методической комиссией  
специальности 130101.65  
Протокол № 9 от 03.06.2013

Электронная копия находится  
в библиотеке КузГТУ

## Кемерово 2013 ЦЕЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Целью работы является освоение методики силового анализа плоских рычажных механизмов.

С этой целью для механизма, кинематический анализ которого выполнен на лабораторной работе «Планы скоростей и ускорений», требуется определить реакции связей в кинематических парах, а также движущий момент, приложенный к кривошипу и обеспечивающий заданный закон движения.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При конструировании звеньев и кинематических пар механизма приходится решать задачи обеспечения их прочности, жесткости и долговечности. С этой целью определяют реакции связей в кинематических парах. При этом считают известными: размеры и массы звеньев, закон движения входного звена, внешние силы, кроме одной, приложенной к кривошипу и обеспечивающей заданный закон движения.

Реакции определяют методом кинетостатического анализа, при котором используется принцип Даламбера, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции.

Силы инерции всех элементарных масс звена приводят к центру масс и представляют главным вектором  $\bar{I}$  и главным моментом  $M$ . Их значения определяют по формулам:

$$I = m \cdot a_S, \text{ Н}; \quad M = J_S \cdot \varepsilon, \text{ Н}\cdot\text{м}, \quad (1)$$

где  $m$  – масса звена, кг;  $a_S$  – ускорение центра масс,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ ;  $J_S$  – момент инерции звена относительно центра масс,  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $\varepsilon$  – угловое ускорение звена,  $\text{с}^{-2}$ .

Главный вектор прикладывают к центру масс звена (рис. 1, а) и направляют противоположно  $\bar{a}_S$ . Главный момент располагают в произвольном месте звена и направляют противоположно  $\varepsilon$ .

Для упрощения системы сил инерции избавляются от главного момента  $M$ . Это делают параллельным смещением главного вектора  $\bar{I}$  на расстояние  $x$ , которое определяют по формуле:

$$x = M/I, \text{ м.} \quad (2)$$

Вектор  $\bar{I}$  смещают так, чтобы он стремился повернуть звено вокруг центра масс в направлении момента  $M$  (рис. 1,б).

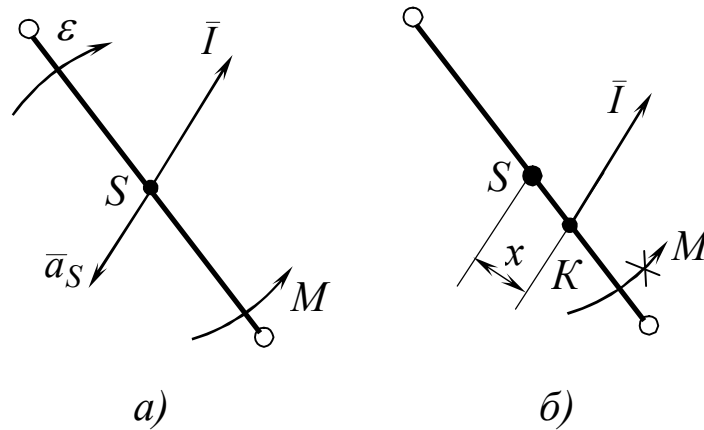


Рис. 1

Реакции связей в кинематических парах определяют, разложив механизм на группы Ассур, т.к. эти группы являются статически определяемыми системами. Это означает, что для групп Ассур число неизвестных сил равно числу независимых уравнений равновесия.

Силовой анализ рычажных механизмов производят в следующей последовательности:

- 1) вычерчивают рычажный механизм в масштабе в положении, в котором требуется выполнить кинетостатический расчет;
- 2) методом планов скоростей и ускорений определяют ускорения центров масс звеньев и угловые ускорения последних;
- 3) рассчитывают силы тяжести и силы инерции всех звеньев;
- 4) механизм раскладывают на группы Ассур и вычерчивают их отдельно, в том же масштабе, что и исходный механизм;
- 5) нагружают группу Ассур всеми известными внешними силами, силами инерции и неизвестными реакциями связей в кинематических парах;
- 6) избавляются от момента сил инерции шатуна, как описано выше;
- 7) решая аналитически и графически составленные уравнения равновесия, определяют неизвестные реакции;



