

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Кузбасский государственный технический университет  
имени Т. Ф. Горбачева»

**С. М. Простов**

## **Динамический расчет плоского механизма**

**Методические указания к расчетно-графической работе**

Рекомендовано учебно-методической комиссией  
специальности 130405.65 «Горное дело»  
в качестве электронного издания  
для использования в учебном процессе

Кемерово 2013

## Рецензенты:

Гордиенко Р. Ф. - доцент кафедры «Теоретической и геотехнической механики»

Филимонов К. А. – председатель учебно-методической комиссии специальности 130400.65 «Горное дело»

Покатилов А. В. – председатель учебно-методической комиссии специальности 270101.65 «Строительство уникальных зданий и сооружений»

**Простов Сергей Михайлович.** Динамический расчет плоского механизма. [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей 130405.65 «Горное дело» и 271101.65 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / С. М. Простов. – Электрон. дан. – Кемерово : КузГТУ, 2013. – Систем. требования : Pentium IV ; ОЗУ 128 Мб ; Windows XP. – Загл. с экрана.

Представлены теоретические положения темы «Динамический расчет плоского механизма» курса «Теоретическая механика», задания и пример выполнения этих заданий по выполнению расчетно-графической работы

© КузГТУ

© С. М. Простов

## Цель и содержание задания

Задание предназначено для выработки у студентов навыков динамического расчета простейшего плоского механизма методами динамики механической системы и аналитической механики. В ходе выполнения задания студенты должны применить знания кинематики твердого тела, уяснить основные понятия динамики (кинетическая энергия тела, центр масс, момент инерции тела, работа активной силы и сил трения, главный вектор и главный момент сил инерции, возможное перемещение), установить взаимосвязь, достоинства и недостатки методов расчета с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы и общего уравнения динамики.

**ЗАДАНИЕ.** Для механизмов, приведенных на рис. 1–3, определить ускорение центра масс тела 1.

Числовые данные для расчетов приведены в табл. 1, где  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  – величины сил тяжести тел 1–3, Н;  $R_2$  – радиус тела 2, м;  $R_3$ ,  $r_3$  – большой и малый радиус составного тела 3, м;  $i_3$  – радиус инерции тела 3, м;  $f$  – коэффициент трения скольжения;  $\delta$  – коэффициент трения качения, м.

Тело 2 считать в нечетных вариантах цилиндром, в четных – тонкостенной трубой. Нити, соединяющие тела, считать нерастяжимыми и несминаемыми. Нити параллельны соответствующим опорным поверхностям. Проскальзывание между нитями и поверхностями тел отсутствует. Трением качения при движении блока полиспаста в вариантах 9, 10, 19, 20, 23–30 пренебречь.

Углы на чертежах механизмов обозначены следующим образом: одной дугой –  $30^\circ$ , двумя дугами –  $60^\circ$ , дугой с поперечной чертой –  $45^\circ$ .

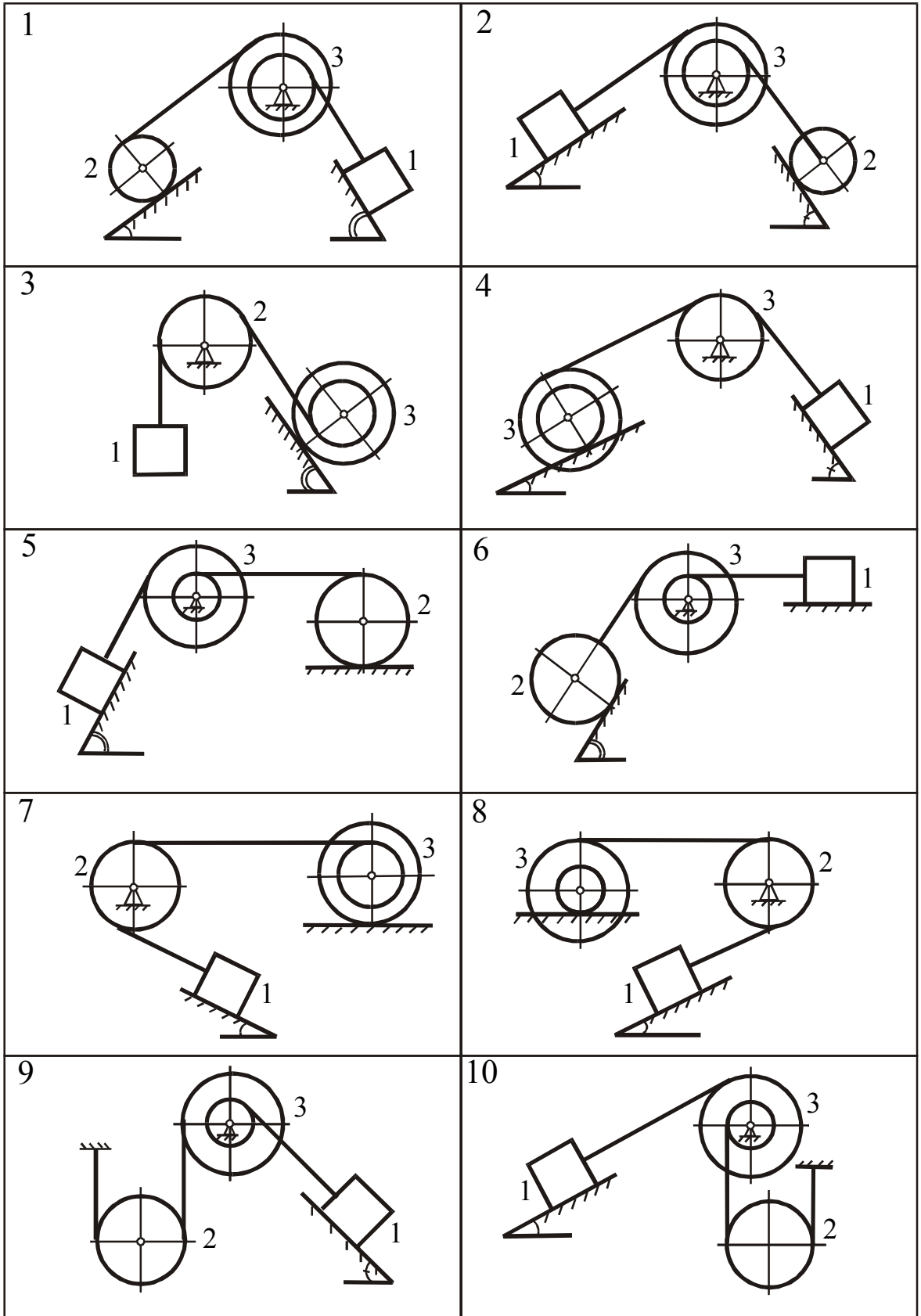


Рис. 1

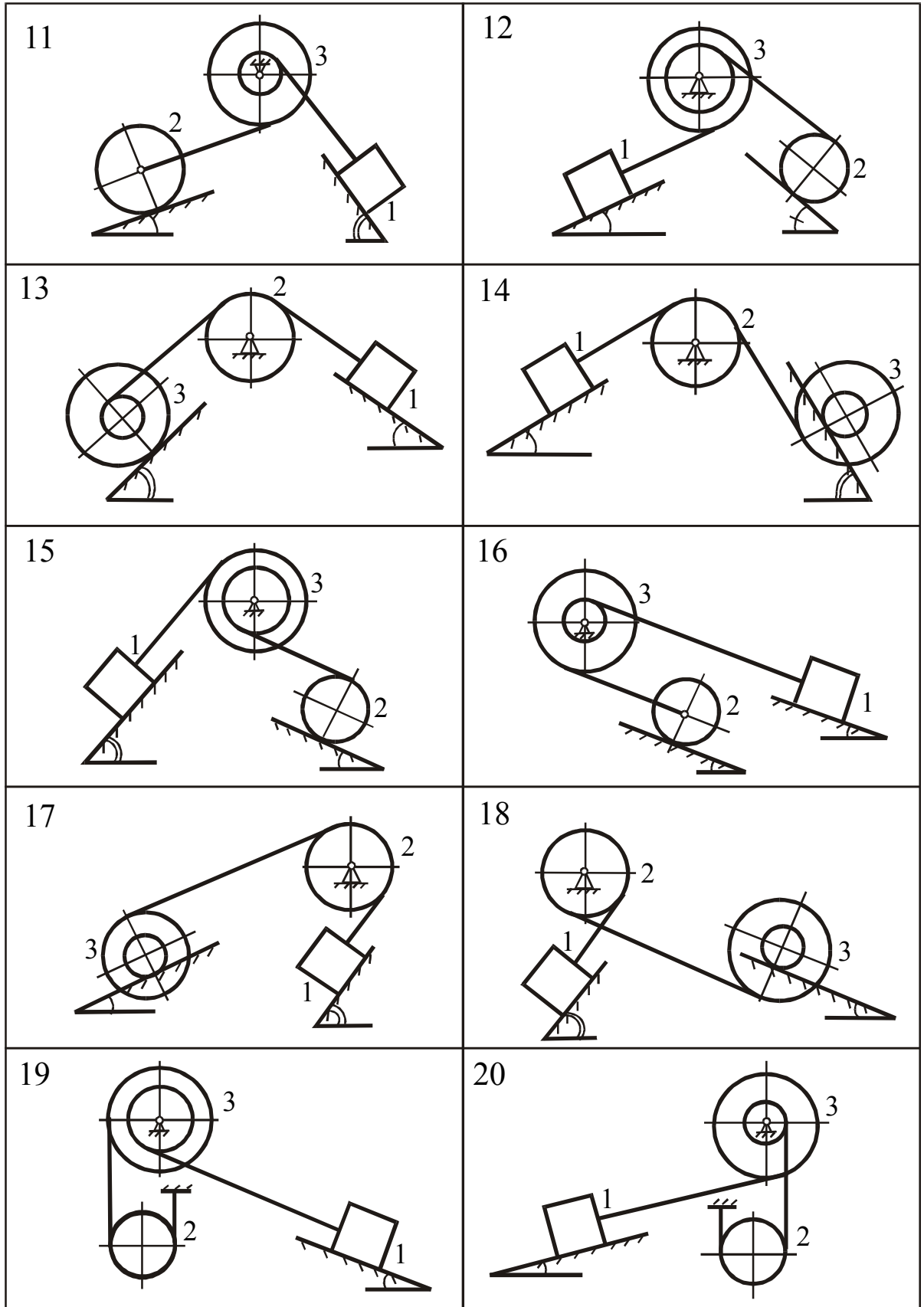


Рис. 2

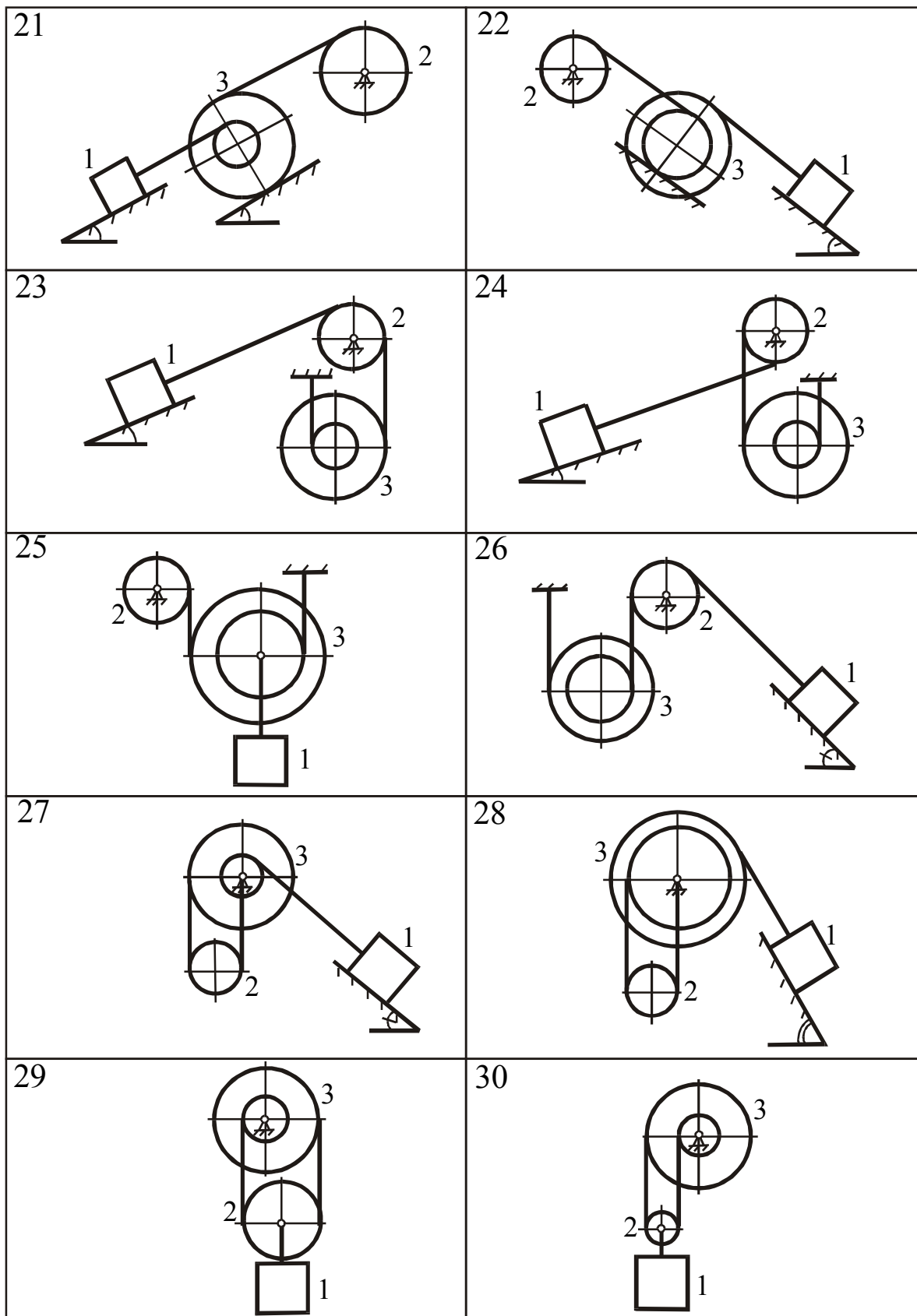


Рис. 3

Таблица 1

Вари- ант	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$R_2$	$R_3$	$r_3$	$i_3$	$f$	$\delta,$ м
	Н			М					
1	10	20	30	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1	0,02
2	20	30	40	0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,01
3	10	30	20	0,1	0,4	0,2	0,3	0,1	0,03
4	30	20	10	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,02
5	20	10	30	0,2	0,4	0,2	0,3	0,1	0,01