- кривошип 1:  $I_1 = m_1 \cdot a_{S_1}$ , Н;  $M_1 = J_{S_1} \cdot \varepsilon_1$ , Н·м;  
т.к.  $\varepsilon_1 = 0$ , то  $M_1 = 0$ ;
- шатун 2:  $I_2 = m_2 \cdot a_{S_2}$ , Н;  $M_2 = J_{S_2} \cdot \varepsilon_2$ , Н·м;  
где  $\varepsilon_2 = a_{CB}^\tau / l_{BC}$ ;
- ползун 3:  $I_3 = m_3 \cdot a_{S_3}$ , Н;  $M_3 = J_{S_3} \cdot \varepsilon_3$ , Н·м;  
т.к.  $\varepsilon_3 = 0$ , то  $M_3 = 0$ .

4. Разложение на группы начинаем с выделения начальной системы (кривошип 1 и стойка 0). Первую и единственную группу Ассур образуют звенья 2, 3. С этой группы и начинаем кинестатический анализ.

5. Скопируем группу с рис. 2, а. Приложим к группе внешние силы, реакции связей и силы инерции (рис. 3)

6. Избавляемся от момента сил инерции  $M_2$ . Для этого необходимо сместить вектор  $\bar{I}_2$  параллельно самому себе на расстояние  $x_2 = M_2 / I_2$ , м. Масштабное значение расстояния  $x_2$  определяем по формуле  $\langle x_2 \rangle = x_2 / \mu_l$ , мм. Направление смещения определяем, как показано на рис. 1.

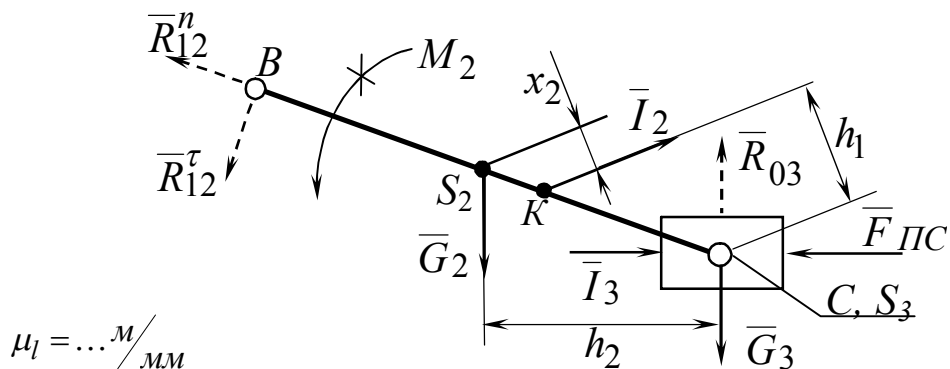


Рис. 3

7. По принципу Даламбера, под действием такой системы сил группа находится в равновесии. Решая уравнения равновесия отдельных звеньев и группы в целом, найдём реакции связей  $\bar{R}_{12}^n$ ,  $\bar{R}_{12}^\tau$  и  $\bar{R}_{03}$ . На рис. 3 они показаны пунктиром.

Составляем уравнение моментов относительно точки С.

$$\sum M_C = 0: R_{12}^\tau \langle l_{BC} \rangle - I_2 \langle h_1 \rangle + G_2 \langle h_2 \rangle = 0.$$

Отсюда

$$R_{12}^\tau = \frac{I_2 \langle h_1 \rangle - G_2 \langle h_2 \rangle}{\langle l_{BC} \rangle}. \quad (4)$$

Если результат получаем со знаком «плюс», то принятое направление вектора реакции  $\bar{R}_{12}^\tau$  – верное. В противном случае выбранное направление пометим крестиком и поменяем на противоположное.

Составляем уравнение геометрической суммы сил, приложенных к группе Ассур 2, 3:

$$\sum \bar{F}_i = 0:$$

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^\tau + \bar{G}_2 + \bar{G}_3 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{F}_{ПС} + \bar{R}_{03} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) решаем графически. Перед построением плана сил задаются длиной вектора, который будет изображать самую большую из сил, известных на данный момент. Это будет сила полезного сопротивления  $F_{ПС}$ . Тогда масштабный коэффициент плана сил:  $\mu_F = F_{ПС} / \langle F_{ПС} \rangle$ , Н/мм.

По формуле  $\langle F_i \rangle = F_i / \mu_F$ , мм, вычисляем графические значения известных сил, входящих в уравнение (5).

Складывая графически векторы сил согласно уравнению (5), определим направления векторов и графические значения реакций  $R_{12}^n, R_{12}, R_{30}$  (рис. 4,а).

Цепочку векторов известных сил начинаем с  $\bar{R}_{12}^\tau$ . Далее, согласно выражению (5), по порядку откладываем графические значения векторов  $\bar{I}_2, \bar{G}_2, \bar{F}_{ПС}, \bar{G}_3, \bar{I}_3$ . Из начала этой цепочки проводим линию действия  $\bar{R}_{12}^n$  перпендикулярно  $\bar{R}_{12}^\tau$ , а из конца цепочки линию действия  $\bar{R}_{30}$ . Получаем точку пересечения этих линий, ограничивающей длины искомых векторов. Модули этих реакций вычисляем по формуле:

$$R_{ij} = \mu_F \cdot \langle R_{ij} \rangle \quad (6)$$

где  $\langle R_{ij} \rangle$  – длина вектора на плане сил, мм.

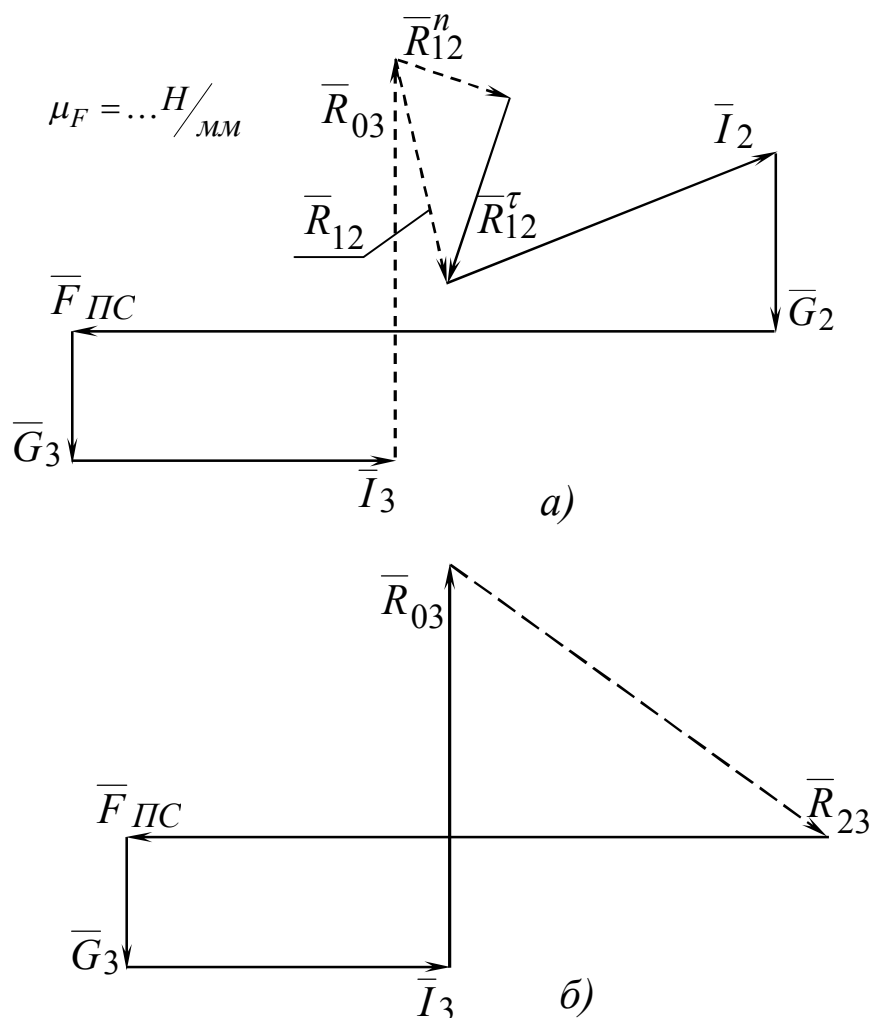


Рис. 4

Для определения реакции  $\bar{R}_{23}$  составляем уравнение геометрической суммы сил, приложенных к звену 3:

$$\sum \bar{F}_i = 0:$$

$$\bar{F}_{ПС} + \bar{G}_3 + \bar{I}_3 + \bar{R}_{03} + \bar{R}_{23} = 0. \quad (7)$$