6	10	30	20	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,03
7	50	20	30	0,3	0,5	0,1	0,3	0,1	0,02
8	40	10	30	0,4	0,3	0,1	0,2	0,2	0,01
9	30	50	40	0,2	0,4	0,1	0,3	0,1	
10	20	40	30	0,6	0,5	0,3	0,4	0,2	
11	10	20	30	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,03
12	20	30	10	0,2	0,4	0,2	0,3	0,2	0,01
13	50	40	10	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1	0,02
14	10	30	20	0,1	0,6	0,2	0,4	0,2	0,03
15	20	50	30	0,2	0,5	0,3	0,4	0,1	0,03
16	30	40	50	0,3	0,3	0,1	0,2	0,2	0,01
17	40	20	30	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,02
18	20	10	50	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2	0,01
19	10	50	20	0,4	0,8	0,4	0,6	0,1	
20	30	10	50	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	
21	10	20	30	0,2	0,4	0,1	0,3	0,1	0,02
22	20	40	10	0,1	0,5	0,2	0,3	0,2	0,03
23	50	40	10	0,4	0,6	0,3	0,4	0,1	
24	40	10	30	0,3	0,4	0,1	0,2	0,2	
25	10	20	30	0,2	0,4	0,2	0,3		
26	60	10	40	0,5	0,3	0,1	0,2	0,2	
27	30	40	50	0,3	0,6	0,2	0,3	0,1	
28	40	10	60	0,1	0,4	0,2	0,3	0,2	
29	10	20	30	0,3	0,2	0,1	0,2		
30	30	20	10	0,2	0,6	0,2	0,5		