Графическое решение этого уравнения представлено на рис. 4, б. Как видно из рисунка, цепочку известных сил замыкает искомая

реакция  $\bar{R}_{23}$ . Ее модуль вычисляем по формуле (6). На этом реакции во всех кинематических парах группы Ассур определены.

8. Для расчета начального механизма (0, 1), скопируем его в заданном положении с рис. 2, а (рис. 5, а). Прикладываем в точке В реакцию  $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ .

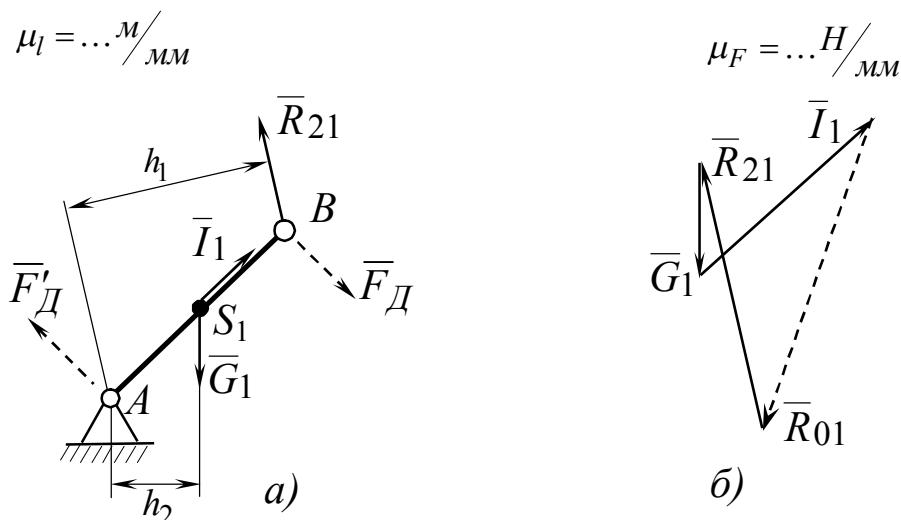


Рис. 5

Представим неизвестный движущий момент как пару сил  $\bar{F}_D, \bar{F}'_D$  с плечом  $l_{AB}$ . Пунктирное начертание векторов  $\bar{F}_D, \bar{F}'_D$  означает, что они неизвестны.

$$\sum M_A = 0: -F_D \langle l_{AB} \rangle + R_{21} \langle h_1 \rangle - G_1 \langle h_2 \rangle = 0. \quad (8)$$

Отсюда

$$F_D = \frac{R_{21} \langle h_1 \rangle - G_1 \langle h_2 \rangle}{\langle l_{AB} \rangle}.$$

9. Движущий момент определяем по формуле

$$M_D = F_D \cdot l_{AB}, \text{ Н}\cdot\text{м}. \quad (9)$$

Реакцию в шарнире А определяем графически решением уравнения равновесия кривошипа:

$$\bar{R}_{21} + \bar{G}_1 + \bar{I}_1 + \bar{R}_{01} = 0. \quad (10)$$





Вектора сил тяжести звеньев прикладываем к центрам масс и направляем вертикально вниз.

Вычисляем силы и моменты сил инерции звеньев

- кривошипа 1:  $I_1 = m_1 \cdot a_{S_1}$ , Н;  $M_1 = J_{S_1} \cdot \varepsilon_1$ , Н·м;

т.к.  $\varepsilon_1 = 0$ , то  $M_1 = 0$ ;

- шатуна 2:  $I_2 = m_2 \cdot a_{S_2}$ , Н;  $M_2 = J_{S_2} \cdot \varepsilon_2$ , Н·м;

где  $\varepsilon_2 = a_{CB}^{\tau} / l_{BC}$ .

- коромысла 3:  $I_3 = m_3 \cdot a_{S_3}$ , Н;  $M_3 = J_{S_3} \cdot \varepsilon_3$ , Н·м;

где.  $\varepsilon_3 = a_{CD}^{\tau} / l_{BC}$

Вектор силы полезного сопротивления  $F_{ПС}$  направлен противоположно скорости  $V_C$  и прикладывается в точке  $C$  механизма.

4. Силовой анализ начнем с группы Ассур 2,3.

5. Скопируем группу с рис. 6, а. Приложим к группе внешние силы, реакции связей и силы инерции (рис. 7)

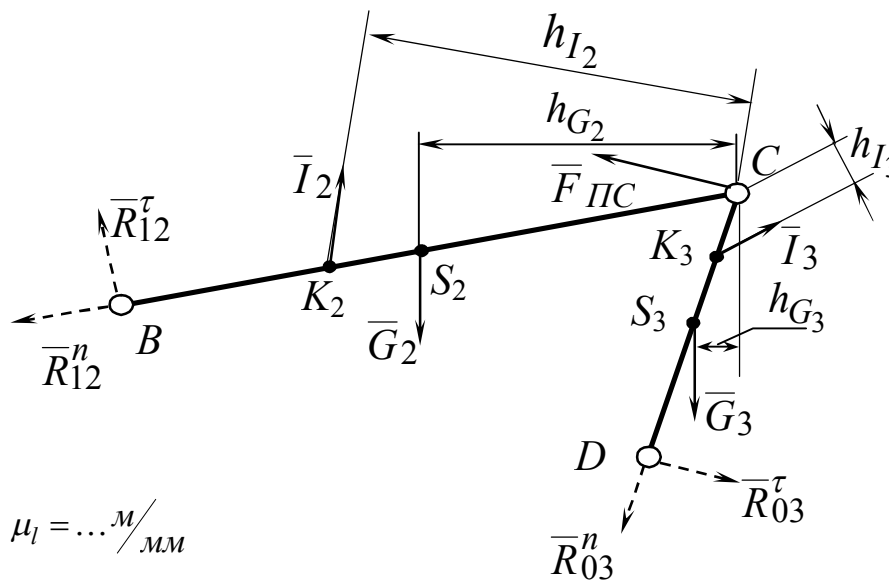


Рис. 7

6. От моментов инерции  $M_2$ ,  $M_3$  избавляемся, как показано на рис. 1.

7. Составляем уравнение моментов относительно точки  $C$  из условия равновесия звена 2.

$$\sum_{(2)} M_C = 0: -R_{12}^{\tau} \langle l_{BC} \rangle - I_2 \langle h_{I_2} \rangle + G_2 \langle h_{G_2} \rangle = 0. \quad (11)$$

Отсюда

$$R_{12}^{\tau} = \frac{-I_2 \langle h_{I_2} \rangle + G_2 \langle h_{G_2} \rangle}{\langle l_{BC} \rangle}.$$

Если ответ получается со знаком «плюс», то принятое направление вектора реакции  $R_{12}^{\tau}$  – верное. В противоположном случае на принятом направлении вектора  $R_{12}^{\tau}$  поставим метку, например крестик, означающий, что истинное направление вектора противоположно принятому.

Составляем уравнение моментов относительно точки  $C$  из условия равновесия звена 3.

$$\sum_{(3)} M_C = 0: R_{03}^{\tau} \langle l_{CD} \rangle + I_3 \langle h_{I_3} \rangle + G_3 \langle h_{G_3} \rangle = 0. \quad (12)$$

Отсюда

$$R_{03}^{\tau} = \frac{-I_3 \langle h_{I_3} \rangle - G_3 \langle h_{G_3} \rangle}{\langle l_{CD} \rangle}.$$

Для определения нормальных составляющих  $\bar{R}_{03}^n$  и  $\bar{R}_{03}^{\tau}$  составим уравнение геометрической суммы сил, приложенных к группе Ассур 2,3:

$$\sum_{(2,3)} \bar{F}_i = 0:$$

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{G}_2 + \bar{I}_2 + \bar{F}_{ПС} + \bar{I}_3 + \bar{G}_3 + \bar{R}_{03}^{\tau} + \bar{R}_{03}^n = 0. \quad (13)$$

Уравнение геометрической суммы решаем графически. Масштабный коэффициент плана сил определяем по формуле  $\mu_F = F_{ПС} / \langle F_{ПС} \rangle$ , Н/мм.