## Порядок выполнения задания

### 1. Расчет с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

#### 1.1. Кинематический расчет механизма

Задают произвольно скорость  $\overline{V}_1$  центра масс тела 1. Определяют направления и величины скоростей центров масс и угловых скоростей всех тел, используя кинематические зависимости для поступательного, вращательного и плоского движения тела [1, 2]. Плоское движение тела рассчитывают с помощью мгновенного центра скоростей, который при качении тела без проскальзывания по неподвижной поверхности находится в точке соприкосновения тела с этой поверхностью, а у блока полиспаста – на пересечении горизонтального диаметра с неподвижной нитью. Учитывают, что все точки растянутой нити имеют равные по величине скорости. Найденные направления скоростей указывают на рабочем чертеже.

#### 1.2. Определение кинематических соотношений

Из п. 1.1 выписывают величины скоростей центров масс и угловых скоростей тел в долях от  $V_1$ , опуская промежуточные и нулевые результаты. Путем почленного дифференцирования по времени полученных уравнений, считая  $V_1$  неизвестной функцией времени, получают необходимые для дальнейших расчетов зависимости соответствующих ускорений от ускорения  $a_1$  центра масс первого тела, а путем интегрирования при нулевых начальных условиях – зависимости соответствующих перемещений от перемещения  $s_1$  центра масс первого тела. Направления ускорений и перемещений считают совпадающими с направлениями соответствующих скоростей.

После дифференцирования (интегрирования) первого уравнения в дальнейшем можно использовать метод аналогий.



### 1.3. Определение кинетической энергии $T$ механизма в расчетном положении

Определяют кинетические энергии тел 1–3, используя формулы для поступательного, вращательного и плоского движения тела, при этом момент инерции тела 2 определяют по формуле для цилиндра (трубы), а тела 3 вычисляют через радиус инерции  $i_3$  [1, 2].

Используя зависимости скоростей из п. 1.2 и суммируя результаты, получают зависимость  $T$  от заданной скорости  $V_1$ .

### 1.4. Определение работ сил, приложенных к механизму

Рассматривают все силы, приложенные к телам механизма. Если сила является активной или реакцией реальной связи, ее указывают на отдельном чертеже (все внешние связи на нем отбрасывают), если реакцией идеальной связи – ее заносят в отдельный список и на чертеже не указывают.

Определяют по очереди работы указанных на чертеже сил и пар сил [1, 2], нанося на чертеж необходимые перемещения совпадающими по направлению с соответствующими скоростями из п. 1.1. Величины работ сил вычисляют через модули сил и перемещений точек их приложения, работ пар – через модули моментов пар и угловых перемещений тел. Учитывают, что работа силы тяжести положительна, если центр масс тела опускается, и отрицательна – если поднимается, а работы сил трения скольжения и качения всегда отрицательны.

Используя зависимости перемещений из п. 1.2 и суммируя результаты, получают зависимость суммы работ сил  $\sum A_{Fk}$  от перемещения  $s_1$ .

**Внимание:** если полученная сумма отрицательна, то действительное направление  $\bar{V}_1$  противоположно ранее выбранному в п. 1.1. Следует указать, что все направления скоростей должны быть обратными, изменить знаки работ сил тяжести и найти новое значение суммы  $\sum A_{Fk}$ .

## 1.5. Составление расчетного уравнения и определение неизвестного ускорения $a_1$

Расчетное уравнение получают путем подстановки результатов п. 1.3, 1.4 в уравнение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы [1, 2], считая начальную кинетическую  $T_0$  механизма нулевой.

Дифференцируют по времени обе части расчетного уравнения и, учитывая, что  $dV_1/dt = a_{1\tau} = a_1$ , выражают  $a_1$ .

## 2. Расчет с помощью общего уравнения динамики

### 2.1. Определение сил инерции

Определяют направления главных векторов, пар с главными моментами сил инерции тел механизма и их величины, используя формулы для поступательного, вращательного и плоского движений тел [1, 2]. Направления ускорений выбирают из чертежа п. 1.1, необходимые соотношения ускорений используются из пункта п. 1.2. Направления сил инерции указывают на чертеже.

### 2.2. Задание механизму возможного перемещения

Задают возможное перемещение  $\delta\bar{s}_1$  центру масс тела 1, совпадающее с  $\bar{s}_1$ . Поскольку механизм имеет одну степень свободы, направления остальных возможных перемещений и соотношения между ними совпадают с направлениями и соотношениями для конечных перемещений, полученными в п. 1.1 и 1.2.

### 2.3. Составление и решение расчетного уравнения

Определяют сумму элементарных работ активных сил и реакций реальных связей на заданном возможном перемещении. Используют сумму работ на конечном перемещении, полученную в п. 1.4, заменяя  $s_1$  на  $\delta\bar{s}_1$ . Определяют сумму элементарных работ сил инерции на заданном возможном перемещении, исполь-

зую чертеж п. 2.1 и указывая на нем необходимые возможные перемещения.

Найденные суммы подставляют в общее уравнения динамики [1, 2], с учетом соотношений, полученных в п. 2.1 и 2.2, производят сокращения и определяют величину  $a_1$ .

Расхождение  $a_1$  с величиной, найденной в п. 1.5, не должно превышать 2 %.

**Пример.** Для механизма на рис. 4:

$P_1 = 50$  Н;  $P_2 = 10$  Н;  $P_3 = 30$  Н;  $R_2 = 0,4$  м (цилиндр);  $R_3 = 0,6$  м;  $r_3 = 0,2$  м;  $i_3 = 0,4$  м;  $f = 0,15$ ;  $\delta = 0,02$  м.

**Решение.**

1. Расчет с помощью теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

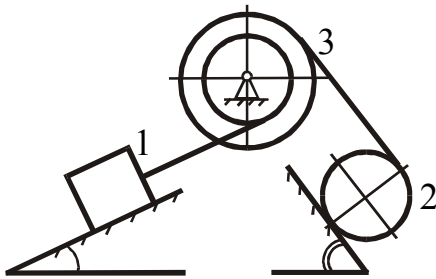


Рис. 4

1.1. Тело 1. Движение поступательное. Задаем  $\bar{V}'_1$ .  $\bar{V}'_1 = \bar{V}_1$ .

Тело 3. Движение вращательное вокруг  $O_3$ .

$$\omega_3 \text{ сог } \bar{V}'_1; \omega_3 = \bar{V}'_1 / r_3 = V_1 / 0,2 = 5V_1;$$

$$\bar{V}_A \perp AO_3 \text{ сог } \omega_3; V_A = \omega_3 R_3 = 5V_1 \cdot 0,6 = 3V_1;$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B.$$

Тело 2. Движение плоское, особый случай  $1 \rightarrow p_2$ ;

$$\omega_2 \text{ сог } \bar{V}_B; \omega_2 = V_B / Bp_2 = 3V_1 / 0,8 = 3,75V_1;$$

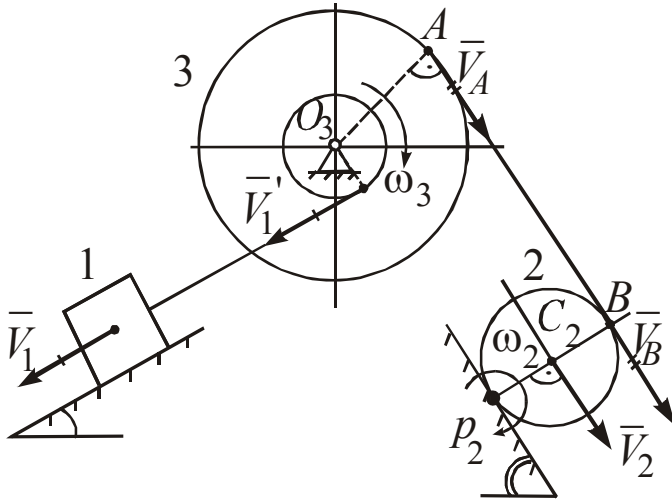
$$\bar{V}_2 \perp C_2 p_2 \text{ сог } \omega_2; V_2 = \omega_2 \cdot C_2 p_2 = 3,75V_1 \cdot 0,4 = 1,5V_1.$$

Направления скоростей приведены на рис. 5.