По формуле  $\langle F_i \rangle = F_i / \mu_F$ , мм, вычисляем графические значения сил, входящих в уравнение (13).

Складывая графически вектора сил, согласно уравнению (13), определяем направления векторов и графические значения реакций  $R_{12}^n, R_{03}^n$  (рис. 8).

Истинные значения этих сил находят по формуле (6).

Для определения внутренней реакции  $R_{23}$  составляем уравнение геометрической суммы сил, приложенных к звену 3:

$$\sum_{(3)} \bar{F}_i = 0: \quad \bar{F}_{ПС} + \bar{I}_3 + \bar{G}_3 + \bar{R}_{03}^{\tau} + \bar{R}_{03}^n + \bar{R}_{23} = 0. \quad (14)$$

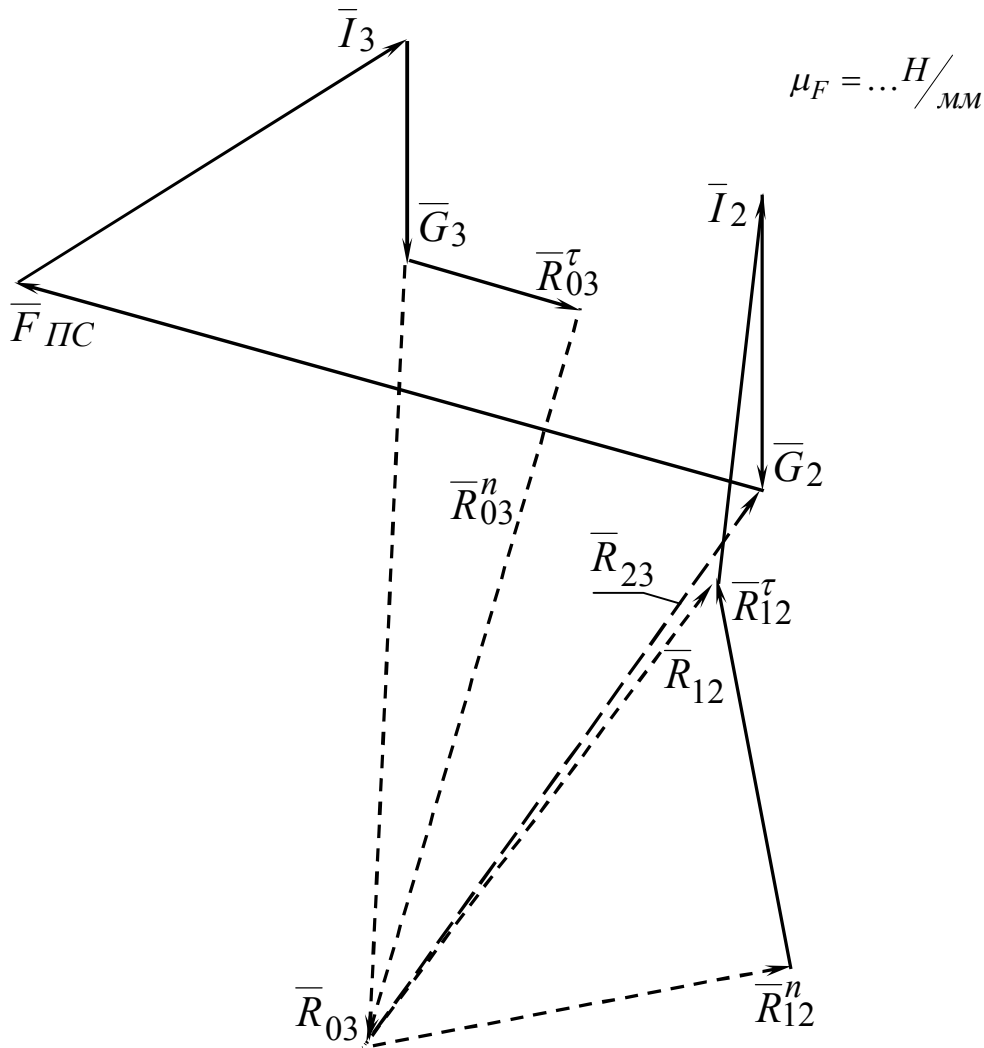


Рис. 8

Это уравнение можно решить, построив отдельный план сил, или воспользоваться уже построенным. Последнее возможно только в случае, если сначала сложены силы, действующие на одно из звеньев группы, затем на другое. Именно так выполнено на нашем плане. Замыкая цепь сил, действующих на звено 3, получаем вектор  $R_{23}$ . На этом расчет группы 2,3 закончен.

Силовой анализ начального механизма 0, 1, произведем, как показано в примере 1.

### ЗАДАНИЕ

Для рычажного механизма, кинематический анализ которого был произведен в предыдущей лабораторной работе, необходимо определить реакции в кинематических парах и движущий момент.

Во всех заданиях силу полезного сопротивления  $F_{ПС} = 100$  Н приложить к выходному звену в точке  $C$  и направить в сторону противоположную скорости этой точки. Массы и моменты инерции звеньев относительно центров масс принять равными соответственно:

- кривошипа  $m = 3$  кг,  $J_{S_1} = 0,005$  кг·м<sup>2</sup>;
- других звеньев – рычагов (шатуна, коромысла)  $m_i = 3$  кг,  $J_{S_i} = 0,01$  кг·м<sup>2</sup>;
- ползуна  $m_3 = 0,5$  кг,  $J_{S_3} = 0$ ;

Требуется определить силы реакций в кинематических парах  $R_{01}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{30}$  и движущий момент  $M_D$ .

### ПОРЯДОК РАБОТЫ

Порядок работы определяется приведенной на стр. 2-3 методикой выполнения силового расчета.