1.2. Результаты кинематического расчета скоростей:

$$\bar{V}_1; \omega_3 = 5V_1; \omega_2 = 3,75V_1; V_2 = 1,5V_1.$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 5 \frac{dV_1}{dt} \Rightarrow \varepsilon_3 = 5a_1.$$



Используя аналогию, получаем соотношения ускорений:

$$\bar{a}_1; \quad \varepsilon_3 = 5a_1;$$

$$\varepsilon_2 = 3,75a_1;$$

$$a_2 = 1,5a_1.$$

Рис. 5

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = 5 \frac{ds_1}{dt} \Rightarrow \int_0^{\varphi_3} d\varphi_3 = 5 \int_0^{s_1} ds_1 \Rightarrow \varphi_3 = 5s_1.$$

Используя аналогию, получим соотношения перемещений:

$$\bar{s}_1; \quad \varphi_3 = 5s_1; \quad \varphi_2 = 3,75s_1; \quad s_2 = 1,5s_1.$$

$$1.3. \quad T_{1(\text{пост})} = 0,5 \frac{P_1}{g} V_1^2 = 2,5V_1^2;$$

$$T_{3(\text{вр})} = 0,5J_3\omega_3^2 = 0,5 \frac{P_3}{g} i_3^2 (5V_1)^2 = 6V_1^2;$$

$$T_{3(\text{пл})} = 0,5 \frac{P_2}{g} V_2^2 + 0,5J_2\omega_3^2 = 0,5 \frac{P_2}{g} (1,5V_1)^2 +$$

$$+ 0,5 \cdot 0,5 \frac{P_2}{g} R_2^2 (3,75V_1)^2 = 1,68V_1^2;$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 10,18V_1^2.$$

1.4. Реакции идеальных связей:  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{T}_{13}$ ,  $\bar{R}_3$ ,  $\bar{T}_{32}$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}2}$ .

Определим работы сил, используя рис. 6:

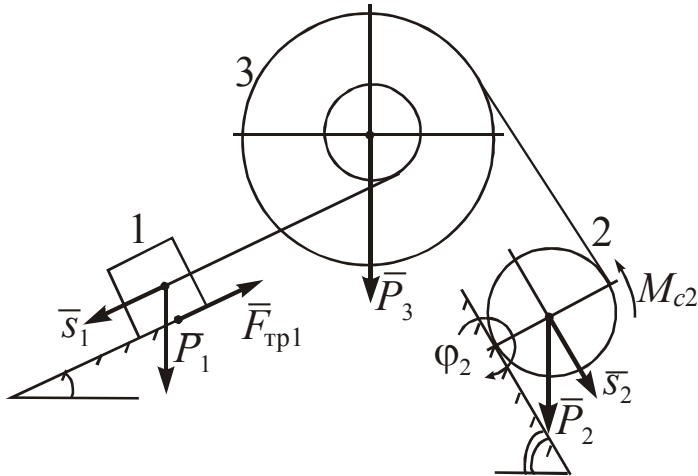


Рис. 6

$$\begin{aligned}
 A_{P_1} &= \bar{P}_1 \cdot \bar{s}_1 = \\
 &= P_1 s_1 \sin 30 = 25 s_1; \\
 A_{\text{тр}1} &= \bar{F}_{\text{тр}1} \cdot \bar{s}_1 = \\
 &= -f P_1 s_1 \cos 30 = -6,52 s_1; \\
 A_{P_3} &= \bar{P}_3 \cdot \bar{s}_3 = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{P_2} &= \bar{P}_2 \cdot \bar{s}_2 = P_2 s_2 \sin 60 = P_2 \cdot 1,5 s_1 \sin 60 = 14,1 s_1; \\
 A_{M_{c2}} &= -M_{c2} \varphi_2 = -\delta P_2 \cos 60 \cdot 3,75 s_1 = -0,32 s_1; \\
 \Sigma A_{Fk} &= A_{P1} + A_{\text{тр}1} + A_{P2} + A_{M_{c2}} = 32,26 s_1.
 \end{aligned}$$

$$1.5. \quad T - T_0 = \Sigma A_{Fk};$$

$$10,18 V_1^2 = 32,26 s_1;$$

$$10,18 \cdot 2V_1 \frac{dV_1}{dt} = 32,26 \frac{ds_1}{dt}; \quad a_1 = \frac{dV_1}{dt} = 1,59 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

## 2. Расчет с помощью общего уравнения динамики

$$2.1. \quad \bar{R}_1^{\text{н}} = -m_1 \bar{a}_1; \quad R_1^{\text{н}} = \frac{P_1}{g} a_1 = 5 a_1;$$

$$M_3^{\text{н}} = -J_3 \varepsilon_3; \quad M_1^{\text{н}} = \frac{P_3}{g} i_3^2 \cdot 5 a_1 = 2,4 a_1;$$

$$\bar{R}_2^{\text{н}} = -m_2 \bar{a}_2; \quad R_2^{\text{н}} = \frac{P_2}{g} \cdot 1,5 a_1 = 1,5 a_1;$$

$$M_2^{\text{н}} = -J_2 \varepsilon_2; \quad M_2^{\text{н}} = 0,5 \frac{P_2}{g} R_2^2 \cdot 3,75 a_1 = 0,3 a_1.$$

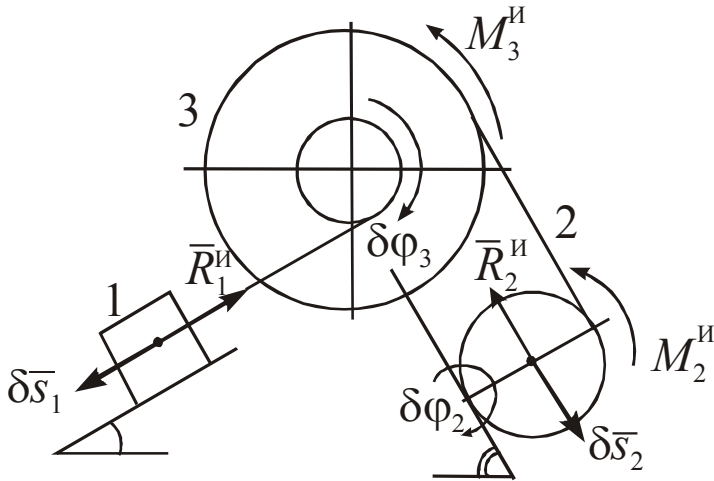


Рис. 7

2.2. С учетом рис. 5 указываем направления возможных перемещений механизма, сил и пар сил инерции (рис. 7). Из п. 1.2 получаем соотношения:

$$\underline{\delta s_1}; \quad \delta \varphi_3 = 5\delta s_1;$$

$$\delta \varphi_2 = 3,75\delta s_1;$$

$$\delta s_2 = 1,5\delta s_1.$$

2.3. Из п. 1.4:

$$\sum \delta A_{Fk} = 32,26\delta s_1.$$

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{Fk}^И &= -\bar{R}_1^И \cdot \delta s_1 - M_3^И \delta \varphi_3 - \bar{R}_2^И \cdot \delta s_2 - M_2^И \delta \varphi_2 = \\ &= -5a_1 \cdot \delta s_1 - 2,4a_1 \cdot 5\delta s_1 - 1,5a_1 \cdot 1,5\delta s_1 - 0,3a_1 \cdot 3,75\delta s_1 = -20,37a_1 \delta s_1. \\ \sum \delta A_{Fk} + \sum \delta A_{Fk}^И &= 0; \quad 32,26 - 20,37a_1 = 0; \quad a_1 = 1,59 \text{ (м/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

### Список рекомендованной литературы

1. Простов С. М. Теоретическая механика : учеб. пособие для студ. спец. 130405.65, 270101.65 [Электронное издание]. Кемерово, 2013. – 301 с.

3. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики [Электронный ресурс] : учебник для студентов вузов. – СПб. : Лань, 2011. – 720 с.