### ТРЕБОВАНИЕ К ОТЧЕТУ

Отчет выполняется на миллиметровой бумаге. В отчете должны быть приведены:

- схема механизма, план ускорений;
- группы Ассур и начальный механизм с указанием всех сил;
- план сил; уравнения равновесия и результаты их решения;
- построения необходимо выполнять так, чтобы они находились на одном развороте.

$M_D$ .

## ПОРЯДОК РАБОТЫ

Порядок работы определяется приведенной на стр. 2-3 методикой выполнения кинетостатического расчета.

## ТРЕБОВАНИЕ К ОТЧЕТУ

В отчете должны быть приведены:

- схема механизма, план ускорений;
- группы Ассура и начальный механизм с указанием всех сил;
- план сил; уравнения равновесия и результаты их решения;
- построения необходимо выполнять так, чтобы они находились на одном развороте.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория механизмов и машин (краткий курс) [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. Н. Ермак; ФГБОУ ВПО "Кузбас. гос. техн. ун-т им. Т. Ф. Горбачева" - Кемерово, 2011 –164 с.  
<http://library.kuzstu.ru/meto.php?n=90546&type=utchposob:common>
2. Артоболевский, И. И. Теория машин и механизмов / И. И. Артоболевский, Москва: Альянс, 2008. – 640 с.
3. Ермак В.Н. Лекции по теории механизмов и машин: Учеб. пособие / Ермак В.Н. / Кузбас. гос. техн. ун-т. – Кемерово, 1999. – 218 с.

Составители

Герасименко Сергей Владимирович  
Латышенко Михаил Павлович  
Садовец Владимир Юрьевич

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Методические указания к практической работе по механике  
для студентов направлений 280700.62, 140100.62, специальности 130101.65  
и по прикладной механике  
для студентов специальности 130400.65

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 24.06.2013. Формат 60×84/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 1.4.  
Тираж 116 экз. Заказ

КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Весенняя, 28.  
Типография КузГТУ, 650000, Кемерово, ул. Д. Бедного, 4А.